数学教育辞典

王恩大　主编

山东教育出版社

数学教育辞典

《数学教育辞典》编辑委员会 编

山东教育出版社
1990年·济南

鲁新登字2号

数学教育辞典
《数学教育辞典》编辑委员会 编
*
山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)
山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷
*
850×1168毫米32开本　29.25印张　4插页　1122千字
1991年9月第1版　1991年9月第1次印刷
印数1－1,000
ISBN 7—5328—1073—9/Z·34
定价 13.00 元

前　言

近几年来，数学教育的研究，在国内外都呈现出一派派欣欣向荣的局面，涌现出大批的论文和专著，相继诞生了一批新兴的学科。数学教育学、数学教育心理学、数学方法论、奥林匹克数学、中学数学的现代基础、教育数学等都编出了相应的教材，进入了课堂教学的实验阶段。面对数学教育研究正向纵深发展的今天，应尽快地将这些新信息、新理论和新方法传播开来，服务于教学，大面积提高教学质量。

实现社会主义四个现代化，教育是基础，科学技术是关键。《中华人民共和国义务教育法》明确规定："义务教育必须贯彻国家教育方针，努力提高教学质量，使儿童、少年在品德、智力、体质等方面全面发展，为提高全民族的素质，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义建设人材奠定基础。"

不论从传播数学教育的新信息、新理论、新方法和进行新课题的实验，还是从实施我国九年制义务教育，提高教育质量来说，最重要的是加强师资队伍建设。办教育必须有好的师资，这是根本。但是就目前我国的中小学师资队伍建设来说，远不能适应数学教育发展和实施九年制义务教育的需要。提高广大中小学教师素质，已迫在眉睫，刻不容缓。要提高教师素质，一

一是提高其热爱教育事业的社会主义觉悟、高尚师德，为人师表，教书育人；二是提高其科学文化知识水平——专业知识水平；三是提高其教育科学素质，按教育规律办事。为此，我们结合当前教师实际情况，编著了《数学教育辞典》，以供广大中小学数学教师和数学教育工作者，从事数学教育的学习和研究之用。

《数学教育辞典》共分五个部分，计3383条目。

第一部分　数学名词与公式

第二部分　数学方法

第三部分　数学教育心理与思维

第四部分　数学的教与学

第五部分　数学名人、名著、名题、其它

第一部分数学名词与公式，主要依据中小学数学教学大纲，取材于现行中小学通用数学教材。

第二部分数学方法，以中小学数学教材的数学方法为基础，借助方法论的思想和方法适当渗透、加深，并注意了引述中外数学教育专著和论文的研究成果。

第三部分数学教育心理和数学教育思维的取材，主要有三个来源：其一是在科学史上早得以确认的“经典”词条和专著，如《普通心理学》中的一些概念，实行“再改写”加工或“移植”，其二是对一些内涵的基本部分虽有揭示，但因剖视角度不同，解释还不一的，如思维科学中的一些基本概念等，我们广阅资料，充分理解众家之说，针对读者需要，力取更为优化的新解释；其三是不见“经典”、“巨著”，而又被广为使用的新生概念，如数学观念、感知限度、立体思维等，我们本着严肃、求

实、负责态度，大胆履行编者职责，提出自我解释，供研究参考。

第四部分数学的教与学，从数学的教论和学论两方面选取了适合教师和学生实际的思想、理论、方法、经验和措施等。具体地说就是选取了：教与学的思想，教与学的理论，教与学的方法，教与学的经验，教与学的评价等内容。这些内容，有国际的，有国内的；有传统的，有近代、现代的；有完整理论体系的，也有行之有效的经验型的等。只要是教师和学生需要了解的，我们都编入了词条。

第五部分数学名人名著名题及其它，是将古今中外的名人名著名题根据需要进行选择加工，作为移植资料介绍。对于上述内容不能包含而又需编入介绍的，我们均以“其它”概入处置，以满足需要。

《数学教育辞典》的编写，对我们来说是一个新的尝试和探索，由于数学教育领域岐见甚多，我们的水平有限，辞条的选定和释文都可能有不妥和错、谬之处，恳求读者批评指正。

编 者

1990年10月

使用说明

本辞典共分五部分：第一部分　数学名词与公式；第二部分　数学方法；第三部分　数学教育心理与思维；第四部分　数学的教与学；第五部分　数学名人、名著、名题、其它。

本辞典全部条目的排列法如下：

1．每一部分的辞条是依每个辞条的第一个字的笔画数，按由少到多的顺序排列的。

2．辞条第一个字相同时按辞条字数的多少排列，字数少者在前；辞条第一个字笔画数相同时按笔顺排列。

3．如果辞条第一个字相同，且辞条字数也相同，就按辞条第二个字的笔画数多少排列，少者在前。如果第二个字相同，就按第三个字的笔画数排列；如果第二个字笔画数相同，就按笔顺排列。……依次类推。

目　　录

第一部分　数学名词与公式

一　画

二　画

三　画

四 画

五 画

六　画

七　画

八　画

十　画

十一画

十　二　画

十 三 画

十 四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十　四　画

十　五　画

十　六　画

第三部分　数学教育心理与思维

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六 画

七 画

八 画

九　画

十　画

十 一 画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

第四部分 数学教与学

一 画

二 画

三 画

四 画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十 画

十 一 画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

第五部分 数学名人、名著、名题、其它

名 人

一 画

二 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

名 著

二 画

三 画

四 画

五 画

十五画

十六画

名 题

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十二画

十 三 画

十 五 画

其 他

第一部分
数学名词与公式

一一映射　对于集合A与B，如果f是从集合A到集合B的映射，在这个映射f的作用下，集合A的不同元素，在集合B中有不同的象，而且集合B中每一个元素在集合A中都有原象，那么这个映射f叫做A到B的一一映射。例如，$A=\{30°,60°,120°,150°\}$，$B=\{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\}$，映射$f$是求余弦，这就是$A$到$B$的一一映射。如果把集合$A$改为$A_1=\{30°,60°,120°,150°,240°\}$,或把集合$B$改为$B_1=\{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\}$,那么$f$即不是$A_1$到$B$的一一映射，也不是$A$到$B_1$的一一映射。

一次方程　次数是1的代数方程。一次代数方程也称线性方程。例如，$3x-5y+6z=4$。

一次曲线　一次方程$Ax+By+C=0$所确定的曲线。直线是一次曲线。

一次函数　形如$y=kx+b$（$k\neq0$，k、b是常数）的函数是一次函数。当$b=0$时，一次函数$y=kx$为正比例函数。

一度的弧　$1°$的圆心角所对的弧。

一次方程组　几个一次方程组成的方程组。一次方程组又叫做线性方程组。

一般应用题　是指没有特殊方法，需用一般解题方法解答的应用题。

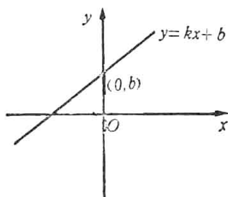
一元一次方程　只含有一个未知数，并且未知数的次数是1的方程。

一元二次方程　只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程。它的一般形式为$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）。

一元一次不等式　只含有一个未知数，并且未知数的次数是1的不等式。

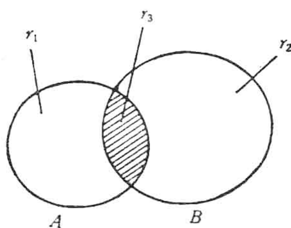
一元二次不等式　只含有一个未知数并且未知数的最高次数是2的不等式。它的一般形式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$。

一次函数的图象　过点$(0,b)$且平行于直线$y=kx$的一条直线（如图）。b称做直线$y=kx+b$在y轴上的截距，简称截距。k称作直线$y=kx+b$的斜率。



一元一次不等式组 几个一元一次不等式组成的不等式组。

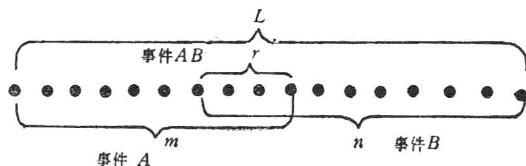
一般概率加法公式 是指对于两个事件A与B，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。这个公式可借助图来说明。



设n次试验中，“A发生，B不发生”的次数是r_1，“B发生、A不发生”的次数是r_2，“A、B都发生”的次数是r_3。显然，事件A发生的总次数应是r_1+r_3，B发生的总次数是r_2+r_3，把它们发生的次数相加，得$r_1+r_3+r_2+r_3=r_1+r_2+2r_3$。根据事件加法的意义，$A+B$发生的次数应是$r_1+r_2+r_3$（见图），可见，$r_3$多计算了一次，应减去，得$r_1+r_2+r_3=(r_1+r_3)+(r_2+r_3)-r_3$。除以$n$后，得到$A+B$和$A$、$B$发生频率之间的关系是$\frac{r_1+r_2+r_3}{n}=\frac{r_1+r_3}{n}+\frac{r_2+r_3}{n}-\frac{r_3}{n}$。$r_3$就是事件$AB$发生的次数。当$n$很大时，频率稳定于概率，于是有$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

一般概率乘法公式 当事件A和B独立时，乘法公式是 $P(AB)=P(A)P(B)$。这个公式是以事件A和事件B相互独立作为条件的。对于任意两个事件（可相互独立，也可不是）一般概率乘法公式应是：$P(AB)=P(A)P(B|A)$ 或者是$P(AB)=P(B)P(A|B)$。下面以古典概型为例，证明这个公式。

设总的基本事件个数为l，其中事件A所包含的基本事件有m个，事件B包含的基本事件有n个。因为我们没有限定事件A和B不相容，所以，一般都存在着既属于事件A，也属于事件B的基本事件。这些基本事件就是事件AB所包含的基本事件。设这样的事件共有r个（见图），由图并



根据假设，有$P(AB)=\frac{r}{l}$，$P(A)=\frac{m}{l}$。现在看条件概率$P(B|A)$，因为这是在事件A发生的条件下考虑问题的，这时总的基本事件数就是事件A所包含的个数m，在A发生的条件下B再发生，事件B所包含的基本事件，就必然是属于事件AB的r个基本事件，即$P(B|A)=\frac{r}{m}$。这样就有$P(A)P(B|A)=\frac{m}{l}\cdot\frac{r}{m}=\frac{r}{l}=P(AB)$。同样可证得$P(B)P(A|B)=P(AB)$。这样一般概率乘法公式得到了证明。

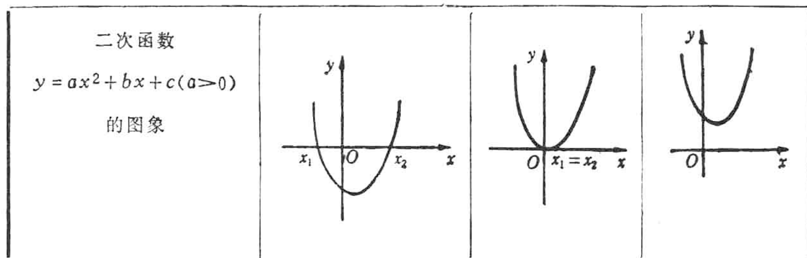
由于当事件A和B相互独立时，有$P(A|B)=P(A)$和$P(B|A)=P(B)$，代入一般概率乘法公式，就得到独立条件下的乘法公式$P(AB)=P(A)P(B)$。这说明，独立条件下的乘法公式，是一般概率乘法公式的特殊情况。

一元二次方程的解法 （1）直接开平方法；（2）配方法；（3）公式法：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的求根公式是$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geqslant 0)$；（4）因式分解法。其中配方法是一种重要的数学方法，求根公式法是解决一元二次方程的通法。

一元一次不等式的解集 任何一个一元一次不等式，经过不等式的同解变形后，都可以化成$ax>b(a\neq 0)$的形式，如果$a>0$，那么$ax>b$的解集是$\{x|x>\frac{b}{a}\}$；如果$a<0$，那么$ax>b$的解集是$\{x|x<\frac{b}{a}\}$。

一元二次不等式的解集 任何一个一元二次不等式，经过不等式的同解变形后，都可以化成$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$的形式。一元二次不等式的解集与一元二次方程的根及二次函数的图象密切相关，其解集如下表所示：

$\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 的根		有两个相异实实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （取$x_1<x_2$）	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}=\{x\mid x<x_1$或$x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	实数集R
	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	ϕ	ϕ



一元二次方程根的判别式　把b^2-4ac称作实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）根的判别式。通常用符号"Δ"来表示（"Δ"是希腊字母，读作daita）。由"Δ"的性质可以不解方程而判定方程根的性质。当$\Delta>0$时，方程有二不同实根；当$\Delta=0$时，方程有二相同实根；当$\Delta<0$时，在实数范围内方程无实根（在复数范围内方程有二虚根）。

一般二元二次方程的化简　由于一般二次方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$的曲线都是圆锥曲线（包括退缩圆锥曲线），所以可以利用坐标轴的平移和旋转把它化成圆锥曲线的标准方程。如果二元二次方程中不含xy项，那么利用坐标轴的平移就可把它化成标准方程；如果方程中含有xy项，那么可以先旋转坐标轴消去xy项，再用坐标轴的平移把它化成标准方程。如果所给方程是一个有心圆锥曲线型的方程（即$B^2-4AC\neq0$），那么可以先把坐标轴的原点平移到这个圆锥曲线的中心，消去方程中的一次项，然后再旋转两轴消去xy项。

一元二次方程根与系数的关系　见韦达定理。

二进制　底数是"二"的进位制。在二进制中，每二个相同的任何单位，组成一个和它相邻的较高的单位。同一个数在十进制和二进制中具有不同的表示方法。例如，十进制中的2和4，在二进制中则表示为10和100。在二进制中，表示一个数只用0和1两个记号。在电子计算机中大都采用二进制。二进制思想最早出现于我国。公元六、七世纪以前我国的古书《周易》中记载："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"意思是：一分为二，二分为四，四分为八。用现在的数学式子表示，可写成$2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$。$2^0=1$可理解为2尚未"分"时是1，$2^1=2$可理解为分一次为2，以下类推。这些数依次可看作是二进制中各位上的位值。《周易》中所说"两仪"是指符号"——"（称为阳爻(yáo)）和"— —"（称为阴爻）。"四象"为

太阳　太阴　少阳　少阴

"八卦"为

乾　坤　震　艮
(qián)　(kán)　(zhèn)　(gèn)

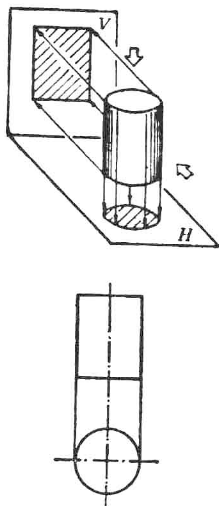
☲	☵	☱	☴
离	坎	兑	巽
(lí)	(kǎn)	(duì)	(xùn)

如果将阳爻看作数字1，阴爻看作数字0，则上面的八卦可以写成：

卦名	符号	二进制数
坤	☷	0 0 0
震	☳	0 0 1
坎	☵	0 1 0
兑	☱	0 1 1
艮	☶	1 0 0
离	☲	1 0 1
巽	☴	1 1 0
乾	☰	1 1 1

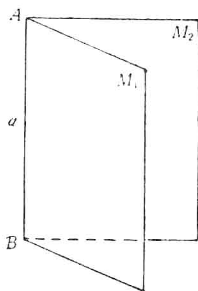
以上就是二进制记数法中的0、1、2、3、4、5、6、7。当然，八卦的提出者从未以某种方式表示八卦的记数功能，更没有提出可以用二进制来表示一切自然数，但是，这种思想方法已是可贵的。用二进制表示自然数是十七世纪数学家莱布尼兹提出的，但是当时他的设想并没有变成现实。二进制的广泛采用是在电子计算机问世之后。

二视图　是一个几何体在两个互相垂直的投影面上同时进行正投影所得到的两个视图。如图所示，要画一个圆柱的二视图，就把这个圆柱放在互相垂直的两个投影面V和H之间，在正投影面V上的视图是一个矩形，长等于圆柱的直径，高等于圆柱的高，在水平投影面H上的视图是一个圆，它与圆柱的底面是等圆。将圆柱拿走，把水平投影面H往下转90°，使投影面H与V在同一个平面上，就得到这个圆柱的二视图。其中在正投影面V上所得到的视图称为主视图；在水平投影面H上所得到的视图称为俯视图。主视图和俯视图统称二视图。



二面角　从一条直线出发的两个半平面所组成的图形。这条直线叫做二面角的棱。这两个半平面叫做二面角的面。二面角也可以看做是从一条直线出发的一个半平面绕着这条直线旋转以后，由它的最初位置和最终位置所组成的图形。下图是一个二面角，a是它的棱，M_1、M_2是它的面。二面角的表示法通常是把表示它的棱的字母写在中间，表示两个面的字母写在两旁，中间用两条短的横线隔开。如图中的二面角可以记作二面角M_1—AB—M_2或者二面角M_1aM_2。有时

也可以用棱的字母来表示，如二面角AB或者二面角a。



二次方根　见方根。

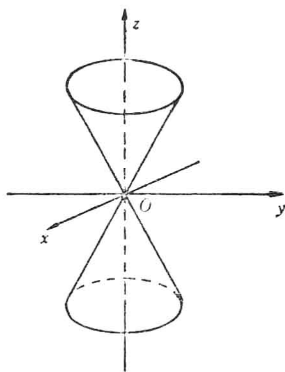
二次方程　次数是2的代数方程。例如$3x^2-5x+2=0$，$x^2-2xy+3y^2+6x+5y+1=0$等都是二次方程。

二次曲面　二次方程所表示的曲面叫做二次曲面。如椭球面，单叶双曲面，锥面等都是二次曲面。

二次函数　形如$y=ax^2+bx+c$（其中$a\neq0$，a，b，c是常数）的函数。

二次根式　式子$\sqrt{a}$($a\neq0$)称作二次根式。例如，$\sqrt{5}$，$\sqrt{a^2+1}$。初中代数"数的开方"一章中所讲的数的算术平方根的表达式是二次根式的特例，同时，二次根式又都能转化非负数的算术根。"二次根式"一章的知识也都是通过数的算术根的研究而推广的。例如，公式"$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$"就是由"数的算术平方根"的知识推出的。

二次锥面　凡齐次方程所确定的曲面,都是由通过原点的直线所构成的，这样的曲面叫做锥面。构成这锥面的直线叫做它的母线，这些母线所通过的一点叫做锥面的顶点，特别地，由于方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$是二次齐次方程，所以方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$所确定的曲面叫二次锥面。在方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$中，若$a=b$，则方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$变为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$，这方程表示一个以$z$轴为旋转轴的旋轴锥面（如图），同样由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$和$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$所确定的曲面也是二次锥面。



二阶导数　函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$仍然是x的函数。如果$f'(x)$可导，那么它的导数$(f'(x))'$叫做$f(x)$的二阶导数，记作$f''(x)$或y''或$\frac{d^2y}{dx^2}$。例如，速度v是位移函数

$s=s(t)$ 对于时间 t 的一阶导数 $v=s'(t)$，加速度a是速度$v=v(t)$ 对于时间t的一阶导数 $a=v'(t)$，所以，加速度a是位移函数$s=s(t)$对于时间t的二阶导数$a=v'(t)=(s'(t))'=s''(t)$。

从二阶导数定义看，函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，就是对函数 $y=f(x)$ 求导后，再对得到的导数 $y'=f'(x)$ 第二次求导，所以函数 $y=f(x)$二阶导数的求法，并不需要新方法，只是在一次求导的基础上，重复地应用求导公式。

$f(x)$ 的二阶导数的导数叫做$f(x)$的三阶导数，记作 $f'''(x)$ 或 y''' 或$\frac{d^3y}{dx^3}$。一般地，$f(x)$的 $n-1$ 阶导数的导数叫做 $f(x)$ 的 n 阶导数。$y=f(x)$的n阶导数记作$f^{(n)}(x)$。

二项方程　形如 $a_nx^n+a_0=0$（a_0，$a_n\in C$，且$a_n\neq 0$）的方程。

二阶行列式　见行列式。

二项式系数　见二项式定理。

二项式定理　$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b_1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in N)$。这个公式叫做二项式定理。等号右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式，其中$C_n^r$（$r=0$，$1$，$2$，$\cdots$，$n$)叫做二项式系数。展开式的第 $r+1$ 项叫做二项展开式的通项，用T_{r+1}表示，即$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$。

二面角相等　如果两个二面角的平面角相等，那么这两个二面角相等。反过来，如果两个二面角相等，那么它们的平面角相等。

二元一次方程　含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1的整式方程。例如，$2x+y=16$，$x-y=1$等都是二元一次方程。

二元二次方程　含有两个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是2的整式方程。关于 x，y 的二元二次方程的一般形式是 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$。

二元一次方程组　由几个含有两个未知数的一次方程组成的方程组叫做二元一次方程组。例如

$$\begin{cases}x+y=5,\\x-y=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-y=3,\\x+3y=4.\end{cases}$$

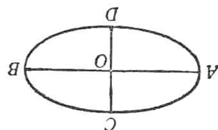
等都是二元一次方程组。

二元二次方程组　由至少有一个二次的两个二元方程组成的方程组。例如，

$$\begin{cases}xy=12,\\x+y=7,\end{cases}\quad 和\quad\begin{cases}x^2+y^2=13,\\xy=6.\end{cases}$$

二次曲线的中心　如果二次曲线的任何一条弦，被平面上一点所平分，这个点就称为二次曲线的中心。这个中心也就是二次曲线的对称中心。

二次曲线的主轴　当二次曲线的一条直径的任一垂直的弦被这直径所平分时，就称这直径为“主轴”或“主直径”，二次曲线的主轴就是它的对称轴。如图，椭圆的直径AB和CD都是椭圆的主轴。



二次曲线的直径　二次曲线的一组平行弦的中点的轨迹是一条直线，这条直线叫做二次曲线的直径，圆和椭圆的直径是过中心的弦，双曲线的直径

是过中心的直线，抛物线的直径是与其对称轴平行的射线。

二次函数的图象 以点 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点，以直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴的抛物线就是二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象。

二次根式的性质 （1）积的算术平方根，等于积中各因式的算术平方根的积，即 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；（2）商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根，即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (b\neq 0)。$$

二面角的平分面 在二面角内从二面角的棱出发的半平面，把二面角分成两个相等的二面角，这个半平面叫做这个二面角的平分面。

二面角的平面角 过二面角棱上的任意一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。

二项式系数的性质 （1）在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中，与首末两端"等距离"的两项的二项式系数相等，即有 $C_n^m=C_n^{n-m}$。（2）在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中，二项式系数的和为 2^n，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$；（3）在二项展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，即 $C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$；（4）如果二项式的幂指数是偶数，中间一项的二项式系数最大，如果二项式的幂指数是奇数，中间两项的二项式系数相等并且最大。

二项展开式的通项 见二项式定理。

二元二次方程的曲线 二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，它的曲线一般可以归结为下表：

条件		类型	一般情形	特例（退缩圆锥曲线）
$B^2-4AC\neq 0$（有心圆锥曲线）	$B^2-4AC<0$	椭圆型	椭圆	1.点（点椭圆） 2.无轨迹（虚椭圆）
	$B^2-4AC>0$	双曲线型	双曲线	两相交直线
$B^2-4AC=0$（无心圆锥曲线）		抛物线型	抛物线	1.两平行线 2.一直线（两条重合直线） 3.无轨迹（两虚直线）

由上表可以看出，对于一般二元二次方程，可根据 $\Delta=B^2-4AC$ 的值的情况，直接判定它是椭圆、双曲线或抛物线型的曲线方程，因此称 $\Delta=B^2-4AC$ 为二元二次方程的判别式。

二次根式的除法法则 公式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (b\neq 0)$ 就是二次根式的除法法则。运用这个公式，可以进行一些简单的二次根式的除法运算。即二次

根式相除，仍得二次根式，把被开方数相除所得的商作为商的被开方数。

二次根式的乘法法则　公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$就是二次根式的乘法法则。运用这个公式，可以进行二次根式的乘法运算。即二次根式相乘，仍得二次根式，把被开方数的积作为积的被开方数。

二阶导数的中值定理　这是二阶导数应用的预备知识之二，这知识归纳为定理，即如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有二阶导数，那么至少有一点$\xi\ (a, b)$，使得$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-a)^2$。

①这个定理的证明过程是：令$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+k(b-a)^2$。

②若能证明$k=\frac{1}{2}f''(\xi)$，则定理的结论得证。为此，作辅助函数：$\varphi(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-k(b-x)^2$。③因为$f(x)$在$[a, b]$上有二阶导数，故$f(x)$、$f'(x)$在$[a, b]$上连续，于是$\phi(x)$在$[a, b]$上连续，且可导，又由②、③有$\phi(a)=f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)-k(b-a)^2=f(b)-f(b)=0$，$\phi(b)=f(b)-f(b)=0$，即$\phi(a)=\phi(b)$。根据罗尔定理可知，至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得$\phi'(\xi)=0$。但对③求导得$\phi'(x)=-f''(x)(b-x)+2k(b-x)$，所以$\phi'(\xi)=-f''(\xi)(b-\xi)+2k(b-\xi)=0$。因为$b-\xi\neq0$，于是$k=\frac{1}{2}f''(\xi)$，将$k$代入②得证①成立，即$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-a)^2$。为应用方便，本定理结论写成以下形式：令$a=x_0$，$b=x\neq x_0$，则$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$④其中$\xi$在点$x_0$与$x$之间。

二元一次方程的一个解　适合一个二元一次方程的每一对未知数的值就是二元一次方程的一个解。如方程$x+y=5$的一个解是$\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$等。

二次根式的加减法法则　先把各个二次根式化成最简二次根式，再把同类二次根式分别进行合并。

二倍角的三角函数公式　在两角和的三角函数中，当$\alpha=\beta$时，可得到二倍角的三角函数公式：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

二元线性方程组的解的讨论　二元线性方程组为$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$令$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$。（1）当$D\neq0$时，有唯一解：$x=\frac{D_x}{D}$，$y=\frac{D_y}{D}$；（2）

当$D=0$，但D_x，D_y不全为零时，无解；（3）当$D=D_x=D_y=0$时，有以下两种情况：① a_1，a_2，b_1，b_2不全为零，或 $a_1=a_2=b_1=b_2=c_1=c_2=0$ 时，有无穷多解；②$a_1=a_2=b_1=b_2=0$，但 c_1，c_2 不全为零时，无解。

二元二次方程$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$型的曲线 这个方程是缺xy项的二次方程其中A、C 不都是零，它所表示的曲线：（1）如果A和C 都不等于零，经过配方，可以把所给方程写成$A(x-h)^2+C(y-k)^2=F'$，这里$h=-\dfrac{D}{2A}$，$k=-\dfrac{E}{2C}$，$F'=\dfrac{D^2C+E^2A-4ACF}{4AC}$，平移坐标使新原点的坐标为（$h$、$k$）得 $Ax'^2+Cy'^2=F'$。①如果A和C的符号相同，方程的图形就是椭圆（当A，C的符号和F'相同时），或者是一个点（当$F'=0$时），或者没有轨迹（当$A'C$的符号和F'相反时）这种形式的二次方程叫做椭圆型方程。②如果A和C符号相反，方程的图形就是双曲线（当$F'\neq 0$时），或者是两条相交直线（当$F'=0$时）。这种形式的二次方程叫做双曲线型方程。（2）如果A或C有一个等于零，例如，设$A=0$，$C\neq 0$，所给方程可写成为$Cy^2+Dx+Ey+F=0$，①设$D\neq 0$，经过配方，可以把这个方程写成：$C(y-k)^2+D(x-h)=0$，这里$h=\dfrac{E^2-4CF}{4CD}$，$k=-\dfrac{E}{2C}$，平移坐标，使新原点的坐标为（h，k）得$Cy'^2+Dx'=0$，方程的图形是抛物线。②设$D=0$，方程$Cy^2+Dx+Ey+F=0$就成为$Cy^2+Ey+F=0$，这个方程的图形是两条和 x 轴平行的直线（方程有两个相等的实根时）；或者没有轨迹（方程没有实根时），上述①，②两种情形的方程都叫做抛物线型方程。如果$A\neq 0$、$C=0$，结论和$A=0$，$C\neq 0$的情况相仿，它的方程也叫做抛物线型。

综合上面情况，列表如下：

条　件	类　型	一般情况	特殊情况
A、C同号	椭圆型	椭　圆	一点或没有轨迹
A、C异号	双曲线型	双曲线	两条相交直线
A、C有且仅有一个为零	抛物线型	抛物线	两条平行线，一条直线或没有轨迹

二元二次方程$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$型的曲线的讨论 这个方程是缺少xy项的二次方程，其中A、C不都是零，它所表示的曲线可归为下表：

条件	类型	一般情况	特殊情况
A、C同号	椭圆型	椭圆	一点或无轨迹
A、C异号	双曲线型	双曲线	两条相交直线
A、C有且仅有一个为零	抛物线型	抛物线	两条平行线，一条直线或无轨迹

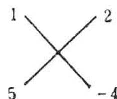
十进制 底数是"十"的进位制。是最常用的一种记数法。就正整数而言，即以十为基础，逢十进一位，逢百进二位，逢千进三位等等，从而把一个正整数从右到左分成个位数、十位数、百位数、千位数等等。任何一个正整数N有一个且只有一个十进位制表达式，即$N=a_k\times10^k+a_{k-1}\times10^{k-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$。其中$a_0$，$a_1$，…，$a_k$都是0，1，2，…，9中的一个数，$a_k\neq0$，通常把$N$简记作$a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0$。例如，$3\times10^4+1\times10^3+7\times10^2+5\times10+9=31759$。小数也有十进制表示法。

十进分数 分母是10^n(n为正整数)的分数。例如，$\frac{3}{10}$，$\frac{317}{10^3}$，$\frac{19}{10^5}$。等

$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，……，$\frac{1}{10^n}$是十进分数的分数单位。

十二进位制 底数是"十二"的进位制。用十二进位制所得到的数的各位的单位分别是一 十二、一百四十四、……，即依次是12^0、12^1、12^2、……。十二进位制流行于古代罗马人当中，现在仍有许多东西把十二作为一"打"来计数。

十字相乘法 经过画十字交叉线的帮助，把二次三项式分解因式的方法。例如，$5x^2+6x-8=(x+2)(5x-4)$，是经过画十字交叉线：



的帮助而得到的。

十进复名数 相邻两个单位的进率是十的复名数。

十进制计数法 每相邻的两个单位之间的进率都是10的计数方法。详见十进制。

几何 数学的一个重要分支。初等几何的研究对象是图形的形状、大小和相互位置关系。古代埃及是几何学的发源地之一，由于尼罗河定期泛滥，需要重新测定地界，从而产生的测地术便是几何学的源流。埃及的几何知识传入希腊后，随着生产的进步，几何在理论和实践上都得到很大发展，在此基础上，欧几里得（公元前330～前275年）按照比较严格的逻辑系统创立了欧氏几何（见欧几里得几何学条），几何学希腊文的原意是测地术。我国也是几何学的发源地之一、

西安半坡新石器时代遗址中出土的彩陶上就绘有几何图形。我国现存最早的数学书籍《周髀算经》和《九章算术》中，已有圆周率、勾股定理以及图形面积计算的记载，此后许多杰出的数学家刘徽、祖冲之、秦九韶、李治等对几何的发展都做出了重大贡献。欧几里得的《几何原本》被译为各种文字广为流传。明万历丁未年（公元1607年）由大学士徐光启（1562～1633）与意大利天主教传教士利玛窦(Matteo Ricci、1552～1610)合作，根据拉丁文本《欧几里得原本》翻译出版了该书的前六卷，徐光启首先使用“几何”这个词，关于译名来历的猜测，一是我国古代数学书上经常用几何代表有多少的意思，与几何原本的原意“测地术”有些相近；二是“几何”与拉丁文几何“Geometria”中前几个字母“Geo”读音相近。随着生产的发展，十七世纪至十九世纪又出现了解析几何、射影几何和微分几何等。中学数学中只学习初等平面几何、立体几何和平面解析几何。

几何体 对于一个物体，当只研究它的形状、大小，而不考虑其他性质时，我们就说它是几何体，几何体简称体。如对于篮球、乒乓球、钢球等，当只考虑它们的形状和大小时，我们就说它们是球体。

几何学 研究物体的形状、大小以及它们相互之间的位置关系的科学。古代埃及为兴建尼罗河水利工程，曾经进行过测地工作，它逐渐发展为几何学。公元前约三百年，古希腊数学家欧几里得把前人生产实践中长期积累的几何知识加以整理总结为演绎体系，写成了《几何原本》。我国对几何学的研究也有悠久的历史。早在上古时期，我国劳动人民就已利用规矩来制作方圆。秦汉五百年间成书的《周髀算经》和《九章算术》中，对图形面积的计算已有记载，刘徽、祖冲之、王孝通等对几何学都有重大贡献。十七世纪欧洲工业迅速发展起来，以前所用的几何方法不能满足实际需要，这就使笛卡儿利用代数方法研究几何问题，建立了解析几何。在十八、十九世纪，由于工程、力学和大地测量等方面的需要，产生了画法几何、射影几何和微分几何。在十九世纪二十年代，产生了非欧几何。二十世纪以来，理论物理，特别是相对论的出现，又促进了微分几何的发展。

几何分布 一战士一次射击命中靶子的概率是p，不命中的概率是$q=1-p$。如果到击中为止所需进行的射击次数，用随机变量来描述，那么ξ的取值就是1，2，…，n，…。ξ的分布列是：“$\xi=1$”就是“第一次就命中”，显然$p(\xi=1)=p$；“$\xi=2$”就是“第一次未命中”和“第二次命中”这两个事件的积。由于这两次射击是互相独立的，就有$p(\xi=2)=qp$，“$\xi=3$”就是第一、二次未命中，“第三次命中”，同样根据事件的独立性，有$p(\xi=3)=q\cdot q\cdot p=q^2p$，……“$\xi=n$”表示“直到第$n$次才命中”，有$p(\xi=n)=q^{n-1}p$,……随机变量$\xi$的分布列就是：$p(\xi=k)=q^{k-1}p$ ($k=1,2,\cdots,n,\cdots$)。这个概率分布就称为几何分布，它满足分布列的两个性质：(1) $p(\xi=k)=q^{k-1}p>0$ ($k=1,2,\cdots,n,\cdots$)，p和q都是

正数；（2）$p(\xi=1)+p(\xi=2)+\cdots+p(\xi=n)+\cdots=p+qp+q^2p+\cdots+q^{n-1}p+\cdots=p(1+q+q^3+\cdots+q^{n-1}+\cdots)=\frac{p}{1-q}=1$。

几何图形 点、线、面或若干点、线、面、体组合在一起就成为几何图形。

几何平均数 如果a_1，a_2，…，$a_n\in R^+$，且$n>1$，那么，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$叫做这$n$个正数的几何平均数。

几何体的体积 几何体所占有的空间的大小。这里所说的大小，是指一个确定的“数”，这个数就是在确定的体积单位下，度量几何体所得的量数。在研究几何体的体积时，有下面的两条公理：（1）两个全等的几何体（对应部分都重合的两个几何体），它们的体积相等；（2）如果把一个几何体分成若干部分，那么各部分体积的和等于整个几何体的体积。

几种常见函数的导数 这几种函数的导数是根据导数的定义证明的。

（1）设$y=C$（C为常数），则$y'=0$。

证明 $y=f(x)=C$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，所以$f'(x)=C'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$。

（2）$(x^n)'=nx^{n-1}$（n为正整数）。

证明 $y=f(x)=x^n$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$

$$=[x^n+C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_n^n(\Delta x)^n]-x^n$$

$$=C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_n^n(\Delta x)^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+C_n^n(\Delta x)^{n-1},$$

所以 $y'=(x^n)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots$

$$+C_n^n(\Delta x)^{n-1}]=C_n^1x^{n-1}=nx^{n-1}。$$

（3） $(\sin x)'=\cos x$。

证明 $y=\sin x$，$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$。因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$，

所以$y'=(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$

$=\cos x$。

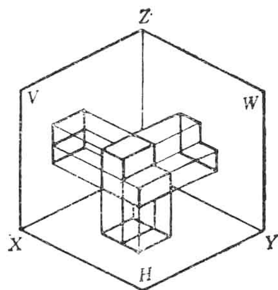
（4）　$(\cos x)'=-\sin x$。

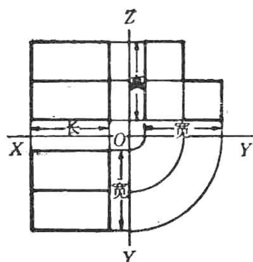
证明方法与（3）类似，略。

$n\to\infty$与$x\to\infty$的意义　$n\to\infty$是指自变量n作为项数仅能取正整数，因而它只能沿着x轴的正方向跳跃地无限增大。如$f(n)=\frac{1}{n}$，当$n\to\infty$时，则n取1，2，3，4，5，6，7，…。而$x\to\infty$则不同，作为函数自变量的x是一个连续变动的实数，因而它可以在指定的范围内连续地取一切实数，而且有三种不同的变化方向：（1）沿x轴的正方向无限变大，即$x\to+\infty$；（2）沿x轴的负方向其绝对值无限变大，即$x\to-\infty$；（3）同时沿x轴的正方向和负方向其绝对值无限变大，即$|x|\to+\infty$，也可记为$x\to\infty$。

三角形　由三条线段首尾顺次连结所组成的图形。组成三角形的三条线段叫做三角形的边，相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点。“三角形”可以用符号“△”表示，顶点是A、B、C的三角形记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形ABC”。三角形任何两边的和大于第三边。

三视图　三视图是一个几何体在三个互相垂直的投影面上同时进行正投影所得到的三个视图。正对着我们的投影面V叫做正面，正面下方的投影面H叫做水平面，靠右边的投影面W叫做侧面。几何体在正面投影面V上的视图叫做主视图；在水平投影面H上的视图叫做俯视图。在侧面投影面W上的视图叫做左视图。把几何体拿走后，把投影面H向下转90°，投影面W向后转90°，使三个投影面摊平，三个视图就在同一个平面上，如上图右图。三个视图的位置是：俯视图在主视图的下方，左视图在主视图的右方，主视图反映出物体的长和高，俯视图反映出物体的长和宽，左视图反映出物体的高和宽。在画三视图时要注意：长对正，宽相等，高平齐。主视图、俯视图和左视图统称为三视图。





三次方根　见方根。

三级运算　第一级运算、第二级运算、第三级运算的统称。在数的运算中，加法和减法称为第一级运算；乘法和除法称为第二级运算；乘方和开方称为第三级运算。

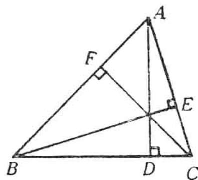
三角方程　含有未知数的三角函数的方程叫做三角方程。例如$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x+1=0$，$\sin^2x+5\sin x\cos x+6\cos^2x=0$等都是三角方程。

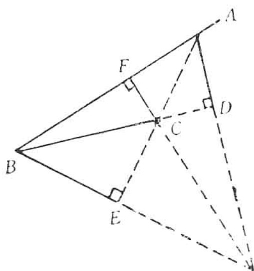
三角函数　设任意一个角α，以它的顶点为原点，以它的始边作为x轴的正半轴OX，建立直角坐标系。在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，它和原点的距离是$r=\sqrt{x^2+y^2}$（r总是正的），则比值$\frac{y}{r}$称做角α的正弦，记作$\sin\alpha=\frac{y}{r}$；比值$\frac{x}{r}$称做角α的余弦，记作$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；比值$\frac{y}{x}$称做角α的正切，记作$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}$；比值$\frac{x}{y}$称做角$\alpha$的余切，记作$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$；比值$\frac{r}{x}$称做角$\alpha$的正割，记作$\sec\alpha=\frac{r}{x}$；比值$\frac{r}{y}$称作角$\alpha$的余割，记作$\csc\alpha=\frac{r}{y}$。正弦、余弦、正切、余切、正割、余割统称三角函数。在初中代数课本中，讲述了正弦、余弦、正切、余切四个三角函数。在高中代数上册又讲述了正割、余割两个三角函数。

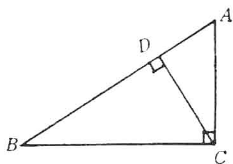
三阶行列式　见行列式。

三角形的角　三角形相邻两边组成的角。在一个三角形中大边所对的角较大。

三角形的高　三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段。三角形有三条高。三角形的三条高所在的直线相交于一点（如图）。







三角形的高的计算公式为

$$h_a = b\sin C = c\sin B$$

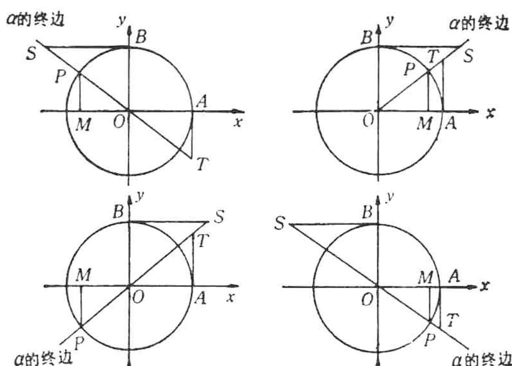
$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$\left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$。

三角函数表 用来查得已知角的三角函数值的表。《中学数学用表》中所给的三角函数表是0°～90°间每隔1′的各角所对应的三角函数值（一般是含有四个有效数字的近似值）。

三角函数线 在平面直角坐标系里，借助单位圆中某些特定的有向线段的数量来表示三角函数值，称这些有向线段为三角函数线。设任意角α的终边与单位圆相交于P点，如图所示：MP叫做角α的正弦线；OM叫做角α的余弦线；AT叫做角α的正切线；BS叫做角α的余切线；OT叫做角α的正割线；OS叫做角α的余割线。正弦线MP，正切线AT的方向与y轴的正方向相同时取正值，相反时取负值；余弦线OM，余切线BS的方向与x轴的正方向相同时取正值，相反时取负值；正割线OT，余割线OS的方向当OT，OS落在角α的终边上时取正值，落在角α的反向延长线上时取负值。



三垂线定理　在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。这是一个重要定理。

三角形的元素　三角形的三条边和三个角。

三角形的中线　连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段。三角形有三条中线，三条中线相交于一点。三角形中线的计算公式为：

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}。$$

三角形的内心　三角形内切圆的圆心。三角形的内心是各角平分线的交点。

三角形的外心　经过三角形各顶点的圆叫做三角形的外接圆，三角形外接圆的圆心叫做三角形的外心。三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点。

三角形的外角　三角形的一边与另一边的反向延长线组成的角。三角形的三个外角之和为360°。

三角形的垂心　三角形三条高的交点。锐角三角形的垂心在三角形内部；钝角三角形的垂心在三角形外部；直角三角形的垂心在直角的顶点。

三角形的重心　三角形三条中线的交点。三角形的重心与顶点的距离等于它与对边中点的距离的两倍。

三角方程的解集　满足于三角方程的未知数的值的全体组成的集合叫做三角方程的解集。

三角形的稳定性　由边边边定理可知，只要三角形三边的长度固定，这个三角形的形状、大小就完全确定，三角形的这个性质称为三角形的稳定性。它是三角形特有的性质，在生产、生活中被广泛利用。

三角函数的导数　四个基本三角函数的导数。

（1）$(\sin x)'=\cos x$。这一公式根据导数定义已经证明过。

再利用复合函数求导法则以及和、差、积、商的求导法则，可简便地推导出余弦、正切及余切函数的导数公式。

（2）$(\cos x)'=-\sin x$。

其推导过程是：

$$(\cos x)'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=-\sin x。$$

（3）$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x$。

其推导过程是：

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x。$$

（4）$(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2 x$。

其推导过程是：

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

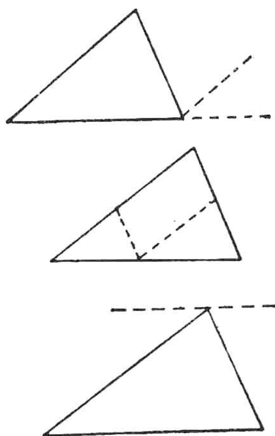
$$=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc^2 x。$$

三角形内角和定理 三角形三内角的和等于180°。此定理的证明，除了可以按上图即课本上通常用的添加辅助线的方法之外，也可用中、下图等方法添加辅助线。



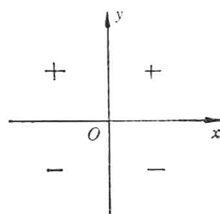
三角形的主要线段 三角形的高、三角形的中线以及三角形角的平分线合称三角形的主要线段。

三角形的角平分线 三角形一个角的平分线和这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段。三角形有三条角平分线，三条角平分线相交于一点。三角形角平分线的计算公式为 $t_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}$

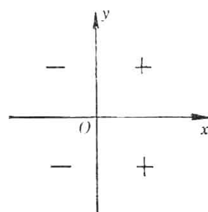
$$= \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}。$$

三角函数的余函数 一个角的正弦与余弦，正切与余切，正割与余割分别互为余函数。

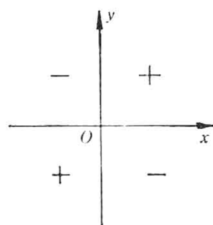
三角函数值的符号 三角函数值的符号是指角α分别在第一、二、三、四象限时，它的六个三角函数值的正、负号，具体情况如图所示。



$\sin\alpha$和$\csc\alpha$



$\cos\alpha$和$\sec\alpha$



$\mathrm{tg}\,\alpha$和$\mathrm{ctg}\,\alpha$

三面角的性质定理 三面角的任意两个面角的和大于第三个面角。

三角方程的增根、失根　在解三角方程变形的过程中，要注意未知数取值范围的扩大（可能产生增根）与缩小（可能产生失根）。如果进行了有增根可能性的变形，应进行检验，舍去增根。如果进行了有丢根可能的变形，应把变形时未知数取值范围缩小的一些数值代入原方程，其中适合原方程的就是失根，必须收回。

三垂线定理的逆定理　在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

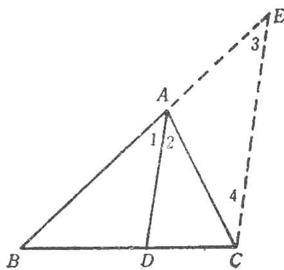
三角方程解集的等效性　由于解三角方程过程中考虑问题的思路不同，对同一个三角方程就可能有不同的解法。这样，对于同一个三角方程的解集的形式，也因在解的过程中所用的公式不同，或选取的特殊角的代表值不同而并不一致。但是如果对所用的各种解法中可能产生增根、失根的问题都已处理，那么虽然解集表现为不同的形式，但所得到的关于同一个三角方程的解集应该相等。这就是三角方程解集的等效性。

三角形角平分线的性质　包括内角平分线的性质与外角平分线的性质。三角形的内角平分线的性质是：三角形内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例；三角形外角平分线的性质是：如果三角形的外角平分线外分对边成两条线段，那么这两条线段和相邻的两边对应成比例。在引入调和分割的概念之后，可以得到以下结论：三角形同一个角的内、外角平分线，调和分割其对边，并且比值等于夹这个角两边的比。所谓调和分割是指：如果两个点C、D分别内分与外分同一线段AB，且成同一比值，即$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$，

（如 A——C——B——D ）

则称C、D调和分割线段AB。关于三角形角平分线的两个定理的逆定理亦成立。例如，三角形内角平分线性质定理的逆定理为：若一点D分$\triangle ABC$的一边BC所成的比$\frac{DB}{DC}$等于该角的对应两边之比$\frac{AB}{AC}$，则AD平分该内角。

简证如下：如图，作$CE//DA$交BA的延长线于E，则$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AE}$。又$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\therefore AE=AC$，则$\angle 3=\angle 4$。又$\because \angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，得证。本定理也可用同一法证明，即另作一条内角平分线AD'，则有$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$。又$\frac{DB}{DC}=$



$\frac{AB}{AC}$，$\therefore \frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}$，由合比定理得$\frac{BD'+D'C}{D'C}=\frac{BD+DC}{DC}$，即$\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}$，$\therefore D'C=DC$，则$D'$与$D$重合，而$AD'$为内角平分线，$\therefore AD$为内角平分线。

三面角全等的判定定理　（1）如果一个三面角的两个面角和它们所夹的二面角，与另一个三面角的两个面角和它们所夹的二面角对应相等，并且位置顺序相同，那么这两个三面角全等；（2）如果一个三面角的两个二面角和它们所夹的面角，与另一个三面角的两个二面角和它们所夹的面角对应相等，并且位置顺序相同，那么这两个三面角全等；（3）如果一个三面角的三个面角与另一个三面角的三个面角对应相等，且位置顺序相同，那么这两个三面角全等。

三倍角的正弦、余弦公式　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$；$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$。

三角函数的和差化积公式　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$；

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}。$$

三角函数的定义域和值域　当三角函数的自变量是用弧度制来度量角所得到的实数x时，三角函数的定义域和值域如下表：

三角函数	定　　义　　域	值　　域
$y=\sin x$	$\{x\mid x\in R\}$	$\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$
$y=\cos x$	$\{x\mid x\in R\}$	$\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$
$y=\mathrm{tg}\,x$	$\{x\mid x\in R,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$	$\{y\mid y\in R\}$
$y=\mathrm{ctg}\,x$	$\{x\mid x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z\}$	$\{y\mid y\in R\}$
$y=\sec x$	$\{x\mid x\in R,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$	$\{y\mid y\geqslant 1$ 或 $y\leqslant -1\}$
$y=\csc x$	$\{x\mid x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z\}$	$\{y\mid y\geqslant 1$ 或 $y\leqslant -1\}$

三角函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]。$$

三元线性方程组的解的讨论　三元线性方程组为

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3。\end{cases}\quad 令\quad D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix},$$

$$D_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix},\qquad D_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix},$$

$$D_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}。$$（1）当$D\neq0$时，有唯一解：$x=\frac{D_x}{D}$，

$y=\frac{D_y}{D}$，　$z=\frac{D_z}{D}$；（2）当$D=0$，但D_x，D_y，D_z不全为零时，无解；（3）当$D=D_x=D_y=D_z=0$时，方程组有无穷多组解或无解。

三角形的外角平分线的性质　见三角形角平分线的性质。

三个平面两两相交的交线的性质　（1）三个平面两两相交得到三条直线，如果其中有两条相交于一点，那么第三条也经过这点；（2）三个平面两个相交得到三条直线，如果其中有两条平行，那么第三条也和它们平行。

三元齐次线性方程组的解的讨论　设三元齐次线性方程组为

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0.\end{cases}$$

（1）当系数行列式$D\neq0$时，有唯一解——零解；（2）当$D=0$时，除零解外还有无穷多非零解。

三角形中的角所满足的常用三角恒等式　若A、B、C为$\triangle ABC$的三个内角，则有

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C;$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C;$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C;$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C;$$

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C\ (A、B、C\text{均不为}\frac{\pi}{2});$$

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1\ (\frac{A}{2}、\frac{B}{2}、\frac{C}{2}\text{均不为}\frac{\pi}{2}).$$

工程问题 与工程有关的一类分数应用题。与整数工作问题类似，都是反映工作总量、工作效率和工作时间三者关系的。工程问题所不同的是常把工作总量看作整体“1”，工作效率常用几分之几表示，而不给出具体的数量。

大于号 表示左边的数量大于右边的数量的符号。记作“>”，读作“大于”。例如，$5>3$，$2x>3x$等。

与α角终边相同的角 所有与α角终边相同的角，连同α角在内，可以用式子$k\cdot360°+\alpha$，$k\in Z$来表示，则集合$p=\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in Z\}$叫做与$\alpha$角终边相同的角的集合。如与60°角终边相同的角的集合为$p=\{\beta|\beta=k\cdot360°+60°,k\in Z\}$。

万能公式 用$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$来表示$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$的公式称为万能公式。它是
$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}。$$

小数 按十进制位置原则，把十进分数改写成的不带分母形式的数。例如，$\frac{9}{10}=0.9$，$\frac{17}{100}=\frac{10}{100}+\frac{7}{100}=\frac{1}{10}+\frac{7}{100}=0.17$，$\frac{3127}{1000}=\frac{3000}{1000}+\frac{100}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{7}{1000}=3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{7}{1000}=3.127$等。小数中的圆点叫小数点。

小于号 表示左边的数量小于右边的数量的符号。记作“<”，读作“小于”。例如，$3<5$，$x^2+x<2x+1$等。

小数比　比的前项和后项都是小数，或其中一项为小数，另一项为整数的比。

小数点　见小数。

小数的性质　①在小数的末尾添上或去掉几个零，小数的大小不变；②把小数点向右(或向左)移动n位，小数就扩大（或缩小）10^n倍。例如，5.278的小数点向右移动两位，得到527.8，527.8比5.278扩大10^2倍。反之，将5.278的小数点向左移动两位，得0.05278，0.05278比5.278缩小10^2倍。

小数的读法　①按分数的读法读。整数部分按整数读法，小数部分按分数读法。例如，35.23，读作三十五又百分之二十三；0.0125，读作万分之一百二十五。②整数部分按整数读法，小数点读作“点”，并顺次读出小数部分每位数位上的数字。例如，35.23，读作三十五点二三；0.0125，读作零点零一二五。

小数化百分数　先把小数点向右移动两位（位数不够时可补0），再在后面加上百分号“%”。例如，0.38 = 38%，0.7 = 70%，0.875 = 87.5%，5.135 = 513.5%。

小数大小的比较　先比较整数部分，整数部分大的那个小数较大，反之，较小；整数部分相同的，先看十分位，十分位上的数大的那个小数大；十分位上的数也相同时，则看百分位上的数，依次类推。

小数的小数部分　小数中小数点右边的部分。

小数的加法法则　几个小数相加，先把几个加数的小数点和相同数位的数对齐，上下排列起来，然后按整数加法法则计算，并在所得结果里对着加数的小数点的位置记上小数点。

小数的除法法则　①小数除以整数，先按整数除法法则计算，然后使商的小数点与被除数的小数点对齐；②小数除以小数，先把除数的小数点去掉，使它变为整数，并把被除数的小数点向右移动与除数小数位数相同的位数，然后按小数除以整数的法则计算。

小数的乘法法则　先按整数乘法法则计算，然后记上小数点，使积的小数部分的位数等于被乘数和乘数里小数位数之和。

小数的减法法则　两个小数相减，先把被减数与减数的小数点和相同数位上的数字对齐，上下排列起来，然后按整数的减法法则相减，并在所得结果里对着被减数和减数小数点的位置记上小数点。

小数的整数部分　小数中小数点左边的部分。

小数的数位名称及其计数单位　如下表所示：

	整数部分						小数点	小数部分				
数位名称	…	万位	千位	百位	十位	个位	·	十分位	百分位	千分位	万分位	…
计数单位	…	万	千	百	十	一		十分之一	百分之一	千分之一	万分之一	…

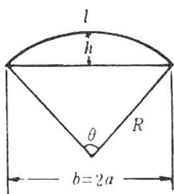
千分数　表示一个数是另一个数的千分之几的数，用符号“‰”来表示。例如，千分之三可表示为3‰。

个体　是统计学中的一个名词，是指总体中每一个考察对象。

弓形　一条圆弧和连结这条弧的端点弦所组成的图形。圆心角为θ°或α弧度的弓形的有关计算公式如下：弦长

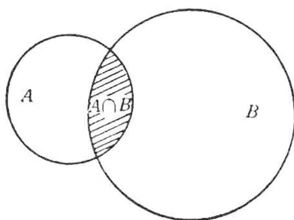
$b=2a=2R\sin\frac{\theta}{2}$；$R=\frac{a^2+h^2}{2h}$，$\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}=\frac{h}{a}$；拱高$h=2R\sin^2\frac{\theta}{4}=a\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}$；面积

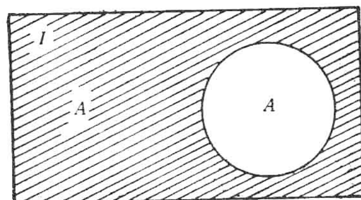
$S=\frac{\pi\theta}{360}R^2-a\sqrt{R^2-a^2}=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)=\frac{R(l-b)+bh}{2}\approx\frac{2}{3}bh$（$\theta$越小，误差也越小）。



子集　对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读作A包含于B或B包含A。当A不是B的子集时，记作$A\not\subseteq B$或$B\not\supseteq A$，读作A不包含于B或B不包含A。任何一个集合是它本身的子集，即$A\subseteq A$。

韦恩图　用一条封闭曲线把所给元素圈起来，表示一个集合的图。它可以借助图形的直观性醒目地说明集合中的一些问题。例如，$A\cap B$，$\overline{A}$可表示为下图。





韦达定理　表达代数方程根与系数关系的定理。由于这一关系最先由法国数学家韦达(Viète，1540—1603年)于1615年发表的《方程的认识和修正》一文中首先提出了一个不完整的根与系数关系的定理，所以关于表达方程根与系数关系的定理称为韦达定理。其实，人们对方程根与系数关系的认识经历了一段较长的历史。公元820年左右，中亚地区数学家阿尔·花拉子模就注意到了二元二次方程组$\begin{cases}x+y=p\\xy=q\end{cases}$，与一元二次方程$x^2-px+q=0$之间的关系，这实际上已经接触到了方程根与系数的关系，但他没有把到手的结论提出来。第一个注意到方程根与系数关系的是意大利数学家卡尔丹（Cardano，1501—1576年），他在解三次方程x^3+10x

$=6x^2$时，得到三个根2、$2+\sqrt{2}$、$2-\sqrt{2}$，经观察，他注意到了三根之和正好等于x^3项的系数。后来，他又在其它例子中观察到这个规律。但由于他坚持把方程各项的系数全都取正数，阻碍了他的进展。1615年韦达指出：方程$x^3-(u+v+w)x^2+(uv+vw+wu)x-uvw=0$有三个根$u$、$v$、$w$。由于$u$、$v$、$w$可以取任意数，因此韦达提出的关系是存在的。由于韦达只承认方程的正根，所以，他所揭示的关系缺乏完整性。1629年荷兰数学家基拉德（Girad，1595—1632年）在《代数新发现》中提出了n次方程有n个根，并阐述了用方程的系数表示方程的根之和、之积的办法。由于当时对n次方程是否一定有n个根、虚根成对出现、高次方程可分解为一次或二次不可约二次方程乘积等问题没有解决，基拉德不可能完整的表达和彻底地证明韦达定理。1637年笛卡尔得出：a是$f(x)=0$的根的充要条件是$(x-a)$是$f(x)$的因式。德国数学家高斯（C.F.Gauss，1777—1855年）于1799年在他的博士论文中对代数基本定理作出了有高度创造性的论证。根据以上两个定理，假设a_1、a_2、…、a_n是n次方程$f(x)=0$的n个根，则一定有$f(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$。将等式右边展开，并与$f(x)$比较$x$的同次幂的系数，便可直接得出韦达定理的彻底证明。

开方　求方根的运算。

开区间　满足$a<x<b$的实数x的集合。表示为$(a,\ b)$。

无理式　含有字母开方运算的代数式。例如，$\sqrt{x}$，$\frac{1}{\sqrt{y}}$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$都是无理式。

无理数　无限不循环小数。公元五世纪，古希腊数学家毕达哥拉斯(Pithagoras)的一个学生依帕索，(Hippasus)，在研究单位正方形的对角线的度量时发现，对角线的长度不能用整数，也不能用分数表示。毕氏学派主张“万物皆数”，即万物皆可用整数或整数之比表示。依帕索的发现摧垮了他们的信念，引起了他们的惊恐不安。为了维护他们的信念，驱走这个异端，他们把依帕索投进了大海。依帕索虽死了，但问题并没有解决。他们对$\sqrt{2}$进行了深入研究，结果导致了$\sqrt{2}$与1不可公度的证明，即$\sqrt{2}$不能用整数之比来表示。中国古代很早接触了无理数问题，但对这种数的性质没有深入研究，而是致力于它的近似值的计算。公元三世纪，刘徽采用$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}$和$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$两种方法求不尽根。他以后的一些数学家也大都采用这两种方法，使所求得的值愈益精确。印度人在对无理数进行运算时，是把它当作有理数对待的。例如，$\sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{(c+d)+2\sqrt{cd}}$，因为$a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}$，实际上把$\sqrt{c}$和$\sqrt{d}$当作有理数看待了。最早接受无理数的，是英国代数学者哈里奥特（Thomas Harriot，1560—1621年），他认为只要能参与运算就是数，不管它是否能用十进小数确定

下来。意大利数学家邦别利（Rafael Bombelli，1526—1572年）首先给出了$\sqrt{2}$的连分数表示：

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots\cdots}}}}}$$

后来，英国人布朗克又给出了关于π的连分数。数学家欧拉给出了用连分数计算平方根的一般方法。欧拉还给出了e和e^2是无理数的最初证明。兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728—1777年）又借助于连分数证明π是无理数，同时给出了e^2、$\mathrm{tg}x$、$\mathrm{arctg}x$一般是无理数的证明。无理数逻辑结构的真正解决是十九世纪。1886年施图尔兹（Otto Stolz，1842—1905年）得出每一个无理数都可以表达成不循环小数的结论。这就是我们现在所说的无理数的定义。十九世纪后期的数学家们，把注意力集中到建立无理数理论的目标上。德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897年）于1872年在他发表的《算术基本原理》一书提出了用递增有界数列来定义无理数。德国数学家康托尔（Georg Canter，1845—1918年）在《数学纪事》杂志首次发表无理数理论，他利用了一个基本序列概念，证明了任意一个实数b都被一个由有理数构成的序列所确定。德国数学家戴德金（Dedekind，1831—1916年）则引入一个“分割”的概念，他证明了对应于一个“分割”，必存在唯一的一个有理数或无理数的结论。他们的理论，虽然形式上是完全不同的，但就体的同构看却是完全一样的。

无穷数列 项数无限的数列。

无限小数 小数部分的位数无限的小数。

无限集合 含有无限个元素的集合叫做无限集合。例如，{有理数}，$\{(x,y)\mid 2x+3y=5\}$都是无限集合。

无界数列 一个数列，如果不存在某一个正数能使每一项的绝对值都小于它，这样的数列叫做无界数列。

无理方程 根号下含有未知数的方程。例如，$x-\sqrt{x-1}=3$。

无心二次曲线 没有中心或有无限多中心的二次曲线称为无心二次曲线。如抛物线等。

无限不循环小数 无限的且不循环的小数。例如，3.1415926……，0.182437……等。

无穷递缩等比数列 公比的绝对值小于1的无穷等比数列。

无穷递缩等比数列各项的和 无穷递缩等比数列前n项的和是当n无限增大时的极限。如果无穷递缩等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则它各项的和为

$$S=\frac{a_1}{1-q}。$$

无穷数列和无穷数列的各项和 无穷数列是指当数列的项数是无限多时的

数列，记为a_1，a_2，a_3，…，a_n，…。无穷数列的各项和是在它的前 n 项和的基础上进行研究的。因为：$S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3$，……，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，$S_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}$，……。所以，无穷数列的前$n$项和$S_n$，构成了一个新的数列$\{S_n\}$，即$S_1$，$S_2$，$S_3$，…，$S_n$，$S_{n+1}$，…。如果当$n\to\infty$时，数列$\{S_n\}$有极限$S$，那么$S$就是无穷数列$\{a_n\}$的各项和，即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots。$$

由此可知求无穷数列各项和的步骤是：（1）求出前n项和S_n；（2）对S_n取$n\to\infty$时的极限，若极限存在，则称这个无穷数列的各项和存在；若极限不存在，则称这个无穷数列的各项和不存在。例如，因为等比数列$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…，$\frac{1}{3^n}$，…的前n项和为

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$，所以这个数列的各项和为$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{2}$；又等比数列1，$2^1$，$2^2$，…，$2^n$，…的各项和就不存在。这是因为$S_n=2^n-1$，$S=\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$，即$n\to\infty$时，$S_n\to\infty$。因此，一般地，对于无穷等比数列，当公比$|q|<1$时，数列的各项和存在，并且各项和$S=\frac{a_1}{1-q}$，这种数列叫做无穷递缩等比数列；当无穷等比数列的公比$|q|\geqslant 1$时，数列的各项和不存在。

不名数 没有带计量单位名称的数。

不等号 表示两个量不等关系的符号。记作“$\neq$”，读作“不等于”。例如，$3+5\neq 3\times 5$，$x^3\neq 3x+1$。

不等式 表示不相等关系的式子。不等式又分条件不等式和绝对不等式两种。例如，$x^2+2\leqslant 3x$，是条件不等式（因为它只当$1\leqslant x\leqslant 2$时才成立）；又如$x^2+1>-1$是绝对不等式（因为它对任何实数x都成立）。在中学课本里，不等式是分散安排的。在有理数大小比较中介绍了不等式的记号；一次方程后学习不等式的基本性质和一次不等式；结合二次函数的学习介绍了一次不等式组和一元二次不等式；在高中阶段集中介绍不等式的证明。不等式的应用等。

不大于号 表示左边的数量不大于右边的数量的符号，也就是表示左边的数量小于或等于右边的数量的符号。记作“$\leqslant$”，读作“小于或等于”。例如，$x\leqslant 3$，表示x的值小于或等于3，而不能大于3。不大于号有时也表示为“$\ngtr$”，读作“不大于”。例如$x\leqslant 3$也可记作$x\ngtr 3$。

不小于号 表示左边的数量不小于右边的数量的符号，也就是表示左边的数量大于或等于右边的数量的符号。记作“$\geqslant$”，读作“大于或等于”。

例如，$y\geqslant 3$，表示y的值大于或等于3，而不能小于3。不小于号有时也表示为“$\nless$”，读作“不小于”。例如，$y\geqslant 3$可表示为$y\nless 3$。

不定方程 含有两个或两个以上未知量的一个方程。它一般具有无限个解。例如$x+y=5$，特别对于整系数的不定方程要求解是整数时，称这种方程为“刁番都方程”（刁番都（Diophantos）古希腊数学家）。

不定积分 设$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，我们把函数$f(x)$的所有的原函数（即$F(x)+C$，其中C为任意常数）叫做函数$f(x)$的不定积分，记作$\int f(x)dx$，即$\int f(x)dx=F(x)+C$。其中“$\int$”叫做积分号，$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，C叫做积分常数，$f(x)dx$叫做被积式。应当注意，不定积分所表示的不是一个函数，而是一族函数（亦称函数族），所以在求函数$f(x)$的不定积分时，千万不要忘记常数C。如函数$f(x)=\cos x$的不定积分是：

$$\int f(x)dx=\int \cos x dx$$
$$=\sin x+C。$$

求已知函数的原函数的过程叫做对这函数进行积分或求积分，通常求函数$f(x)$的不定积分可以简称为“积分$f(x)$”。从不定积分的定义可以知道，“求不定积分”与“求导数”互为逆运算，即有$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$，$\int F'(x)dx=F(x)+C$。这些性质表明：如果对函数$f(x)$先求不定积分后求导数，那么两者的作用相互抵消，结果仍为$f(x)$。如果对函数$F(x)$先求导数后求不定积分，那么作用相互抵消后结果与$F(x)$只差一个任意常数，由此可知，求导数与求不定积分互为逆运算。

不足近似值 小于准确数的近似数。例如，3.14是π的精确到0.01的不足近似值。

不可约多项式 是相对于数集而言的。在有理数集内，如果次数大于零的有理系数的多项式，不能分解为两个次数大于零的有理系数的多项式的乘积时，那么这个多项式在有理数集内叫做不可约多项式。在实数集内和复数集内，对实系数和复系数的不可约多项式也有相应的定义。在实数集内，不可约多项式是一次或某些二次多项式。在复数集内不可约多项式是一次多项式。例如，多项式x^2-2在有理数集是不可约的，而在实数集内是可约的，即$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$。又例如，多项式$x^2+1$在实数集内是不可约的，而在复数集是可约的，即$x^2+1=(x+i)(x-i)$。

不等边三角形 三边两两不等的三角形（见等腰三角形）。不等边三角形的三个内角中，最大边对的角最大，最小边对的角最小。

不等式的解集 含有未知数的不等式的所有解。

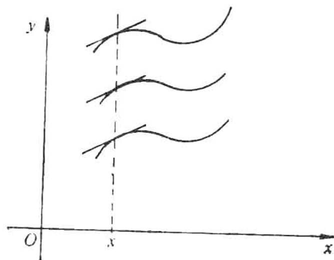
不等式同解原理 （1）不等式的两

边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得的不等式与原不等式是同解不等式；（2）不等式的两边都乘以（或都除以）同一个正数，所得的不等式与原不等式是同解不等式；（3）不等式的两边都乘以（或都除以）同一个负数，并且把不等式改变方向后，所得的不等式与原不等式是同解不等式。

不等式组的解集　不等式组中所有不等式的解集的公共部分（即交集）。

不等式的基本性质　（1）不等式的两边都加上（或都减去）同一个数，不等号的方向不变；（2）不等式的两边都乘以（或都除以）同一个正数，不等号的方向不变；（3）不等式的两边都乘以（或都除以）同一个负数，不等号的方向改变。

不定积分的几何意义　若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分为 $F(x)+C$，C 每确定一个值 C_0，就相应地确定出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)+C_0$，在几何意义上就确定一条曲线 $y=F(x)+C_0$，这条曲线叫做函数 $f(x)$ 的一条积分曲线（如图）。由于 C 可取任意值，所以原函数是有无穷多个的，积分曲线也就相应地有无穷多条，它们构成了积分曲线族，当 $f(x)$ 的积分曲线族中的任意两条曲线，对应同一横坐标 x 的点的纵坐标 y 的差是一个常数，不论 C 取什么值，都有 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$，所以积分曲线族中每一条曲线上对应点的切线互相平行。



不定积分的运算法则　根据导数的运算法则，可以得到不定积分的两个运算法则。

法则1　被积式的常数因子可以提到积分号前面，即如果 k 为不等于零的常数，那么

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。这个法则的证明过程是：由于 $\left(k\int f(x)dx\right)'=k[f(x)dx]'=kf(x)$，即 $k\int f(x)dx$ 是 $kf(x)$ 的原函数，由此得到 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

法则2　两个函数的和（或差）的不定积分等于这两个函数的不定积分的和（或差），即

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx$$

$$=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$ 这个法则的证明过程是：由于

$$\left(\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right)'$$

$$=\left(\int f(x)dx\right)'\pm\left(\int g(x)dx\right)'$$

$=f(x)\pm g(x)$，即

$\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ 是 $f(x)\pm g(x)$ 的原函数，由此得到

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx。$$

这个法则可以推广：有限个函数的和（或差）的不定积分等于各个函数的不定积分的和（或差），即

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int f_n(x)dx。$$

例如，求 $\int\left(\frac{1}{x}-\cos x\right)dx$，其求解过程是：

$$\int\left(\frac{1}{x}-\cos x\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\cos x dx=\ln|x|-\sin x+C。$$

注意在各项积分后，每个不定积分的结果都含有任意常数。但因任意常数的和仍然是任意常数，所以只要写一个任意常数就可以了。

不尽相异元素的全排列 有 n 个元素，如果其中有 m_1 个元素相同，又有 m_2 个元素相同，…，又有 m_k 个元素相同 $(m_1+m_2+\cdots+m_k\leqslant n)$，这 n 个元素全部取出来的排列叫做不尽相异元素的全排列。例如，在三个数字中，有两个 4，一个 5 可以组成多少个三位数，就是不尽相异元素的全排列问题。

区间 闭区间和开区间统称为区间，当不考虑区间的端点的性质时，常常用开区间的记法表示区间 (a, b)，这里 a、$b\in R$，且 $a<b$。

车比雪夫不等式 设 $a_i>0$，$b_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i。$$

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，而 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i。$$

比 两个数相除。例如，$a\div b$ 又叫做 a 比 b，记作 $a:b$。“:”称为比号；比号前面的数 a 称为“比的前项”，比号后面的数 b 称为“比的后项”。比的后项不能为零。比是从两个数的关系考虑的，除法是一种运算，分数是一种数，三者既有联系，又有区别。例如，“3:5”不是除法，可以看作“3

÷5”；“3:5”不是分数，可以写作$\frac{3}{5}$。因此，只能说比的前项相当于被除数、分子；比的后项相当于除数、分母；比号相当于除号、分数线。建立这种联系的目的在于将有关比的运算转化为除法运算和分数运算进行，而不必再重新建立比的运算法则。

比号　见比。

比例　见比例式。

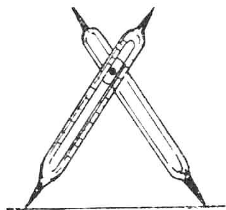
比值　比的前项除以后项所得的商。相当于除法中的商，分数中分数值，即 $a:b=\frac{a}{b}=k$，k是比值。比值也叫比率。

比率　见比值。

比例尺　有两种含义：①绘图时用来按一定比例度量长度的一种工具。常见的有三棱比例尺。②图上距离与实际距离的比，叫做这张图的比例尺。

比例号　表示两个量成比例的符号。若量A与量B成正比例，记作$A\propto B$；若量A与量B成反比例，记作$A\propto\frac{1}{B}$。在小学数学里这个符号很少用。

比例规　根据相似三角形原理所制做的一种等分线段、按一定比例放大或缩小线段的工具。



比例式　表示两个比$a:b$，$c:d$相等的式子。比例式简称比例。写作：$a:b=c:d$或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，读作：a对b的比等于c对d的比。

比例项　组成比例$a:b=c:d$的四个数a、b、c、d。其中a、d叫做比例的外项；b、c叫做比例的内项。

比较量　与标准量作比较的量。例如，求乙数量是甲数量的几分之几？则甲数量是标准量，乙数量是比较量。

比例中项　若比例中的两个内项相等，则每个内项都叫做两个外项的比例中项。例如，若$a:b=b:c$，则b是a、c的比例中项。

比例内项　见比例项。

比例外项　见比例项。

比例系数　见两个量成正比例的充要条件。

比例线段　两条线段长度的比叫做两条线段的比，在四条线段a、b、c、d中，如果a和b的比等于c和d的比，那么，称a、b、c、d为比例线段，或简称a、b、c、d为比例线段。

比的化简　把一个比化成最简化的过程。其主要根据是比的基本性质。其主要方法有：①用比的前项和后项的最大公约数去除比的前项和后项。②若比的一项是小数，可先把比的前项和后项分别乘以10^n，化为整数，再把整数比化简。③若比是分数比，则用分母的最小公倍数分别乘以比的前项和后项，化为整数比，再将整数比化简。

比的后项　见比。

比的性质　①比的前项可以是任何数，比的后项可以是零以外的任何

数。②若$a=b$，则$a:b=\frac{a}{b}=1$。③若$a<b$，则$a:b=\frac{a}{b}<1$；若$a>b$，则$a:b=\frac{a}{b}>1$。④比的前项等于比的后项乘以比值，即若$a:b=k$，则$a=bk$。⑤比的后项等于比的前项除以比值，即若$a:b=k$，则$b=a\div k$。⑥比的前项和后项都扩大或缩小相同的倍数，比值不变，即若$a:b=k$，则$am:bm=k$（$m\neq 0$）或$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=k$（$m\neq 0$）。这一性质被称为比的基本性质。⑦若比的前项扩大（或缩小）若干倍，比的后项不变，则比值也扩大（或缩小）相同的倍数，即若$a:b=k$，则$(am):b=km$或$(a\div m):b=k\div m$。⑧若比的后项扩大（或缩小）若干倍，比的前项不变，则比值反而缩小（或扩大）相同的倍数，即若$a:b=k$，则$a:(bm)=k\div m$或$a:(b\div m)=km$。

比的前项　见比。

比例的性质　比例有如下性质：①比例的基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$；②合比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$；③等比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$。现行初中几何教材关于比例的性质的表述，与传统教材的处理方法不同，一是把反比定理与更比定理做为比例的基本性质的简单应用，视为比例的一种变形，不做为一项性质单独提出；二是把合比定理与分比定理合一，做为合比性质一并提出；三是合分比定理亦未单独提出。

比例分配问题　把一个量（数）按已知的比分成若干部分的应用题。有按正比例分配问题和按反比例分配问题两种。

比的基本性质　见比的性质。

比例的基本性质　当a、b、c、d均不为零时，若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$ad=bc$；反之，若$ad=bc$，则$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$。

互质数　公约数只有1的两个自然数。例如，8与9是互质数。

互为余角　两个角的和等于直角时，称做这两个角互为余角，简称两角互余。两角互余时，可以说其中一个角是另一个角的余角。$\angle 1$与$\angle 2$互为余角可以用下列形式之一表示：$\angle 1+\angle 2=90°$；$\angle 1+\angle 2=\mathrm{Rt}\angle$；$\angle 1=90°-\angle 2$；$\angle 2=90°-\angle 1$；$\angle 1$与$\angle 2$互余；$\angle 1$是$\angle 2$的余角；$\angle 2$是$\angle 1$的余角等。同角的余角相等。

互为补角　两个角的和等于平角时，称这两个角互为补角，简称两角互补。两角互补时，可以说其中一个角是另一个角的补角。$\angle 1$与$\angle 2$互为补角可以用下列形式之一表示：$\angle 1$

与$\angle 2$互补；$\angle 1+\angle 2=180°$；$\angle 1=180°-\angle 2$；$\angle 2=180°-\angle 1$；$\angle 1$是$\angle 2$的补角；$\angle 2$是$\angle 1$的补角等。同角的补角相等。

互为倒数　若两数的乘积等于1，则称这两数互为倒数。例如，$\frac{3}{5}$与$\frac{5}{3}$互为倒数；7与$\frac{1}{7}$互为倒数；不为零的数a与$\frac{1}{a}$互为倒数。一般地，若$a\cdot b=1$（$a\neq 0$，$b\neq 0$），则a与b互为倒数。

互不相容和互不相容的事件组　指根据基本事件的重要性质：在一次试验中只能发生基本事件中的一个，换句话说，任何两个或两个以上的基本事件，不可能在一次试验中同时发生，一般地说，如果事件A和事件B不能在一次试验中同时发生，则称事件A和事件B是互不相容的。如果一组事件中的任何两个事件都是互不相容的，则称这些事件构成一个互不相容的事件组。既然任意两个基本事件总是互不相容的，因此，随机现象的所有基本事件，构成一个互不相容的事件组。

互不相容事件，在中学使用的通用教材中称为互斥事件。

互为反函数的函数图象间的关系　函数$y=f(x)$的图象和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称。例如，指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）互为反函数，因此它们的图象关于直线$y=x$对称。

互不相容事件有一个发生的概率计算　概率加法公式。这个公式是对于合成事件的概率计算的一个重要公式。即

如果事件A与事件B互不相容（互斥），那么$P(A+B)=P(A)+P(B)$。

这就是说，如果事件A、B互不相容，那么事件A、B发生（即A、B中有一个发生）的概率，等于事件A、B分别发生概率的和。

一般地，如果事件A_1，A_2，…，A_n彼此互不相容（互斥），那么事件$A_1+A_2+\cdots+A_n$发生（即A_1，A_2，…，A_n中有一个发生）的概率，等于这n个事件分别发生概率的和，即

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$。

切线　直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，该直线叫做圆的切线。一般地，设P是曲线上的一点，过P引割线PQ，交曲线于另一点Q，当Q沿着曲线无限接近于P点时，直线PQ的极限位置PT，叫做这条曲线过P点的切线。圆的切线垂直于过切点的半径；经过半径的外端与其垂直的直线是圆的切线。对于任意的二次曲线，如果已知切点为$P(x_0, y_0)$，则：①抛物线$y^2=2px$在P点的切线为$y_0y=P(x+x_0)$；②椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在$P$点的切线为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；③双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在$P$

点的切线为$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$。如果已知二次曲线的斜率为$k$，将$y=kx+b$代入二次曲线的方程后，由方程有二重根，可求得$b$的值。

切线长定理　从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。

切割线定理　从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。由此可得出以下推论，即割线定理：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到两条割线与圆的交点的两条线段长的积相等。

中位线　连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半；连结梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线。梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半。

中位数　位于依一定顺序排列的一组数据中央位置的数值。在这一数值的上、下各有一半频数分布着。

中心对称　平面上两个点绕某定点旋转180°后，互换位置，即其中一个点与另一点原来的位置重合，则称这两个点关于该定点成中心对称，该定点称为这两点的对称中心。平面上两个图形，将其中一个绕一定点旋转180°后，它和另一个图形重合，则称这两个图形关于该定点成中心对称，该定点称为这两个图形的对称中心。一个平面图形，绕某定点旋转180°后，能够和原图形自身重合，则称这个图形为中心对称图形。关于中心对称的图形，对称点连线都经过对称中心，并且被对称中心平分，对应线段平行（或在同一直线上）且相等。在空间，一般地，设两点M、M'以O为中心，则称M、M'对称于O，称O为对称中心。当点M在图形F上变动时，M的对称点M'形成图形F'，则称两个图形F、F'关于O成中心对称。对于平面图形，此定义与上述第一种定义一致，对于空间图形，显然因图形改变了转向，F与F'相等但不全等。

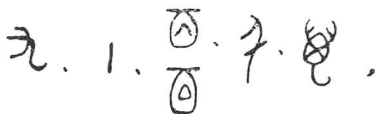
中心投影　用一组光线将物体的形状投射到一个面上去，在该面上得到的图形，称为这个物体在该面上的投影。这个面叫做投影面（通常是平面），光线叫做投射线。投射线从一点发出得到的投影叫做中心投影。中心投影的投射线一般不垂直于投影面。

中间问题　为了使复合应用题得到最后解答，必须要首先解决过渡性问题。

中国数字　我国习用的数字。小写数字是：〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万；大写数字是：零、壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟、万。大约在三千四百年前，我国殷朝（又叫做商朝）遗留下来的甲骨文中，包括一些数码的记载，它们是：

一、二、三、亖、

ㄨ、∧、十、)(、



它们的意义分别是：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、100、1000、10000。

中心对称图形　如果一个平面图形绕某定点旋转180°后，能够和原图形本身重合，那么这个图形叫做中心对称图形。一般地，如果一个平面图形绕某定点O，每旋转一个最小角$\frac{360°}{n}$（n是不小于2的正整数），该图形就出现一次完全全重状态，则称该定点O为该图形的n次对称中心，该图形称为n次中心对称图形。

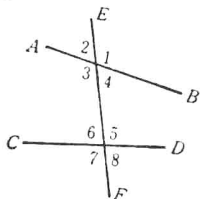
贝努利不等式　设$a>1$，自然数$n>1$，则

$$a^n>1+n(a-1)。$$

特别令$a=b^{\frac{1}{n}}$（$b>1$），则

$$b^{\frac{1}{n}}-1<\frac{b-1}{n}。$$

内错角　两条直线（AB、CD）被第三条直线（EF）所截，在所构成的没有公共顶点的各角中，在这两条直线之间，并且位置交错（即分别在第三条直线EF的两侧）的一对角。如图中的∠3和∠5，∠4和∠6等都是内错角。



长度　用长度单位对物体的长短进行度量所得的量数（即度量的结果）。例如，线段的长度，就是用长度单位度量这条线段所得的量数。在中学数学课本中只指出“线段的长度”是一个正数，没有给出“长度”的严格定义。“线段的长度”和“线段”是不同的。“线段”是图形，“线段的长度”是两点间的距离，是一个正数。对于曲线段来说，它的长度是指这条曲线段内接的折线的长度，当划分弧的最大直径趋向于零时的极限值。

长方体　底面是矩形的直平行六面体。

长除法　相对于短除法而言，不仅写被除数、除数和商，而且也写计算过程的竖式除法。例如

```
     1 8
   ______
2 ) 3 6
    2
   ____
    1 6
    1 6
   ____
      0
```

长度单位　度量物体长度的标准。公制长度单位中，常用的有：公里（代号km）、米（代号m）、分米（代号dm）、厘米（代号cm）、毫米（代号mm）、微米（代号μm）。它们之间的进率分别是：1000m＝1km，10dm＝1m，10cm＝1dm，10mm＝1cm，常用的市制单位有：里、引、丈、尺、寸、分等，它们之间的进率分别为：150丈＝1里，10丈＝1引，10尺＝1丈，10寸＝1尺，10分＝1寸。英里、英尺、英寸、码是常见的英制长度单位，它们之间的进率

分别是：5280英尺 = 1英里，12英寸 = 1英尺，3英尺 = 1码。英里、英尺、英寸在旧书中常分别写作：哩、呎、吋。海里、链是海上计量长度的单位，10链 = 1海里。旧书中海里记作"浬"。海里原指地球子午线上纬度一分的长度。由于地略呈椭球状，所以在不同的纬度处其一分的长度略有差异。1929年国际水文地理学会议通过决议，用纬度一分的平均值1,852米作为一海里。1948年国际海上人命安全会议承认1,852米或6,080英尺（约合1,853米）为一海里。光年是计量天体距离一种单位。它把光在一年中所走过的距离94,605亿公里为一个单位。埃是一种计量微小长度的单位。1埃 = 10^{-10}米。因纪念瑞典光谱学家埃斯特朗(Anders Jonas Ångström，1814—1874)而得名。

长方体的三度 长方体的长、宽、高。

长方体对角线的性质 长方体的任意一条对角线的平方等于它的三度的平方和。

化分数为有限小数的方法 ①分数的分子、分母同乘以2或5的幂，使分母变为10的幂，然后再改写成有限小数。例如，$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times 5}=\frac{7\times 5^2}{2^3\times 5^3}=\frac{175}{10^3}=0.175$。②用分母去除分子，求得这个商的小数形式。例如，$\frac{7}{8}=0.875$。

化有限小数为分数的方法 把所给有限小数先化为分母是10的幂的分数，然后再化为既约分数。例如，$0.125=\frac{125}{10^3}=\frac{1}{8}$；$5.08=5\frac{8}{100}=5\frac{2}{25}$。

化纯循环小数为分数的方法 分数的分子为一个循环节的数字所组成的数，分母是数字9所组成的数，9的个数等于循环周期数。例如，$0.\dot{7}=\frac{7}{9}$；$4.\dot{3}1\dot{7}=4\frac{317}{999}$。

化混循环小数为分数的方法 分数的分子为小数点右边第一个数到第一个循环节末位的数字所组成的数，减去不循环数字所组成的数，分母是由数字9后面带数字0所组成的数，其中9的个数等于循环周期数，0的个数等于不循环部分的位数。例如，$0.8\dot{3}=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$；$6.31\dot{4}\dot{5}=6\frac{3145-31}{9900}=6\frac{3114}{9900}=6\frac{173}{550}$。

反比 若$a:b$对$b:a$来说是正比，则$b:a$对$a:b$来说就是反比。事实上，$a:b$与$b:a$互为反比。前项是零的比没有反比。

反比例 见反比例函数。

反函数 如果确定函数$y=f(x)$的映射$f: A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B的一一映射，那么这个映射的逆映射$f^{-1}: B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数。函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是其反函数$x=f^{-1}(y)$的值域、定义域。在函数$x=f^{-1}(y)$中，y表示自变量，x表示函数。但由于习惯上用x表示自变量用y表示函数，所以常常对调函数$x=f^{-1}(y)$中的字母x、y，把它改写成$y=f^{-1}(x)$的形式。一般情况

下，函数的反函数都是指这种经过改写的反函数。例如，函数$y=2x+1$的反函数是$y=\frac{x-1}{2}$。

反比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，比例的这一性质称为反比定理。即比例的等式两边，前后项可以交换。由于它是比例的基本性质的简单应用，即比例的一种变形，故现行初中几何教材未将其作为一项性质单独提出。

反对数表　由一个数的对数查这个数的数表。

反三角函数　在现行中学数学课本中反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数，都叫做反三角函数。

反比例关系　两种成反比例的量的关系。

反比例函数　形如$y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$的常数）的函数。这时称y与x成反比例。在算术中，k只能取正数，初中课本中将k值推广到非零实数。

反正切函数　函数$y=\mathrm{tg}x$（$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$）的反函数叫做反正切函数，记作$x=\mathrm{arctg}y$。习惯上写成$y=\mathrm{arctg}x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

反正弦函数　函数$y=\sin x$（$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$）的反函数叫做反正弦函数，记作$x=\arcsin y$。习惯上写成$y=\arcsin x$，它的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

反余切函数　函数$y=\mathrm{ctg}x$（$x\in(0,\pi)$）的反函数叫做反余切函数，记作$x=\mathrm{arc\,ctg}y$。习惯上写成$y=\mathrm{arcctg}x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$。

反余弦函数　函数$y=\cos x$（$x\in[0,\pi]$）的反函数叫做反余弦函数，记作$x=\mathrm{arc\,cos}y$。习惯上写成$y=\arccos x$，它的定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$。

反函数的导数　是指已知函数$y=f(x)$是函数$x=\varphi(y)$的反函数，$y=f(x)$在点x处连续，$x=\varphi(y)$在对应点y处的导数不等于零，那么，$y=f(x)$在点x处有导数，且$y'_x=\frac{1}{x'_y}$或记为$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$。其证明过程是：

设已知函数$y=f(x)$是$x=\varphi(y)$的反函数，$y=f(x)$在点x处连续，$x=\varphi(y)$在对应点y处的导数不等于零。给x以改变量Δx，相应地$y=f(x)$就有改变量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。当$\Delta x\neq 0$时，一定有$\Delta y\neq 0$，否则不等的两个值$x$与$x+\Delta x$将对应同一函数值$y$，这和“$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$互为反函数”矛盾，因此，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$。由于$y=f(x)$在点$x$处连续，即当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$，又由于$x=\varphi(y)$在对应点$y$处有不等于零的导数，所以，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$

$=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{x'_y}$，故 $y'_x=\frac{1}{x'_y}$。

反三角函数的导数

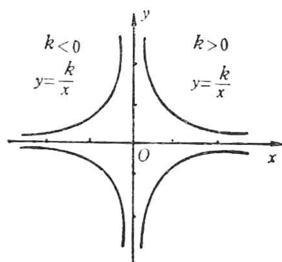
$$（1）(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)。$$

$$（2）(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)。$$

$$（3）(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)。$$

$$（4）(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)。$$

反比例函数的图象　关于原点对称且以x轴、y轴为渐近线的等边双曲线（如图）。



反三角函数间基本关系公式

$\sin(\arcsin x)=x$，

$\cos(\arccos x)=x$，

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$，

$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$，

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$，

$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)=x$，

$\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,x)=\frac{1}{x}$，

$\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,x)=\frac{1}{x}$，

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$，

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，

$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x$，

$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}\,x$，

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，

$\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\,x=\frac{\pi}{2}$。

反正切函数$y=\mathrm{arctg}\,x$的主要性质　函数$y=\mathrm{arctg}\,x$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在区间$(-\infty,+\infty)$上是增函数，是奇函数。

反正弦函数$y=\arcsin x$的主要性质　函数$y=\arcsin x$的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在区间

〔-1，1〕上是增函数，是奇函数。

反余切函数$y=\text{arcctg}x$ 的主要性质

函数 $y=\text{arc ctg}x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, \pi)$，在区间$(-\infty, +\infty)$上是减函数，既不是偶函数，也不是奇函数。

反余弦函数$y=\arccos x$ 的主要性质

函数$y=\arccos x$的定义域是〔-1，1〕，值域是〔0，π〕，在区间〔-1，1〕上是减函数，既不是偶函数，也不是奇函数。

分子　见分数。

分母　见分数。

分式　A，B为整式，式子$\frac{A}{B}$当B中含有字母时称作分式。A叫分式的分子，B叫分式的分母。当$B=0$时，分式没有意义；当$B\neq0$，$A=0$时，$\frac{A}{B}=0$。

分数　把整体"1"平均分成n份(n为正整数)，表示这样一份或几份的数。表示这样一份的数记作$\frac{1}{n}$，读作n分之一；表示这样m份的数记作$\frac{m}{n}$，读作n分之m。其中，m叫做分数的分子，n叫做分数的分母，中间的横线叫做分数线，$\frac{1}{n}$叫做$\frac{m}{n}$的分数单位。分数$\frac{m}{n}$不仅可以看作是把一个单位分为n等份，表示其中的m等份，也表示把m个单位分为n等份，表示其中的一个等份。由以上定义可知，在分数$\frac{m}{n}$中，$n\neq0$，特别的，当$n=1$时，$\frac{m}{n}=m$；当$m=0$时，$\frac{m}{n}=0$。于是，任何一个整数m，均可表示为分数$\frac{m}{1}$的形式。

分节号　见数的分节。

分数比　比的前项和后项都是分数，或其中一项为分数，一项为整数的比。

分比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$称为分比定理。$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$称为合比定理。现行初中几何教材中，将合比定理与分比定理合一，称为比例的合比性质。

分式方程　分母里含有未知数的方程。例如，$\frac{5}{x}=\frac{7}{x-2}$。

分步算式　根据应用题的解题计划，在解题过程中分步解答所列出的算式。

分段函数　是指根据函数定义，只要在某一范围内自变量x的每一个确定的数值，因变量y总有一个确定的数值与之对应即可。有一类函数需要同时用几个解析式表示，我们称这类函数为分段函数。如函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0, 1),\\ 2x, & x\in[1, 2],\\ x^2-4x+8, & x\in(2, 3]\end{cases}$$

就是一个分段函数，它的定义域为〔0，3〕。显然，它的定义域分为三段：

当$0\leqslant x<1$时，函数关系为$f(x)=x$；

当$1\leqslant x\leqslant 2$时，函数关系为$f(x)=2x$；

当$2<x\leqslant 3$时，函数关系为$f(x)=x^2-4x+8$。

这个函数的图形如图1所示。

同样的，根据分段函数的定义，可以判定函数 $y=\begin{cases}0.1, & x\in[0, 60], \\ 0.2, & x\in(60, 120]\end{cases}$ 也是一个分段函数，它的定义域为[0，120]，其图象如图2所示。

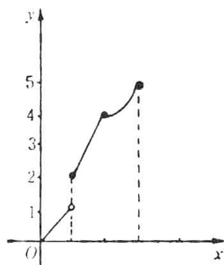


图1

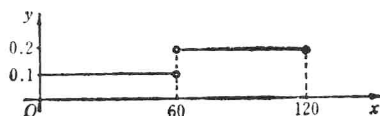


图2

分数加法　求两个分数的和的运算。

分数的和　两个分数，分别以其中一个分数的分母乘以另一个分数的分子，把所得的积的和作分子，把两个分数的分母的乘积作分母，由此所得的新分数，叫做这两个分数的和。用字母表示即是：设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$为两个分数，$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$，其中$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$是加数，$\frac{ad+bc}{bd}$是两个分数的和。

例如，$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2\times5+3\times3}{3\times5}=\frac{19}{15}$。

分数的积　把两个分数的分子的积作分子，分母的积作分母，所得的分数。两个分数中的一个叫被乘数，另一个叫乘数，它们都是积的因数，简称因数。

分数单位　见分数。

分数除法　已知分数$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$，求另一个分数$\frac{x}{y}$，使$\frac{x}{y}\cdot\frac{c}{d}$的积等于$\frac{a}{b}$的运算，记作$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$，其中，$\frac{a}{b}$是被除数，$\frac{c}{d}$是除数，$\frac{x}{y}$是$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$的商。

分数除法是分数乘法的逆运算。

分数乘法　求两个分数的积的运算。分数乘以大于1的整数的含义，就是求几个相同加数的和的简便运算。这与整数乘法的意义是相同的。分数乘以分数的含义，就是求一个数的几分之几是多少，不同于整数乘法的意义。

分数减法　已知两个分数$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$，求一个分数$\frac{x}{y}$，使$\frac{x}{y}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$的运算，记作$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$，其中$\frac{a}{b}$是被减数，$\frac{c}{d}$是减数，$\frac{x}{y}$是$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$的差。分数减法是分数加法的逆运算。在小学数学中，只有被减数不小于减数时，减法才是可行的。

分母有理化　化去分母中的根号的过程。

分组分解法　利用分组来分解因式的方法。例如，$2ax-10ay+5by-bx=(2ax-10ay)+(5by-bx)=2a(x-5y)+b(x-5y)=(x-5y)(2a-b)$是把多项式$2ax-10ay+5by-bx$分组后再提公因式进行因式分解。又如，$x^2-y^2+ax+ay=(x^2-y^2)+(ax+ay)=(x+y)(x-y)+a(x+y)=(x+y)(x-y+a)$是把多项式$x^2-y^2+ax+ay$分组后再运用公式进行因式分解。

分部积分法　是指由$d(uv)=udv+vdu$，得$udv=d(uv)-vdu$。把此式两边同时积分，得$\int udv=\int d(uv)-\int vdu$。由于$\int d(uv)=uv+C$，所以$\int udv=uv-\int vdu$。这里在等式的右边不明显的写出常数$C$，这个$C$可与积分$\int vdu$中所含的任意常数合并在一起，就称这个等式为分部积分公式，应用这个公式求积分的方法叫做分部积分法。当在求不定积分$\int udv$比较困难，而求$\int vdu$比较容易时，就需应用分部积分法，将求$\int udv$形式的不定积分转化为求$\int vdu$形式的不定积分。如用分部积分法求$\int x\sin xdx$，得$-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$。这种解法是设$u=x$，$dv=\sin xdx$，则$du=dx$，$v=-\cos x$而进行的。

应用分部积分法求不定积分的难点，是将谁和dx配成微分。对此，一般规律是：先考虑e^x，$\sin x$，$\cos x$；其次考虑x^n。如$\int x\sin xdx$是把$\sin x$与dx配成$d\cos x$；$\int xe^{-x}dx$是把e^{-x}与dx配成$d(-e^{-x})$等。若微分配搭不当会越积越难、越杂。一般被积式具有如下形式时，则可利用分部积分法解决。（1）$p(x)\sin xdx$或$p(x)\cos xdx$，设$u=p(x)$，$dv=\sin xdx$或$dv=\cos xdx$；（2）$p(x)e^{ax}dx$，设$u=p(x)$，$dv=e^{ax}dx$；（3）$p(x)\ln xdx$，设$u=\ln x$，$dv=p(x)dx$；（4）$p(x)\arcsin xdx$或$p(x)\mathrm{arctg}xdx$，设$u=\arcsin x$或$u=\mathrm{arctg}x$，$dv=$

$p(x)dx$，其中$p(x)$为某一多项式，a为常数。当然，利用分部积分法还有$\int e^{ax}\cos bx dx$（a、b为常数）等类型的积分，但总的原则均是适当选择u及dv，使vdu更易于积分。

应用分部积分法求不定积分时，有时需要连续两次、三次或多次地应用分部积分法，直至求得最后结果为止。在连续多次应用分部积分法时，出现的不定积分与原不定积分类型相同，只是系数不同，若遇到此情况，可通过"移项、合并同类项、两边除以不定积分的系数"使原积分得到求解。例如用分部积分法求

$\int e^{2x}\cos 3x dx$的过程是：设$u=e^{2x}$，$dv=\cos 3x dx$，则$du=2e^{2x}dx$，$v=\frac{1}{3}\sin 3x$。分部积分，得

$\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx$。再对

$\int e^{2x}\sin 3x dx$第二次分部积分，得

$\int e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx$，即有

$\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx$。显然看到，经过两次分部积分法以后，出来两项，而积分部分又与出现原来的积分。这时，就把等式右边的积分移到等式左边，合并同类项，得

$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x$，再将等式两边除以$\frac{13}{9}$，得$\int e^{2x}\cos 3x dx=e^{2x}\left(\frac{3}{13}\sin 3x+\frac{2}{13}\cos 3x\right)+C$。注意不要丢掉常数$C$。

分解质因数 把一个合数写成若干个质数的乘积的形式。例如，$70=2\times 5\times 7$。

分数与除法 $m\div n=\frac{m}{n}$。除法中的被除数相当于分数中的分子，除数相当于分母，除号相当于分数中的分数线，除法中的商相当于分数值。但分数表示一个数，而除法表示一种运算。

分数比例尺 用分数形式表示的比例尺。例如，$\frac{1}{3000}$。

分数应用题 用分数四则运算来解答的应用题。可分为两大类：①解题思路、方法与整数应用题类似的分数应用题；②根据分数乘、除法的意义进行解答的分数应用题。分数应用题主要研究后一种。

分数的分类 分数可以分为真分数和假分数两类。由于一个带分数可以化为一个假分数，所以，从本质上看，带分数不能作为分数的独立的一类。

分数的连乘 多个分数连乘，用所有分数的分子的积作分子，用所有分数

的分母的积作分母。

分数的性质　①同“分数的基本性质”。②若分数分子扩大(或缩小)若干倍，分母不变，则分数就扩大（或缩小）同样的倍数。例如，$\frac{2}{3}$的分子扩大3倍，分母不变，得分数$\frac{6}{3}$，$\frac{6}{3}$比$\frac{2}{3}$也扩大3倍；$\frac{4}{12}$的分子缩小4倍，分母不变，得分数$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{12}$比$\frac{4}{12}$也缩小4倍。③若分数的分子不变，分母扩大（或缩小）若干倍，则分数反而缩小（或扩）相同的倍数。例如，$\frac{3}{4}$的分子不变，分母扩大5倍，得分数$\frac{3}{20}$，$\frac{3}{20}$比$\frac{3}{4}$缩小5倍；$\frac{5}{16}$的分子不变，分母缩小4倍，得分数$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{4}$比$\frac{5}{16}$反而扩大4倍。

分布和分布列　一战士实弹射击，一次射击中的环数ξ是一个随机变量。显然，ξ的可能取值是0，1，…，10。在一次射击前，ξ取什么值是不确定的；但在大量射击中，ξ取各个可能值的概率是确定的。如表所示：

环数ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率 P_ξ	0	0	0	0	0.01	0.01	0.06	0.09	0.28	0.30	0.25

不同射手的射击结果，可能取值都是0～10。但是射击水平不同，取这些值的概率就不一样。所以，列出随机变量每个可能取值所对应概率的表，能够全面反映射击的水平。这例说明：为了全面掌握一个离散型随机变量的统计规律，就须知道：（1）ξ的所有可能取值$x_1, x_2, \cdots, x_n$是什么；（2）ξ取每一可能取值时的概率是多少，即要知道$P(\xi=x_1)$，$P(\xi=x_2)$，…，$P(\xi=x_n)$。通常将上面两点写成为

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P_ξ	$P(\xi=x_1)$	$P(\xi=x_2)$	…	$P(\xi=x_n)$

这叫做离散型随机变量ξ的分布列。如果记$P(\xi=x_1)=P_1$，$P(\xi=x_2)=P_2$，…，$P(\xi=x_n)=P_n$，分布列就可以简写成：

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P_ξ	P_1	P_2	…	P_n

或者合并写成$P(\xi=x_k)=P_k$ $(k=0, 1, \cdots, n)$。

分布列的这几种表达方式，形式虽然不同，实质是一样的。

掌握了分布列，我们就掌握了离散型随机变量的概率分布规律。

根据概率基本含义，易知任一概率分布都应有以下两条性质：

（1）随机变量取任何值时，其概率都不会是负数，即$P_1 \geqslant 0$，$P_2 \geqslant$

0，…，$P_n \geqslant 0$。

（2）随机变量取遍所有可取的值时，相应的概率之和等于1，即$P_1+P_2+\cdots+P_n=1$。

当离散型随机变量的可能取值，是无限多个可以一一列举的值时，分布的两条性质亦然成立。把无限多个可以一一列举的情况，叫做是可数个的。

分式恒等定理　两个分式$\frac{A}{B}\equiv\frac{D}{C}$的充分必要条件是恒等式$A\times C\equiv B\times D$对给定数集内的任意自变数值成立。

分数化百分数　先把分数化为小数，再将小数化为百分数。例如，$\frac{2}{5}=0.4=40\%$；$\frac{3}{4}=0.75=75\%$，$1\frac{1}{4}=1.25=125\%$等。

分数化连分数　任何一个有理数均可表示为$\frac{p}{q}$的形式，其中p、q均为整数，且$q\neq0$。而$\frac{p}{q}$总可以化为一个有限简单连分数，例如，把分数$\frac{67}{29}$化为连分数，由辗转相除法，得

	67	29	2
	58	27	
3	9	2	4
	8	2	
2	1	0	

于是，$\frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\cfrac{1}{\cfrac{29}{9}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{9}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}$，即$\frac{67}{29}=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$，或$\frac{67}{29}=〔2，3，4，2〕$。

分数四则运算　分数的加、减、乘、除运算。其运算顺序与整数四则混合运算顺序相同。在运算过程中，合理地应用运算定律，可使一些计算简便。

分数加法法则　①同分母分数相加，把分子相加，分母不变，即$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$。例如，$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3+1}{7}=\frac{4}{7}$。②异分母分数相加，先通分，然后再按同分母分数相加的法则进行，例如，$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$。③带分数相加，先把它们的整数部分和分数部分分别相加，然后再把它们合并起来。例如，$4\frac{2}{3}+2\frac{1}{5}=(4+2)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=6+\frac{13}{15}=6\frac{13}{15}$。

注意：相加所得的和，若不是最简分数，要约成最简分数；若是假分数，应化为带分数或整数。例如，$\frac{7}{10}+\frac{9}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$。

分数除法法则$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$。当分数除法中有带分数参与运算时，应先

将带分数化为假分数，然后再相除。

分数乘法法则　①分数乘以整数，或整数乘以分数，用分数的分子和整数相乘的积作分子，原来分数的分母作分母。②分数乘以分数，用分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母。③有带分数参与相乘时，先将带分数化为假分数，然后相乘。

注意：相乘所得的积，若不是最简分数，应化成最简分数。

分数减法法则　①同分母分数相减，分子相减，分母不变。例如，$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$。②异分母分数相减，先通分，然后按同分母分数相减的法则进行运算。例如，$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$。③带分数相减，把它们的整数部分和分数部分分别相减，再把所得结果合并起来。若被减数的分数部分小于减数的小数部分，应先从被减数的整数部分拿出1，并化成假分数与原来被减数的分数部分相加，然后再减，最后再把整数部分和分数部分减得的结果合并起来。例如，$7\frac{3}{5}-3\frac{3}{4}=7\frac{12}{20}-3\frac{15}{20}=6\frac{20+12}{20}-3\frac{15}{20}=(6-3)+\left(\frac{32}{20}-\frac{15}{20}\right)=3+\frac{17}{20}=3\frac{17}{20}$。

分式的除法法则　分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘，即$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$。

分式的乘方法则　把分子、分母各自乘方，即$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$($b\neq0$，$n$为正整数）。

分式的乘法法则　分式乘以分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母，再把它约成最简分式。即$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。

分式的基本性质　分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变。即$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（其中$M$是不等于零的整式）。

分式的符号法则　分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变。如分式$\frac{a}{b}$改变符号为$-\frac{-a}{b}$或$\frac{-a}{-b}$或$-\frac{a}{-b}$，则$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{-b}$。

分数的大小比较　①设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$为二分数，若$ad=bc$，则$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；②若$ad>cb$，则$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$；③若$ad<cb$，则$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，由②、③可得：若在$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$中$b=d$，则当$a>c$时，$\frac{a}{b}>\frac{c}{b}$；当

$a<c$时；则$\frac{a}{b}<\frac{c}{b}$；若$a=c$，则当$b>d$时；$\frac{a}{b}<\frac{a}{d}$；当$b<d$时，$\frac{a}{b}>\frac{a}{d}$。

分数的基本性质 分数的分子、分母同乘以或除以非零的数，分数的大小不变。即$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$，$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$ $(m\neq0)$。例如，$\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$，$\frac{16}{48}=\frac{16\div8}{48\div8}=\frac{2}{6}$。

分数乘法的速算 应用分数乘法的运算律，可使一些分数运算简便、迅速。例如，$3\frac{2}{5}\times7=(3+\frac{2}{5})\times7=21+\frac{14}{5}=(21+2)\frac{4}{5}=23\frac{4}{5}$；又如，$4\frac{3}{7}\times\frac{8}{11}+4\frac{3}{7}\times\frac{3}{11}=4\frac{3}{7}\times(\frac{8}{11}+\frac{3}{11})=4\frac{3}{7}\times1=4\frac{3}{7}$。

分数加法的速算法 常用的分数加法速算法有：①利用加法运算定律，例如，$\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{3}{5}=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{7}=\frac{5}{5}+\frac{5}{7}=1\frac{5}{7}$。②利用和的恒等变换。例如，$4\frac{5}{7}+3\frac{4}{7}=4\frac{5}{7}+4-\frac{3}{7}=8\frac{2}{7}$。③利用互质数的倒数的通分规律。例如，$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{5+7}{5\times7}=\frac{12}{35}$。

分数指数幂的法则 （1）正数的$\frac{m}{n}$次幂（m，n都是正整数，$n>1$）等于这个正数的m次幂的n次算术根，即$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0$，$m$，$n$都是正整数，$n>1$）。（2）正数的$-\frac{m}{n}$次幂（$m$，$n$都是正整数，$n>1$）等于这个正数的$\frac{m}{n}$次幂的倒数，即$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$。

分数乘法的运算律 ①分数乘法的交换律，即$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$。②分数乘法的结合律，即$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$。③分数乘法对分数加法的分配律，即$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$或$\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\cdot\frac{c}{d}$。

分数减法的速算法 ①利用分数减法的运算性质。例如，$\frac{8}{15}-\left(\frac{11}{20}-\frac{4}{15}\right)=\left(\frac{8}{15}+\frac{4}{15}\right)-\frac{11}{20}=\frac{12}{15}-\frac{11}{20}=\frac{4}{5}-\frac{11}{20}=\frac{16-11}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$。②利用差的恒等变化。例如，$5\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=5\frac{2}{7}-1+\frac{2}{7}$

$=4\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=4\frac{4}{7}$。③利用两个互质数的倒数的通分规律。例如，$\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{8-5}{5\times 8}=\frac{3}{40}$。④利用两个连续自然数的倒数的通分规律。例如，$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5-4}{4\times 5}=\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{20}$。

分数加法的运算定律　①交换律：$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_1}{b_1}$。②结合律：$\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)+\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}+\left(\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)$。

分数减法的运算性质　与整数减法的运算性质相同，即①$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$；②$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$或$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{e}{f}-\frac{c}{d}$。

分数、小数四则混合运算　同时含有分数、小数的四则运算。在运算过程中，若遇到加减运算，一般先将分数化为小数再进行运算（若能化为有限小数）较为简便；若遇到乘除运算，一般先将小数化为分数再进行运算。这类运算情况比较复杂，应根据具体情况灵活处理。

分数、小数加减混合运算　①若分数都能化为有限小数，则把分数化成有限小数后再运算。②若有的分数不能化为有限小数，则把小数化为分数再运算。③若运算结果允许取近似值，则可把分数化为小数。取它的近似值，然后再进行运算。以上讲的都是一般情况，不是绝对的。

分数、小数乘除混合运算　没有绝对固定模式，一般是先将小数化为分数再进行运算比较简便。但有时也可以化成小数（若能化成有限小数时）进行计算。

分数能够化为有限小数的充要条件　一个既约分数能够化为有限小数的充要条件是，分母不含有2和5以外的质因数。

公理　经过大量实践证实符合客观现实的命题叫做公理。在平面几何的演绎体系中，三段论是它常用的推理方法。在演绎的过程中，由于大前提中概念的外延不断扩大，最后在几何中存在这样一类命题，它不可能由演绎推理得来，而是作为其他演绎推理的基础，这类作为推理基础的命题就是公理。几何学中严格的公理化系统，要求公理满足相容性、独立性和完备性，这一点连欧几里得《几何原本》也未做到，直到1899年才由德国数学家希尔伯特(Hilbert，1862～1943)在《几何基础》一书中完满解决。所谓相容性（不矛盾性、和谐性）是指公理体系中，各公理不应互相矛盾，或由公理推出的一切结果不应有矛盾；独立性是指公理的条数应尽量地少，而且每一条都不能根据前面的公理来证明；完备性指在公理体系中，把所有基本概念的性质充分指出来，

使本门学科能纯粹按逻辑推理进行，而无需借助直观。但做为中学数学，上述公理系统与学生的认识水平差距太大，只能选择一定数量的重要命题作为“公理”的形式出现，以此作为推理的基础，这种扩大了的公理系统中，不要求具备独立性和完备性，但要求具有相容性。

公切线 和两个圆都相切的直线。两个圆在公切线同旁时，这样的公切线叫做外公切线；两个圆在公切线两旁时，这样的公切线叫做内公切线。

公因式 如果一个多项式$h(x)$，同时是两个（或多个）多项式$f(x)$与$g(x)$的因式，那么$h(x)$就叫做$f(x)$与$g(x)$的公因式。两个多项式的公因式可以有许多个。如$x+1$、$x-1$都是x^2-1与x^4+x^3-x-1的公因式。在两个多项式$f(x)$与$g(x)$的所有公因式中，次数最高的公因式叫做这两个多项式的最高公因式。如果在一个多项式中的每一项里都含有相同的因式，那么这个相同的因式叫做这个多项式各项的公因式。例如，x就是$3x^2-5xy+x$的各项的公因式。

公约数 几个整数公有的约数，即设有$n(n\geqslant 2)$个整数：a_1，a_2,a_3，…，a_n，若$d|a_1$，$d|a_2$，$d|a_3$，…，$d|a_n$，则称d为a_1，a_2，…，a_n的公约数，或称公因数。例如，18,30,48的公约数是1，2，3，6。在小学数学中。只研究自然数的公约数。

公倍式 如果多项式$L(x)$同时是多项式$f(x)$与$g(x)$的倍式，那么$L(x)$就叫做它们的公倍式，其中次数最低的公倍式，叫做它们的最低公倍式，记为$[f(x), g(x)]$。例如，$x+1$与$x-1$有公倍式x^2-1，$2x^2-2$，$(x^2+1)(x^2-1)$，…，所以x^2-1是$x+1$与$x-1$的最低公倍式。

公倍数 几个整数公有的倍数，即设有$n(n\geqslant 2)$个整数：a_1,a_2,a_3，……，a_n，若m是这n个整数的倍数，即$a_1|m,a_2|m$，……，$a_n|m$，则称m为a_1，a_2，……，a_n的公倍数。例如，12是4，6的公倍数，24，36，48等都是4，6的公倍数。

公式变形 把一个公式从一种形式变换成另一种形式。例如，将公式$v=v_0+at$变为$t=\frac{v-v_0}{a}$。

公切线的长 两圆的公切线上的两个切点的距离叫做公切线的长。两圆的两条外公切线的长相等。两圆的两条内公切线的长也相等。

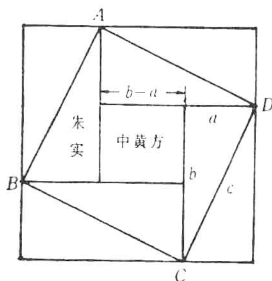
公约数、公倍数问题 需用求几个数的最大公约数或最小公倍数来解决的应用题。

公分母和最小公分母 将几个不同分母的分数，化成相同分母的分数，这个相同的分母叫做这几个不同分母的分数的公分母。这几个不相同分母的分数的公分母不止一个，其中最小者叫做这几个不同分母的分数的最小公分母。例如分数$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{6}$，它们的公分母有6，12，…，其中6是它们的最小公分母。

勾、股、弦 分别是直角三角形的两条直角边和斜边。我国古代数学家在研究直角三角形三边间的关系时，曾用此名称，并把较短的直角边叫做勾，较长的直角边叫做股。

勾股定理 直角三角形两直角边的平

方和等于斜边的平方($a^2+b^2=c^2$)。在我国，相传夏禹就知道这个性质。约在公元前一世纪成书的《周髀算经》记载有周公与商高的对话，商高说：“故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五。……故禹之所以治天下者，此数之所生也”。该书还记载有荣方与陈子的对话，陈子有：“勾股各自乘，并而开方除之”的话。商高是与周公同时代的人，约在公元前1120年左右，陈子约是公元前六、七世纪人。在国外，勾股定理是希腊人毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前500年人)首先提出的。勾股定理在国外称毕达哥拉斯定理。由于商高、陈子早于毕氏，故有人提议称为商高定理或陈子定理。毕氏的证明早已失传，欧几里得在《几何原本》成书时，才补上了证明(见初中《几何》第一册5.4节例2)。我国汉代数学家赵爽(字君卿)在注释《周髀算经》时给出的证明，是留传至今能见到的最早的证明。他在周公与商高对话中，补了一个“勾股方圆图注”，其中第一图是“弦图”，即将一个正方形划分为四个相同的长方形和中间一个小正方形，大意是：正方形$ABCD$等于四个直



角三角形(称朱实)与一个小正方形(称中黄方)的和，因而可得$2ab+(b-a)^2=c^2$，整理即得$c^2=a^2+b^2$。

勾股数组　所有满足$a^2+b^2=c^2$的三个正整数a、b、c组成的数组。勾3股4弦5是最简单的勾股数组。我国古算书籍中所涉及的勾股问题，通常都取整数。勾股数组的一般形式为$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$。最早发现这一规律的是刘徽，公元263年(魏陈留王景元四年)他在为《九章算术》作注时实际上已证出此关系，他在为《九章算术》勾股章第十四题作的注(译成现代文字)，曾提到下述关系：

$$c:(a+c):a=\frac{1}{2}(m^2+n^2):m^2:[m^2-\frac{1}{2}(m^2+n^2)],\quad (a+c):b=m^2:mn,$$

于是

$$a:b:c=[m^2-\frac{1}{2}(m^2+n^2)]:mn:\frac{1}{2}(m^2+n^2)。$$

刘徽在这里用的是面积割补的方法。我国清代有很多人对勾股数组进行过研究，得出求法十余种。现将罗士琳(1789～1853)之法介绍如下：设m、n为两正整数，且$m>n$，因$a+b>c$，故总可得到$a+\frac{n}{m}b=c$ ($\frac{n}{m}<1$)，将此式两边平方$(a+\frac{n}{m}b)^2=c^2$，将$c^2=a^2+b^2$代入整理得$b(m^2-n^2)=2mna$，∴

$$\frac{a}{m^2-n^2}=\frac{b}{2mn}。$$

令$a=m^2-n^2$，则$b=2mn$，则$c=a+\frac{n}{m}b=m^2+$

n^2。任取一对正整数m，$n(m>n)$，代入即可得一勾股数组。如$m=3$，$n=2$时，$a=5$，$b=12$，$c=13$。现取其一部分，列表如下：

m \ n	1	2	3	4	5	…
2	3，4，5					
3	6，8，10	5，12，13				
4	8，15，17	12，16，20	7，24，25			
5	10，24，26	20，21，29	16，30，34	9，40，41		
6	12，35，37	24，32，40	27，36，45	20，48，52	11，60，61	
…	…	…	…	…	…	…

六十进位制 底数是“六十”的进位制。用六十进位制所得到的数的各位的单位分别是一、六十、三千六百，……，即依次是60^0、60^1、60^2、……。六十进位制起源于四、五千年前的巴比伦人。60这个数字是许多数字，例如2、3、4、5、6、10、12、15、……的倍数，因此，选用六十进位制，就可以将一些较大单位的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{10}$……转化成较小单位时仍是整数。巴比伦人采用六十进位制，可能是因为$60=12\times5$，12是一年的月数，5是一只手的手指数。现在的时间单位还用1小时等于60分，1分等于60秒；弧和角的单位也是1度等于60分，1分等60秒，等等。

方根 如果a是b的n次幂，n是大于1的整数，称b为a的n次方根。a的n次方根记作$\sqrt[n]{a}$；其中$\sqrt{\ }$是根号，n是根指数。二次方根亦称“平方根”，三次方根亦称“立方根”。求方根的运算称为“开方”。初中代数第三册讲述了平方根，立方根，n次方根和算术根。方根和幂一样，早在古代巴比伦人已经有有理平方根表。希腊人已经知道除4、9和16以外，数2，3，…，17的平方根是无理数。在欧几里得《几何原本》中的算术运算就有求根。在中世纪，根的计算有了进一步坚实的发展。在9世纪，印度人就知道二次方程的解和一个正数的平方根有两个值，负数的平方根不可能是实数。他

们还能近似的计算平方根和立方根。米歇尔·斯蒂弗尔(1487～1567)介绍了求一个数的七次方根的方法。

方程　含有未知数的等式称为方程。"方程"是我国古老的名词，《九章算术》第八章就是方程章，不过它指的是一次方程组。三国时魏刘徽解释方程的意义为："程，课程也。群物总杂各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程"。二物二程，三物三程指两个或三个未知数则要两个或三个式子来表示，因并列成行呈方形，所以叫方程。一元一次方程的问题在埃及的纸草书中已经出现，巴比仑人也知道某些特殊的二次方程、三次方程的解法。直到中亚细亚的阿尔·花拉子模（780—850）的《代数学》的发表，方程的概念才逐渐明确起来，并第一次提出了二次方程的一般解法。这本书的重大缺点，就是完全没有代数符号，一切算法都是用文字语言来表达。随着数学符号的引进，复数的引进，方程的研究获得了重大的突破。1797年高斯第一次给出代数基本定理的严格证明。这样代数方程的理论和计算逐渐完备起来。方程知识是中学代数的主要内容之一。在中学课本中讲述了一元一次、二次、特殊的三次和三次以上的高次方程的解法；二元一次方程组、三元一次方程组的解法。

方程组　由几个方程组成的一组方程。亦称联立方程。例如

$$\begin{cases} x^2+6y^2+4=0, \\ 4xy+2y+1=0 \end{cases}$$ 是方程组。

同时满足每个方程的未知数的值，称为方程组的解。求方程组解的过程称为解方程组。初中代数课本介绍了二元一次方程组、三元一次方程组和简单的二元二次方程组的解法。在高中代数课本中介绍了线性方程组。

方程的根　见方程的解。

方程的解　使方程左右两边的值相等的未知数的值。只含有一个未知数的方程的解，也称为根。

方程组的解　见方程组。

方程同解原理　（1）方程的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程。（2）方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程。

方程组的初等变换　对方程组进行以下三种变形：（1）用一个非零常数乘某一个方程，（2）用一个数乘某一个方程，加到另一个方程上去；（3）两个方程互换。这三种变形叫做方程组的初等变换。

计量　把一种量和一种作为标准的同类量进行比较的过程。

计数　把事物与自然数列里从"1"开始的连续的若干个自然数建立一一对应的过程。计数通常又叫数(shǔ)数(shù)。例如，要知道班里有多少个同学，就一个一个地把每一个学生和自然数1、2、3……依次相对应，如果最后一个学生与40相对应，就说这个班里共有40个学生。这个过程就叫计数，也叫数数。

计算　对于数集A上的一个运算，由已知的两个数a、b求对应的数c（得数）的过程。例如，对于自然数集A上

的加法运算，$a+b=c$，当$a=5$，$b=3$时，求c的过程$5+3=8$，就是计算。

计量单位 用来作为计量标准的量。例如，用来作为计量长度的标准是米、厘米等；用来作为计量重量的标准是公斤、克等。

计数公理 若被数(shǔ)的事物在计数的过程中，既不被遗漏，又不被重数(shǔ)，则计数的结果与计数的顺序无关。

计数单位 一、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿……都是计数单位。其中"1"是自然数的基本计数单位。其它的象十、百、千、万等计数单位都叫做辅助单位。作为整数系中的头十个数（通常叫做个位数）0、1、2、…、8、9都是通过加基本计数单位1的运算而得到，其它辅助单位是用10的各次乘方而逐级增大。即

$10=10$（十），$10^4=10000$(万)，

$10^2=100$（百），……………

$10^3=1000$（千），

$10^8=100000000$（亿）。

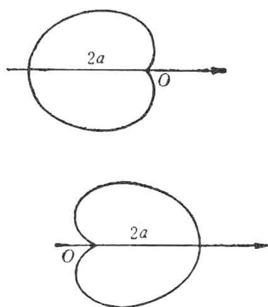
……………………

因此，10个较低级单位等于一个相邻的较高级的单位。

计算方法 是研究代数、微分方程、泛函分析、统计数学等各类问题的近似解的一门学科。常用的方法有叠代法、差分方法、变分方法、随机模拟方法等。计算方法还包括简化计算的理论，如函数逼近论、数值微分、数值积分和误差分析等。电子计算机出现后，寻找计算的方法以适应各种类型电子计算机的特点，已成为这门学科的一个重要研究部分。

计算数学 数学的一门分科。内容大致分为计算方法和程序设计两个方面。计算方法主要研究各类问题近似解的方法，它产生较早，但自计算机出现后，才发展起来。程序设计是研究电子计算机上的信息加工问题，就是如何将一个数学问题的计算程序化为机器语言，从而在计算机上解决计算问题。目前由于电子计算机的迅速发展，大大推动了计算数学的进展。

心脏线 在极坐标系中，方程$\rho=a(1+\cos\theta)$所表示的曲线叫做心脏线。方程$\rho=a(1-\cos\theta)$所表示的曲线也叫做心脏线。



尺规作图 只限用（无刻度的）直尺和圆规作图的方法。尺规作图法也称初等几何作图（法）或欧几里得作图法。严格地说，尺规作图的定义是："只用无刻度的直尺和圆规，按照作图公法的规定中允许的作图步骤，进行有限次组合的作图"。作图公法是欧氏几何限定的直尺和圆规的功能。作图公法有以下三条：①通过两个已知点可作一条直线；②已知圆心和半径可作一圆；③两已知直线，一已知直线和一已知圆，或两已知圆，如果相交可定其交点。许多作图问题不能按

上述规定完成，称之为尺规作图不能问题（见尺规作图不能问题条）。平面几何中的作图题，在写出已知、求作之后，解作图题的步骤一般分为：分析、作法、证明、讨论四步。中学数学教学大纲规定，对于作图题只要求学生会写已知、求作和作法，不要求写证明。

尺规作图不能问题　不能有限次使用尺规作图完成的作图题。著名的三大尺规作图不能问题是：①倍立方问题或立方倍积问题，即求作一正方体（求出一边长），使它的体积二倍于已知正方体的体积；②三等分角问题，即将一已知角三等分；③化圆为方问题，即求作一正方形使其与已知圆的面积相等。在古希腊，这三个作图题是著名的古典难题，被称为几何三大问题。此后，经过无数人的试探，均以失败而告终。1837年万芝(Wantzel)首先证明了前面两个是尺规作图不能问题，1882年林德曼(Lindemann)证实了π的超越性，于是三大难题均属尺规作图不能问题便成定论。尺规作图不能问题包括范围很广，远不止上述三个。一般地，只用直尺和圆规，不能有限次地使用作图公法完成的作图题均属尺规作图不能问题（关于作图公法的内容见尺规作图条）。借助解析几何的知识，可以得到关于尺规作图可能性的下述准则：一个作图题用代数的方法解出的未知量的解析表达式，如果是由若干已知量经过有限次有理及开平方运算能够完成时，而且只有这时，这个作图题可用尺规作图完成；否则，就属尺规作图不能问题。

双曲线　平面内与两个定点F_1、F_2的距离的差的绝对值是常数（小于$|F_1F_2|$）的点的轨迹。F_1、F_2叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做焦距。

双纽线　方程$\rho^2=a^2\cos2\theta$所表示的曲线叫做双纽线。方程$\rho^2=a^2\sin2\theta$所表示的曲线也叫做双纽线。

双二次方程　只含有未知数的偶次项的一元四次方程。例如，$x^4-13x^2+36=0$。

双曲线的弦　连结双曲线上任意两点（不管是否在同一支上）的线段。

双曲线的直径　在双曲线中，平行弦的中点的轨迹。设AB和CD是同一双曲线的两条直径，AB平分平行于CD的弦，CD平分平行于AB的弦，那么这两条直径互为共轭直径。

双曲线的几何画法　设双曲线的实轴的长是$2a$，焦距是$2c$，画法如下：(1)作实轴$A'A=2a$，在它的延长线上定出焦点F_1和F_2，使$A'A$的中点到F_1和到F_2的距离都等于c。(2)在F_1F_2的延长线上任取一点M_1，分别以F_1，F_2为圆心，以$A'M_1$，AM_1为半径画弧，分别交于P_1，P_1'两点，改变M_1点的位置，同样画出P_2、P_2'，P_3，P_3'……各点。③把各点连接成光滑的曲线，就得到双曲线的一支，交换半径$A'M_1$和AM_1，可以画出双曲线的另一支。

双曲线的切线方程　(1)经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P_1(x_1,\ y_1)$的切线方程是$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$。(2)

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2}{b^2}=1$的斜率为$k$的切线方程是$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$ $(a^2k^2>b^2)$。

双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$。

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$的性质 （1）在两直线$x=a$，$x=-a$的外侧。（2）关于每个坐标轴和原点都是对称的。（3）以$A(-a,\ 0)$、$A_2(a,\ 0)$为顶点。（4）以两条直线$y=\pm\frac{b}{a}x$为渐近线。（5）离心率$e=\frac{c}{a}$。

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$的实轴和虚轴 连结两顶点$A_1(-a,\ 0)$、$A_2(a,\ 0)$的线段叫实轴，它的长等于$2a$。连结点B_1 $(0,\ -b)$、$B_2(0,\ b)$的线段叫虚轴，它的长等于$2b$。

正比 在小学数学中，如果一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量也随着扩大（或缩小）相同的倍数，那么这两个量叫做成正比的量。一般说来，如果a对b的比$a:b$对$b:a$来说，叫做$a:b$成正比。

正切 见三角函数。

正弦 见三角函数。

正割 见三角函数。

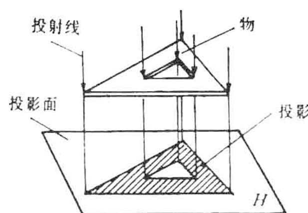
正数 带有正号的数（正号可以省略不写）。

正比例 当两个相互有关的量x和y在变化过程中保持其比值不变时，称x与y成正比例。

正方形 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形。正方形具有矩形、菱形的一切性质。

正方体 棱长都相等的长方体叫做正方体，也叫做立方体。

正投影 在平行投影中，如果投射线垂直于投影面，这种投影就叫做正投影。如图，一块三角板对于投影面H平放着，光线垂直于投影面H，这时在H上得到的三角板的投影是正投影。正投影能够反映物体的真实形状和大小。在工程技术上使用的图纸，一般都采用正投影方法绘制。



正棱台 由正棱锥截得的棱台。

正棱柱 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱。

正棱锥 一个棱锥，如果它的底面是正多边形，并且顶点到底面的垂线足是底面正多边形的中心，这样的棱锥叫做正棱锥。

正多边形 各边相等、各角也相等的多边形。如正三角形(等边三角形)、正四边形（正方形）、正五边形等。任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆。正多边

形每个内角都等于$\frac{(n-2)}{n}\cdot 180^{\circ}$。正$n$边形的半径和边心距把正$n$边形分成$2n$个全等的直角三角形。设正$n$边形边长为$a$，半径为$R$，边心距为$r$，面积为$S$，则正$n$边形的中心角$\alpha_n=\frac{2\pi}{n}$；正$n$边形的边长$a=2R\sin\frac{\pi}{n}=2r\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$；$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$。正$n$边形都是轴对称图形，一个正$n$边形共有$n$条对称轴；边数为偶数的正多边形是中心对称图形。边长相同的正多边形相似。

正多面体　如果多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的多面角，这样的多面体叫做正多面体。在正多面体里，所有的棱、面角和所有的二面角都是相等的。例如，正方体的各个面都是全等的正方形，并且各个多面角都是直三面角。

正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等。即，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

正比例关系　两种成正比例的量的关系。

正比例函数　形如$y=kx$（$k\neq 0$的常数）的函数。常数k称做变量y与x之间的比例系数。在算术中，k只能取正数，初中课本中把k值推广到非零实数。

正方体的体积　正方体的体积等于它的棱长的立方。设正方体的棱长为a，它的体积为V，则$V=a^3$。

正棱台的性质　（1）正棱台的侧棱相等，侧面是全等的等腰梯形。各等腰梯形的高相等，它叫做正棱台的斜高。（2）正棱台的两底面以及平行于底面的截面是相似正多边形。（3）正棱台的两底面中心连线、相应的边心距和斜高组成一个直角梯形；两底面中心连线、侧棱和两底面相应的半径也组成一个直角梯形。

正棱锥的性质　（1）正棱锥的各条侧棱相等。（2）正棱锥的各个侧面是全等的等腰三角形。（3）正棱锥的各条斜高相等。（4）正棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形；高、侧棱和侧棱在底面上的射影也组成一个直角三角形。

正多边形的中心　正多边形的外接圆（或内切圆）的圆心。一个正n边形共有n条对称轴，每条对称轴都通过正n边形的中心。正n边形绕中心每旋转$\frac{2\pi}{n}$，都与它自身重合。

正多边形的半径　正多边形外接圆的半径。边长为a的正n边形的半径$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$。

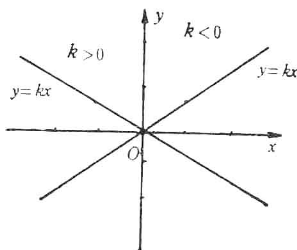
正多面体的中心　和正多面体的各顶点等远的点。

正多面体的种类　正多面体只有五种：正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体。

正棱台的全面积　正棱台的全面积等于它的侧面积与两个底面面积的和。

正比例函数的图象　正比例函数$y=$

$kx\ (k\neq 0)$ 的图象是过原点 $O(0,\ 0)$ 的直线（如图）。



正多边形的中心角 正多边形每一边所对的外接圆的圆心角。正 n 边形的中心角 $\alpha=\frac{360^\circ}{n}=\frac{2\pi}{n}$。

正多边形的边心距 正多边形内切圆的半径。边长为 a 的正 n 边形的边心距 $r=\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}=R\cos\frac{\pi}{n}$。

正多面体的切棱球 正多面体各棱同切于一球（切点是各棱的中心），这个球就叫做正多面体的切棱球。

正多面体的内切球 正多面体各面同切于一球（切点是各面的中心），这个球叫做正多面体的内切球。

正多面体的外接球 正多面体各顶点同在一球面上，这个球叫做正多面体的外接球。

正弦曲线和余弦曲线 正弦函数 $y=\sin x\ (x\in R)$ 和余弦函数 $y=\cos x\ (x\in R)$ 的图象分别叫做正弦曲线和余弦曲线。

正棱锥的侧面展开图 若把侧棱长为 l、底面边长为 a 的正棱锥的侧面，沿着一条侧棱剪开，并且把它展开，就得到正棱锥的侧面展开图。它是一组等腰三角形。正棱锥底面正多边形的各顶点，都在一个以其侧棱长为半径的扇形弧上。

正多面体的表面积及体积 正多面体的表面积及体积如下表所示：

类　型	表面积（a表示棱长）	体积（a表示棱长）
正四面体	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
正六面体	$6a^2$	a^3
正八面体	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
正十二面体	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
正二十面体	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 和余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的主要性质 函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是 $\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$；函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域是 $\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi,\ k\in Z\}$。函数 $y=\mathrm{tg}x$ 及 $y=\mathrm{ctg}x$ 的值域都是实数集 R，都没有最大值、最小值。函数 $y=\mathrm{tg}x$ 及

$y=\mathrm{ctg}x$都是周期函数，周期都是π。函数$y=\mathrm{tg}x$及$y=\mathrm{ctg}x$都是奇函数。函数$y=\mathrm{tg}x$在每一个开区间$(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi)$，$k\in z$内都是增函数；函数$y=\mathrm{ctg}x$在每一个开区间$(k\pi,(k+1)\pi)$，$k\in z$内都是减函数。

正弦函数$y=\sin x$和余弦函数$y=\cos x$的主要性质　函数$y=\sin x$及$y=\cos x$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$。函数$y=\sin x\,(x\in R)$及$y=\cos x\ (x\in R)$的值域都是$[-1,\ 1]$。函数$y=\sin x$在$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ (k\in z)$时取最大值$y=1$，在$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in z)$时取最小值$y=-1$；函数$y=\cos x$在$x=2k\pi\,(k\in z)$时取最大值$y=1$，在$x=(2k+1)\pi\ (k\in z)$时取最小值$y=-1$。函数$y=\sin x\ (x\in R)$及$y=\cos x\ (x\in R)$都是周期函数，$2k\pi\ (k\in z$且$k\neq 0)$都是它们的周期，最小正周期是$2\pi$。函数$y=\sin x\,(x\in R)$是奇函数，函数$y=\cos x\,(x\in R)$是偶函数。函数$y=\sin x$在每一个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in z)$上，都从$-1$增大到$1$，是增函数，在每一个闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in z)$上，都从$1$减小到$-1$，是减函数；函数$y=\cos x$在每一个闭区间$[(2k-1)\pi,\ 2k\pi](k\in z)$上，都从$-1$增大到$1$，是增函数，在每一个闭区间$[2k\pi,\ (2k+1)\pi](k\in z)$上，都从$1$减小到$-1$，是减函数。

去括号法则　括号前是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不变号；括号前是“－”号，把括号和它前面的“－”号去掉，括号里各项都变号。

古典概型　要了解一个事件的概率的基本方法，需进行大量的观测和试验，用频率来估计概率。但有些随机事件可以归结成一些模型，然后利用模型本身所具有的特点，直接计算出事件的概率。例如

（1）掷一枚均匀的硬币，它要么出现正面，要么出现反面，出现这两种结果的可能性是相等的。因此，可以认为出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，出现反面的概率也是$\frac{1}{2}$。可见在一次试验的结果，和大量重复试验的结果是一致的。

（2）将a、b两个球随机地放到编号为A、B、C的三个盒子中，共有9种放法。因为在任何一次放置中，只会出现九种情况中的一种，这九种放法实际上就是“在三个盒子中放置两个球”这一随机现象的所有基本事件。不难看出，发生其中任一基本事件的可能性都是相等的，即都有$\frac{1}{9}$的机会。

因此，利用模型本身所具有的特点，直接计算出事件的概率是一种简单而又直观的概率计算方法。应用这个方法时，要求随机现象满足下面两个条件：①在一次试验中，随机现象的

可能结果只有有限个，也就是全部基本事件的个数是有限的；②每一个基本事件发生的可能性是相等的。

满足这两个条件的随机现象模型，称为古典概型。

可约分数 分子、分母不互质的分数。例如，$\frac{2}{4}$，$\frac{7}{35}$，$\frac{25}{125}$等均为可约分数。

左视图 见三视图。

平方 求两个相同数乘积的运算。有时也把两个相同数乘积的结果称平方。如a^2既可看作是$a \cdot a$的（平方）运算，又可看作是平方运算的结果。

平角 一条射线由原来的位置OA，绕着它的端点O旋转至位置OB，当OA和OB成一条直线时，所成的角叫做平角。平角的度数为180°。

平面 不定义的概念。常见的镜面、黑板面以及平静的水面等，都给人们以平面的形象。几何里的平面是无限伸展的。

平方表 由底数查它的平方幂的数表。

平方根 见方根。

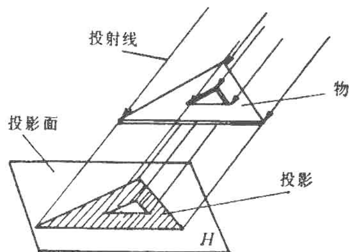
平行线 在同一平面内不相交的两条直线。平行用符号“//”表示，如AB、CD是平行线，记作"$AB//CD$"，读作“AB平行于CD”。

平均数 如果有n个数x_1，x_2，…，x_n，那么$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$称做这$n$个数的平均数。平均数又称算术平均数。

平方根表 用来查得正数的平方根的表。最早的平方根表是古代巴比伦人首先使用的“有理平方根表”。

平行公理 现行（及多数）中学数学教材中，对欧氏几何的平行公理做如下叙述：“经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行”。这条公理是欧几里得几何的重要支柱，不承认这条公理（或其等价命题）的几何是非欧几里得几何（见非欧几里得几何条）。欧几里得的《几何原本》的平行公理即第五公设的原文是：“平面内两条直线与第三条直线相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，则这两条直线必在这一侧相交”。现在采用的平行公理是第五公设的一个等价命题。

平行投影 投影线互相平行的投影叫做平行投影。如，把一块三角板放在太阳光下，在地面H上得到的投影，就是平行投影。因为太阳光线可以看作平行线。



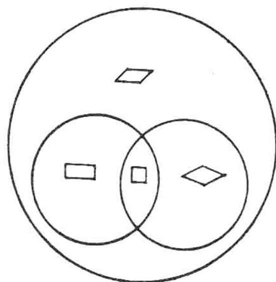
平面图形 如果图形上所有的点都在同一个平面内，这个图形叫做平面图形。

平方差公式 两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差。即$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

平行六面体 两个底面是平行四边形的棱柱。侧棱和底面斜交的叫斜平行

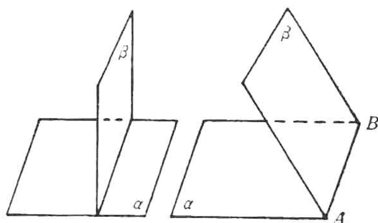
六面体。侧棱与底面垂直的叫做直平行六面体。底面是矩形的直平行六面体叫做长方体。各侧面和底面都是正方形的直平行六面体叫做正方体。

平行四边形　两组对边分别平行的四边形。平行四边形用符号“▱”表示，如平行四边形$ABCD$记作“▱$ABCD$”，读作“平行四边形$ABCD$”。平行四边形的对角相等；相邻内角互补；对边相等；对角线互相平分。矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，他们之间的关系如图所示。



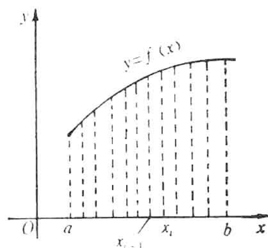
平面的斜线　和一个平面相交，但不和这个平面垂直的直线。斜线和平面的交点叫做斜线足或者斜足。

平面的表示法　几何中表示平面的方法。通常用一个平行四边形来表示。水平放置的平面，通常把平行四边形的长边画成短边的二倍，一个锐角画成45°（如图）。如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，把被遮住的线条画成虚线或不画。平面常用希腊字母α、β、γ或用英文字母M、N等来表示，记作平面α或者平面N等，也可以用表示平行四边形两个相对顶点的字母来表示，如平面AC。另外，亦可画成长边是短边3倍，夹角是60°或30°的平行四边形表示平面。



平行四边形的高　见平行四边形的底边。

平面曲线的弧长　指弧的内接的折线的长度，当划分弧的最大直径趋向于零时的极限值。我们知道，任一线段的长度，可以直接度量求得；任一已知半径和弧度或角度的圆弧的长度，可以用公式$l=\alpha R$（或$\frac{n\pi}{180}R$）求得。但是对于平面上任意一条曲线的弧长，将采用与求曲边梯形面积类似的方法来求曲线的弧长。其具体过程是：设曲线AB的方程为$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）。这里函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可导，而且$f'(x)$连续。求曲线AB的长l（如图）。



（1）将$\overset{\frown}{AB}$分割为n段小弧，用$n-1$个垂直于x轴的垂线，把区间

$[a, b]$等分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$其中，$x_0=a$，$x_n=b$，每个小区间的长度为$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，这样，平面曲线AB被分成n段弧，连结每段弧的弦，得内接曲线AB的折线，第i个小区间上所对应的第i段弧$A_{i-1}A_i$两个端点坐标为$A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$，$A_i(x_i, f(x_i))$。根据两点间的距离公式，得折线第$i$段长$|A_{i-1}A_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$。

（2）用折线代替曲线。当小区间很小时，第i段弧$A_{i-1}A_i$的长就可以用第i段折线$|A_{i-1}A_i|$的长近似代替，于是曲线AB的长l的近似值

$l_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$。①由拉格朗日中值定理，有$f(x_i)-f(x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x$ $(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$，其中$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$，这时$l_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x)^2+[f'(\xi_i)\Delta x]^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x$，当$n\to\infty$，即$\Delta x\to 0$时，折线长$l_n$的极限，就是曲线$AB$的长$l$。即

$$l=\lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x。$$

根据定积分的定义，得到平面曲线的弧长公式为：

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

平面直角坐标系 在平面内有公共原点而且互相垂直的两条数轴，就构成了平面直角坐标系。通常把其中的一条数轴画成水平位置称x轴或横轴，另一条与之垂直的数轴称y轴或纵轴。x轴和y轴统称坐标轴。建立了平面直角坐标系的平面称做坐标平面。

平面的垂线性质 （1）如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。（2）如果一条直线和一个平面垂直，那么经过这条直线的所有平面都和这个平面垂直。

平面的基本性质 平面有下面三个基本性质，这三个性质在现行中学数学课本中作为公理给出的。

公理1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这直线上所有的点都在这平面内。这时可以说直线在平面内，或者说平面经过直线。

公理2 把过不在一条直线上的任意三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面。这时也可以说不共线的三点确定一个平面。

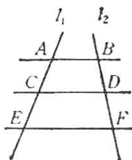
公理3 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于经过这点的一条直线。也就是说，两个平面如果相交，必相交于一条直线。

平行平面的公垂线 和两个平行平面都垂直的直线。

平行四边形的底边 平行四边形的任一条边都可以作为底边。底边和对边的距离叫做这个底边上的高。

平行线等分线段定理 如果一组平行

线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等。如图，若$AB//CD//EF$，且$AC=CE$，则$BD=DF$。由此定理，可得下列推论：①经过梯形一个腰的中点与底平行的直线，必平分另一腰；②经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边。



平面内两点间的距离　若$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$为平面上两点的坐标，则P_1，P_2两点间的距离$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

平面和平面平行的性质　（1）如果两个平行平面分别和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

（2）如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么也垂直于另一个平面。

平面和平面垂直的性质　（1）如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面。

（2）如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内一点而垂直于第二个平面的直线在一个平面内。

（3）如果两个相交平面都垂直于第三个平面，那么它们的交线垂直于第三个平面。

平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

平行于棱锥底面的截面的性质　如果一个棱锥被平行于底面的一个平面所截，那么：①棱锥的侧棱和高被这个平面分成成比例的线段；②所得截面是和底面相似的多边形；③截面面积和底面面积的比等于从顶点到截面和从顶点到底面的距离的平方比。

平面和平面平行的判定定理　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

平面和平面垂直的判定定理　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直。

凸多边形　把多边形的任何一条边向两方延长，其他各边都在延长所得直线的同旁的多边形。如不特别说明，多边形均指凸多边形。

凸多面体　如果把多面体的任意一面伸展成平面，而这个多面体的所有其他各面都在这个平面的同旁时，这样的多面体叫做凸多面体。

凸多面角　将多面角的任何一个面伸展成为平面，其他各面都在这个平面的同侧。

凸多面角的性质定理　凸多面角所有面角的和小于360°。

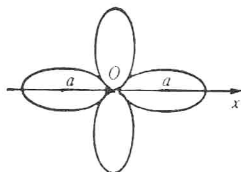
凹多边形　多边形中，若将其中某一条边向两方延长，其他各边不都在延长所得直线同旁的多边形。

归一问题　在解题过程中，需先求出单一量（如单位面积的产量，单位时间的工作量，单位时间的行程，物品的单价，等等）的一类应用题。依求得“单一量”运算步数多少，归一问题又分单归一问题和复归一问题。例

如，5亩地产粮4500斤，问13亩地共产粮多少斤？这是单归一问题。又如，某车间16人8小时可制造零件320个，按此速度，25人制1250个零件，需多少时间？这是复归一问题。

四则运算 数的加法、减法、乘法和除法四种运算的统称。

四叶玫瑰线 在极坐标系中，方程$\rho=a\cos2\theta$所表示的曲线叫做四叶玫瑰线。



四舍五入法 取得近似数的一种方法。其方法是：把要处理的数的某一位数字以后的数字舍去，如果被舍去的部分小于保留部分末位的半个单位时，就只舍去这些数字；否则还要把保留部分末位数字增加1个单位。例如，用四舍五入法处理圆周率π的近似值3.14159265……时，若取四位小数，就可以用3.14159作为π的近似值。

代数 数学的一个分支。顾名思义就是指用符号代替数字进行计算的一种数学方法。创建"代数"这个名称的是九世纪中亚地区的一位数学家、天文学家阿尔·花拉子模（约780—约850年）。830年左右，阿尔·花拉子模根据印度婆罗模笈多(Brahmagupta，约598—665年以后）和古希腊数学家丢番都的著作撰写了一本名为《aldschebr wálmukabala》的书。书名有两个词组成，其中aldschebr意为"还原"，相当于现代代数中的"移项"。Wálmukabala意为"对消"，相当于现代代数中的"化简"或"合并同类项"。书名可译成《还原和对消的科学》。该书包括了当时代数的基本内容。1140年左右，意大利人罗伯特(Robert of chester)将这本书译成拉丁文，其书名译成《al-jabr wálmuguabalah》，这便是代数学的拉丁文名字。后来不知从什么时候起，Wálmugnabalah渐渐被人遗忘了，而前面的字al-jabr又变成了algebra。于是拉丁文的代数名字就被algebra所代替。后来各国的译名都是根据algebra拉丁文读音翻译的。十七世纪西方代数学传入我国时被译为"阿尔热巴拉"。"代数"这个词作为一个专用数学名词在我国使用，最早是在1859年。那年，清代数学家李善兰(1811—1882年)和英国人伟烈亚力（1815—1887年）合译了英国人德·摩尔根（Augustus De Morgan，1806—1871年）的（Elements of Algebra》，定名为《代数学》。"代数"一词在中国正式使用。"代数学"也从此作为一个数学分支在我国出现。如果我们对代数符号不是要求象现在那么简练，那么，代数学的产生还可追溯到更早的年代。西方人一直把古希腊的丢番都当作代数学的鼻祖，其实，我国比丢番都在更早的年代就出现了用文字表达的代数。西方人把这叫做"修辞的"和"位置的"代数学。我国的《九章算术》中的《方程》章，不仅讲了正数和负数，还讲述了多元一次方程组的

解法，只是没有使用符号表示。

代数式 用有限次加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算符号把数和表示数的字母连结而成的式子。单独的数或表示数的字母也是“代数式”。例如，5，$\frac{1}{x}$，a^2+b^2。

代数和 将若干个数量，不改变它们正负的性质而相加，所得的和称为它们的代数和。“代数和”是相对于绝对值的和来说的。例如2，－5，－1和3的代数和是$2+(-5)+(-1)+3=-1$，而绝对值的和是$2+5+1+3=11$。

代数数 满足有理系数代数方程的数。例如，$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$是代数数，它是方程$x^2-3x-1=0$的根。

代数几何 几何学的一门分科。是以代数流形为研究对象。所谓代数流形就是由空间坐标的一个或多个代数方程所确定的点的轨迹。例如三维空间中的代数流形就是代数曲线与代数曲面。直线、圆锥曲线与二次曲面等都是特例。代数几何一般研究三次以上的代数曲线和代数曲面的几何性质。如流形结构，奇点分布等。代数几何的发展与近世代数的发展有着密切联系。

代数方程 由多项式所组成的方程亦称有理整方程。按未知量的个数分别称为一元的、二元的等等。一元代数方程经整理后，可以写成形式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$，其中$a_0$，$a_1$，…，$a_n$是常数，称为方程的系数，$a_0\neq0$，$n$为方程的次数。

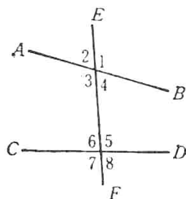
代数运算 加、减、乘、除、乘方和开方都是代数运算。其中加减运算是第一级运算；乘除运算是第二级运算；乘方和开方是第三级运算。

代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果。

代数余子式 把行列式中对应于第i行第j列的元素的余子式乘上$(-1)^{i+j}$后所得到的式子。例如，在行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中，对应于元素$a_2$的代数余子式为

$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

外错角 两条直线（AB、CD）被第三条直线(EF)所截，在所构成的没有公共顶点的各角中，在这两条直线（AB、CD）之外，并且位置交错（即分别在第三条直线EF的两侧）的一对角。如图中的∠1和∠7，∠2和∠8都是外错角。



包含除 用除法运算解决求一个数里有几个另一个数的数学问题。

主视图 见二视图。

主分数线 见繁分数。

立方 求三个相同数乘积的运算。有时也把三个相同数相乘的结果称立方。如$a\cdot a\cdot a=a^3$。“a^3”即表示三个相同数乘积运算，又可看作立方运

算的结果。

立方表 由底数查它的立方幂的数表。

立方根 见方根。

立方根表 用来查得正数的立方根的表。

立体几何 是研究空间图形（由空间的点、线、面所构成，也可以看成是空间点的集合）的性质、画法、计算以及它们的应用的学科。

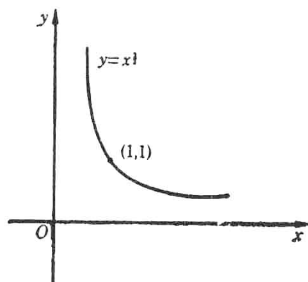
立方和公式 指$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$公式。即两数立方和等于这两数的和与这两数平方和与这两数积的差的积。也可以说两数立方和等于这两数积与这两数差的不完全平方的积。

立方差公式 指$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$公式。即两数立方差等于这两数差与这两数平方和与这两数积的和的积。也可以说，两数立方差等于两数差与这两数和的不完全平方的积。

半径 圆上的点到圆心的距离是圆的半径。球面上的点到球心的距离是球的半径。圆锥曲线（二次曲线）上一点到焦点的距离称为焦半径。

半平面 平面内的一条直线把这个平面分成两部分，每一部分对这个平面来说，都叫做半平面。包括这条直线的半平面叫做闭半平面，否则叫做开半平面。

半立方双曲线 $y^2=\frac{1}{x^3}$的图象是半立方双曲线。图中所示的为它在x轴上方的一个单值支。即$y=x^{-\frac{3}{2}}$的图象。它通过点（1，1），在区间$(0, +\infty)$内是单调减少的。



半立方抛物线 直角坐标方程$y=ax^{\frac{3}{2}}$或参数方程$\begin{cases}x=t^2,\\ y=at^3\end{cases}$的曲线叫做半立方抛物线。它的尖点为$O(0, 0)$，并且曲线在这个点与$x$轴相切，曲率半径为

$R=\frac{\sqrt{x}\,(4+9a^2x)^{\frac{3}{2}}}{6a}$，弧长为$l_{\overline{OM}}=\frac{1}{27a^2}[(4+9a^2x)^{\frac{3}{2}}-8]$，当$a=1$时，直角坐标方程$y^2=x^3$或参数方程$\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3\end{cases}$的曲线是特殊的半立方抛物线。

半开半闭区间 设a，b是两个实数，而且$a<b$，满足$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$的实数x的集合，都叫做半开半闭区间，分别表示为$[a, b)$，$(a, b]$。

半角的三角函数公式 $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$；$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$；$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

必要条件　如果具有性质A的元素也具有性质B，那么便说A推出B，用符号$A\Rightarrow B$表示。因此，如果$A\Rightarrow B$，我们就说A是B的充分条件，B就是A的必要条件，即$B\Rightarrow A$成立。也可以说若A不成立，则B亦不成立。

必然事件和不可能事件　在实际生活和生产中的许多事件中，有些事件，例如"在标准大气压下，水的温度达到100°C时沸腾"，"抛一石块下落"等，在一定条件下是必然要发生的，这种在一定条件下必然要发生的事件，叫做必然事件。有些事件，例如"在标准大气压下且温度低于0°C时，水融化"，在常温下，焊锡熔化"等，在一定的条件下是不可能发生的，这种在一定条件下不可能发生的事件，叫做不可能事件。

记数法　书面写数的方法。一种方法是按口述用文字照样写下来。例如，二千三百五十七，就是用二、千、三、百、五、十、七这七个字表示出来的。另一种方法是用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这十个数字来表示数目，写时，各位的数各用一个数字依次排列起来，从右至左，第一位是个位，写表示"一"的个数的数字，第二位是十位，写表示"一十"的个数的数字，第三位是百，依次类推。这样，不必写出十、百、千、万等名称，就可以从数位上看出那一位的数。同时，每当写满十的必须写成两位数，写满百的必须写成三位数，……。如果出现某数位是空的，必须用"0"补上这个空位。例如，三千五百六十八可记作3568；七百零二，可写702等等。以上用阿拉伯数字记数的方法，就是我们所说的阿拉伯数字的十进位记数法。另外，还有常用的二进制记数法、八进制记数法、六十进制记数法等。

出生率　一年内活产婴儿数与同年人口总数之比，即出生率

$$=\frac{\text{一年内活产婴儿数}}{\text{同年人口总数}}\times 1000‰。$$

出生率常用千分数表示。

出苗率　种子出苗数与播种种子数的百分率，即出苗率$=\frac{\text{种子出苗数}}{\text{播种种子数}}\times 100\%$。

出粉率　粮食加工中，出粉重量与加工粮食重量之百分率，即出粉率

$$=\frac{\text{出粉重量}}{\text{加工粮食重量}}\times 100\%。$$

加号　表示加法运算的符号。记作"+"。德国数学家魏德曼于公元1489年在他的数学著作中首先使用加号"+"。他把一条横线和一条竖线合在一起表示合并（相加）的意思。但直到1514年以后才为大家所公认作为加法运算符号。德国数学家莱布尼兹曾提出用"U"表示相加。这个符号现在主要用于集合论中，表示两个集合的"并集"。

加法　求两个数的和的运算。记作"$a+b=c$"，读作"a加b等于c"。为了便于小学生接受，在小学数学课本中把加法定义为：把两个数合并成一个数的运算，叫做加法。"在$a+b=c$中，a、b都叫做加数，c叫做和数。

自然数加法有两种定义方法。一种是以集合为基础概念，另一种是以

自然数列为基础概念。

定义（1）：设A、B为两个不含有公共元素的有限集合，它们的基数分别为a、b，如果它们的并集C的基数为c，那么c就叫做a与b的和。求和的运算叫做加法。

定义（2）：设a、b为两个自然数，如果在自然数列中的数a之后再数出b个数来，恰好对应于自然数列中的c，那么数c就叫做ab的和。求和的运算叫做加法。

现行通用小学数学课本是以定义（1）为理论基础来描述加法概念的。

加数 见加法。

加法原理 做一件事，完成它可以有几类办法，在第一类办法中有m_1种方法，在第二类办法中有m_2种方法，…，在第n类办法中有m_n种方法。在m_1，m_2，…，m_n种方法中，任何两种方法都不相同，而且只要选择其中任何一类中的任何一种方法，这件事就可以完成，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法。例如，从A地到B地，可以乘火车，也可以乘轮船或汽车，一天中，火车有四班，汽车有两班，轮船有三班，那么一天中从A地到B地共有$N=4+2+3=9$种不同走法。

加权平均数 在n个数x_1，x_2，…，x_n中，x_1出现了f_1次，x_2出现了f_2次，x_k出现了f_k次（这里$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么平均数

$$\overline{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i$称做加权平均数。其中$f_1$，$f_2$，…，$f_k$，称做权。

加法交换律 两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变。设a、b表示任意两数，则有$a+b=b+a$。利用这个规律，可以对加法进行验算和使某些加法运算变得简便。交换律可以推广到多个数相加。

加法运算律 加法交换律和加法结合律的统称。

加法结合律 三个数相加，先把前两个数相加，再加上第三个数，或者先把后两个数相加，再加上第一个数，它们的和不变。设a、b、c为任意三数，则$(a+b)+c=a+(b+c)$。运用这个规律，可以使某些加法运算简便。加法结合律可以推广到更多的数相加。

加法的验算方法 （1）用加法验算：把加数的位置交换相加，看所得结果是否与原结果相同。（2）用减法验算：从和中减去一个加数，看所得差是否等于另一个加数。

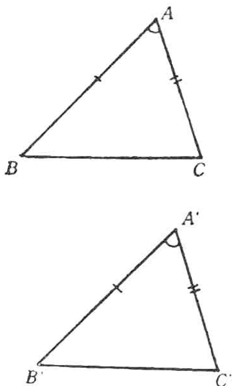
加法简单应用题 用加法解答的简单应用题。有两种基本类型：（1）求总和的加法应用题；（2）求比一个数多几的数是多少的加法应用题。

边边边定理 有三边对应相等的三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）。

边角边定理 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）。现行中学教材使用的是扩大了的公理系统（见公理），以利于学生接受，这样只保证公理体系的相容性（不矛盾性）未能保证其独立性和完备性。实际上，本命题的真实性可以用叠合法证

明，因而亦称“边角边定理”。证明方法如下：

已知：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$。求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。证明：把$\triangle ABC$放到$\triangle A'B'C'$上，使$A$点与$A'$点重合，将边$AB$顺着$A'B'$落下，让$C$点与$C'$在$A'B'$的同旁。$\because AB=A'B'$，$\therefore B$点与$B'$点重合(线段相等的定义)。$\because\angle A=\angle A'$，$\therefore$射线$AC$与$A'C'$重合（角相等的定义）。又$\because AC=A'C'$，$\therefore C$点与$C'$重合（线段相等的定义）。$\because B$、$C$两点分别与$B'$、$C'$重合，$\therefore$线段$BC$与$B'C'$重合（经过两点只能做一条直线），$\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（全等三角形的定义）。



发芽率　发芽种子粒数与供试验种子总粒数的百分率，即

$$发芽率=\frac{发芽种子粒数}{供试验种子总粒数}\times100\%。$$

对数　如果$a(a>0,\ a\neq1)$的b次幂等于N，即$a^b=N$，数b就称做以a为底的N的对数，记做$\log_aN=b$，其中a称做底数（简称底），N称做真数。对数产生于17世纪。当时，航海人员要定出船只的航程和位置，天文工作者要处理观察行星所得的数据，都必须对多位数进行计算，对数就是适应这种需要而产生的。英国人约亨·耐普尔（John Napier，1550—1617年）于1614年发表了第一张对数表，而且给对数署名为Logarithm，意思是“比之数”，现在的对数符号便是取它的前三个字母。“比”是指等比数列中的公比，有时他也把对数叫做“人造数”。瑞士仪表技师乔伯斯特·布尔基（Jobst Burgi，1552—1632年）于1603—1611年间制成对数表，但发表在1620年。高斯、柯西进一步把对数由实数扩展到复数。对数与对数表于十七世纪中叶传入我国。当时，在$\log_aN=b$中，“N”叫做“真数”，而“b”叫做“假数”。“真数”与“假数”对列成表，所以叫“对数表”。后来，“假数”一词渐渐不用，只把b叫做N的对数。

对应边　两个多边形能够相似或全等时，位置相对应的边。特殊地，两个多边形（三角形）全等时，将它们重合在一起，互相重合的边叫做全等多边形（三角形）的对应边。

对应角　两个多边形能够相似或全等时，位置相对应的角。特殊地，两个多边形（三角形）全等时，将它们重合在一起，互相重合的角叫做全等多边形（三角形）的对应角。

对顶角　一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，这两个角叫做对顶角。对顶角相等。

对称点　对于平面上两个点(A、B)，如果沿着一条直线对折，这两个点

(A、B)能够互相重合，则称这两个点(A、B)是以这条直线为对称轴的对称点，或称这两个点(A、B)关于这条线对称；对于平面上两个点(A、B)如果绕一个定点(O)旋转180°，这两个点(A、B)互换位置，则称这两个点(A、B)是以这个定点(O)为对称中心的对称点，或称这两个点(A、B)关于定点(O)对称。由此定义可知：平面上两个点的对称轴是连结这两个点的线段的垂直平分线；两个点的对称中心是连结这两个点的线段的中点。

对称轴 ①对于平面上的两个点，如果沿着一条直线对折，这两个点能够互相重合，则称这两个点关于这条直线对称，这条直线叫做这两个点的对称轴；②对于平面上的两个图形，如果把其中的一个图形沿着某一条直线对折，能够与另一个图形重合，则称这两个图形关于这条直线对称，这条直线叫做这两个图形的对称轴；③对于一个平面图形，如果沿着某一条直线对折，直线两旁的部分能够重合，即图形与它自身重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做该图形的对称轴；④在空间，更一般地，当一个图形下绕一直线 l 旋转，而每旋转一个最小旋转角 $\varphi=\frac{360°}{n}$ 时（$n\geq 2$的正整数），图形下就出现一次自身完全重合状态，则称直线l是图形 F 的n阶对称轴，平面几何中的对称轴是指2阶（次）对称轴。当然，任何阶（次）数为偶数的对称轴都可以认为是2阶(次)对称轴。如果两个图形关于某直线对称，那么，连结对应点的线段被对称轴垂直平分；它们的对应线段所在的直线或者平行，或者相交于对称轴。

对数表 求某数的对数的尾数表。中学生使用的对数表是常用对数表。这个对数表是一个4位数表。

对应顶点 两个多边形能够相似或全等时，位置对应的顶点。特殊地，两个多边形（三角形）全等时，将它们重合在一起，互相重合的顶点叫做全等多边形（三角形）的对应顶点。

对称中心 见中心对称及中心对称图形。

对数方程 在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程。例如，$\lg(x^2-3)=\lg(3x+1)$，都是对数方程。在中学阶段只能解一些特殊的对数方程，通常的解法是转化为代数方程来解。因为对数的真数必须是正数，而在解对数方程的变形中，常常使真数的允许值范围扩大或缩小，可能会产生增根或丢根，所以必须验根，舍去增根及找回丢根。

对数函数 函数 $y=\log_a x$ 叫做对数函数，其中a是大于0且不等于1的常数。它的定义域是大于0的实数，值域是全体实数。例如，$y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}}x$都是对数函数。

对称多项式 在多元多项式中，如果任意两个元互相交换所得到的结果都和原式相同，则称此多项式是关于这些元的"对称多项式"。例如，$xy+xz+yz$与$x^2+y^2+z^2$都是关于 x，y，z，的对称多项式。

对数恒等式 公式$a^{\log_a N}=N$。

对数运算的法则 (1)两个正数积的

对数，等于同一底数的这两个数的对数的和。即 $\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N$。（2）两个正数商的对数，等于同一底数的被除数的对数减去除数的对数的差。即 $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$。（3）一个正数的幂的对数，等于幂的底数的对数乘以幂指数。即 $\log_a M^n=n\log_a M$。（4）一个正数的算术根的对数，等于被开方数的对数除以根指数。即 $\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$。

对数的换底公式　设 a 与 b 为不等于 1 的正数，$N>0$，则有

$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$，此公式叫做对数换底公式。

对数函数的导数　一般是指以 e 为底的自然对数和以 a 为底的对数的求导而言的。

（1）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$。

其证明过程是：$y=f(x)=\ln x$，

$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}$ $=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$。$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}$。$\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$。令 $\alpha=\frac{\Delta x}{x}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$。令 $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=u$，根据上式，当 $\Delta x\to 0$ 时，$u\to e$。由于对数函数是连续函数，$\ln u$ 在当 $u=e$ 处连续，于是有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim\limits_{u\to e}\ln u=\ln e$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$。

$$(2)\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}。$$

其证明过程是：$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$。因为 $\ln a=\frac{\log_a a}{\log_a e}=\frac{1}{\log_a e}$，所以 $(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}$。

对数函数的图象和性质　列表如下：

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	（1）是增函数。（2）图象过(1，0)点，即 $\log_a 1=0$。（3）图象在 y 轴的右侧，即 $x>0$。（4）当 $x>1$ 时 $y>0$，当 $x=1$ 时 $y=0$，当 $0<x<1$ 时 $y<0$。	（1）是减函数。（2）图象过(1,0)点，即 $\log_a 1=0$。（3）图象在 y 轴的右侧，即 $x>0$。（4）当 $x>1$ 时 $y<0$，当 $x=1$ 时 $y=0$，当 $0<x<1$ 时 $y>0$。

式题 把数用运算符号和顺序符号连接起来构成的数学题目。例如 $365+〔83-(4-8\times\frac{1}{4})〕\div 9$。

巩固率 坚持学习人数与入学人数之百分率，即

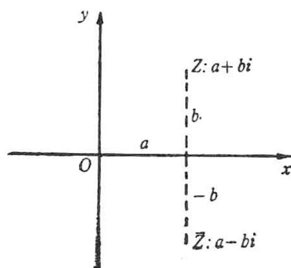
$$巩固率=\frac{入学人数-流失人数}{入学人数}\times 100\%。$$

扩大 指相对于原数量而言的。即是在原数量基础上的扩充、扩展或放大。它常与“倍”联系起来使用。如扩大3倍就是原数量乘以3。在应用题中，常有“扩大了”、“扩大到”等词语。其意是：“扩大了”多少倍＝原数量＋原数量×倍数＝原数量×（1＋倍数）；“扩大到”多少倍＝原数量×倍数。

地积 土地表面的面积。

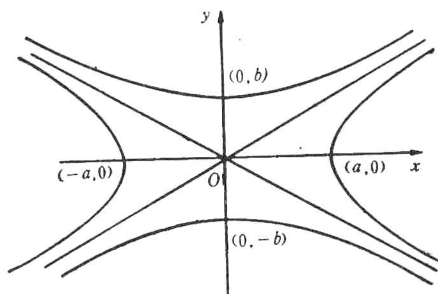
地积单位 用来度量地积的单位。常用的公制地积单位有：公顷、公亩、公厘。它们之间的进率是：100公亩＝1公顷，100公厘＝1公亩。常用的市制地积单位有：顷、亩、分。它们之间的进率是：100亩＝1顷，10分＝1亩。

共轭复数 实部相等，虚部互为相反数的两个复数（当虚部不等于零时，也叫做互为共轭虚数）。复数 z 的共轭复数用 $\overline{z}$ 来表示，即复数 $z=a+bi$ 的共轭复数是 $\overline{z}=a-bi$。实数 a（即虚部为零的复数）的共轭复数仍是 a 本身。例如 $3-2i$，$-4i$，7 的共轭复数分别是 $3+2i$，$4i$，7。复平面内表示两个互为共轭复数的点 Z 与 $\overline{Z}$ 关于实轴对称。如图。



共轭根式　当 A、B 是两个有理式，$\sqrt{A}$、$\sqrt{B}$ 中至少有一个无理式时，则称 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 和 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 互为共轭根式。由于这两式的积是有理式，因此亦称互为有理化因式。

共轭双曲线　两条双曲线，如果其中一个的实轴与虚轴分别是另一个的虚轴与实轴，那么，这两条双曲线互为共轭双曲线。它们的标准方程分别为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。共轭双曲线有相同的渐近线。



共轭复数的性质　两个共轭复数 $z=a+bi$，$\bar{z}=a-bi$，有以下性质：（1）两个共轭复数的模相等，即 $|z|=|\bar{z}|$。（2）两个共轭复数的和是一个实数，这个实数等于其中每一个复数的实部的两倍，即 $z+\bar{z}=2a$。（3）两个共轭复数的积是一个实数，这个实数等于其中每一个复数的模的平方，即 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$。（4）两个复数的和、差、积、商的共轭复数分别等于这两个复数的共轭复数的和、差、积、商，即，$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$，$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2\neq0)$。

权　见加权平均数。

过剩近似值　大于准确数的近似数。例如，3.15是 π 的精确到0.01的过剩近似值。

有理式　整式和分式的统称。

有理数　正整数、负整数、正分数、负分数以及零统称为有理数，或说，整数、分数和零的统称。任一有理数都可以写成 $\frac{m}{n}$ 的形式，其中 m 和 n 都是整数，且 n 不等于零。

有向直线　规定了正方向的直线。

有向线段　规定了起点和终点的线段。

有穷数列　项数有限的数列。

有限小数　小数部分的位数是有限的。

有限集合　含有有限个元素的集合。例如 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\{x|-3<x<8$，且 $x\in z\}$ 都是有限集合。

有界数列　每一项的绝对值都小于某一正数的数列。

有效数字　一个近似数，从它左边第

一个不是零的数字起，到最后一位数字止，所有的数字，都称做这个数的有效数字。例如，0.03050是一个近似数，有效数字是3，0，5，0。

有理整式 单项式和多项式的统称。有时简称整式。

有理化因式 见共轭根式。

有理整方程 见代数方程。

有心圆锥曲线 具有中心的圆锥曲线叫做有心圆锥曲线，也叫做有心二次曲线，椭圆、双曲线都是有心圆锥曲线。

有余数的除法 设已知两数a、b(b是自然数)，求两个整数q、r，使q、r满足$a=bq+r$，且$r<b$，记作的$a\div b=q$（余r），或记作$b\cdots\cdots=q\cdots\cdots r$。这样的运算叫做有余数除法。

有向线段的数量 一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量，或叫有向线段的数值，对于有向线段AB和BA的数量，有以下的关系：$AB=-BA$，就是$AB+BA=0$。此外，有向线段AB的数量等于它的终点的坐标，减去始点的坐标。设数轴x上A点的坐标是x_1，B点的坐标是x_2，则$AB=x_2-x_1$。

$$\overset{A(x_1)\quad B(x_2)}{\longrightarrow x}$$

有限简单连分数 含有有限个项的简单连分数。其一般形式为

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}。$$

可简记为 $a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_n}$或$[a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n]$。例如，

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}$$

是个连分数，可记作$3+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7}$或$[3, 1, 2, 5, 7]$。

有理数加法法则 同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大绝对值减去较小的绝对值；互为相反数的两个数相加得零；一个数同零相加，仍得这个数。

有理数除法法则　两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除，零除以任何一个不等于零的数都得零。零不能作除数。

有理数乘法法则　两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数同零相乘，都得零。

有理数减法法则　减去一个数，等于加上这个数的相反数。

有向线段的绝对值　线段 AB 的长度，就是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，也叫做有向线段的绝对值。记作 $|\overrightarrow{AB}|$。

有向线段的加法定理　设 A、B、C 是同一条轴上的三个点，那么不论它们的位置怎样，都有 $AB+BC=AC$ 的关系，该定理叫做有向线段的加法定理，又叫沙尔公式。还可以推得，设 A_1，A_2……A_n 是同一直线上的 n 个点，那么不论它们的位置怎样，都有 $A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$ 的关系。

有余数除法的整除性　（1）在有余数的除法里，若被除数和除数能被同一自然数整除，则余数也能被这个自然数整除。例如，32和10均能被2整除，则32÷10＝3……2，余数2也能被2整除。（2）在有余数的除法里，若除数和余数是同一自然数的倍数，则被除数也是这个自然数的倍数。例如，在136÷16＝8……8中，16、8均是4的倍数，136也是4的倍数。

有理数大小比较法则　正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数，两个正数，绝对值大的数大，两个负数，绝对值大的反而小。在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大。

百分比　见百分数。

百分号　表示一个分数的分母是100的记号，用“%”表示。

百分法　应用百分数及求百分率的方法。

百分率　见百分数。

百分数　指分母是一百的分数。常用它来表示一个数是另一个数的百分之几。百分数又称百分比或百分率。百分数一般不写成分数的形式，而用符号“%”表示。符号“%”称为百分号。例如，$\frac{1}{100}$ 表示为1%，$\frac{38}{100}$ 表示为38%等等。

百分数化小数　先将百分号去掉，再将小数点向左移两位（位数不够时可补0）。例如，25%＝0.25，32.8%＝0.328，9%＝0.09等。

百分数化分数　先按分母为100写成分数形式，再约成最简分数。例如，

$$25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4},\quad 40\%=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},$$

$$12.5\%=\frac{12.5}{100}=\frac{1}{8}\text{等。}$$

百分数应用题　与百分率有关的一类应用题。例如，与存款利率、发芽率、及格率等有关的一类应用题，均属百分数应用题。是分数应用题的一部分。

成数　表示一个数是另一个数的十分之几，即十分数，十分之几就是几成。例如，三成，就是十分之三；四成五，就是十分之四点五。成数常用来表示工农业生产的增长情况。

成活率　种植的成活株数与种植的总株数的百分率，

$$\text{即成活率} = \frac{\text{成活株数}}{\text{种植株数}} \times 100\%。$$

成反比例的量 有两种定义方法：（1）两种相关联的量，若一种量扩大（或缩小）若干倍，则另一种量反而缩小（或扩大）相同的倍数，则这两种量称为成反比例的量。（2）两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，若这两种量中相对应的两个数的积一定，则这两种量叫做成反比例的量，即若$x \cdot y = k$(定值)，则x、y是成反比例的量。

成正比例的量 两种定义方法：（1）两个相关联的量，若一种量扩大（或缩小）若干倍，则另一个量也扩大（或缩小）相同的倍数，则这两种量叫做成正比例的量。（2）两个相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，若这两种量中相对应的两个数的比值（即商）一定，则这两种量叫做成正比例的量，即若$\frac{y}{x} = k$(定值），则x、y是成正比例的量。

成反比例量的性质 （1）若两种量成反比例，则一种量的任意两个数值的比，等于另一种量的两个对应数值的反比。（2）若两个量成反比例，则它们任意一对对应数值的积是一个常数。

成正比例量的性质 （1）若两种量成正比例，则一种量的任意两个数值之比，等于另一种量的两个对应数值之比。（2）若两个量成正比例，则它们任意一对对应数值的比是一个常数。

轨迹的基本属性 符合某个条件的点的轨迹是图形F，也就是说：（1）若点A符合某个条件⇒点A在图形F上；（2）若点A'在图形F上⇒点A'符合某个条件。用以上两个命题的等价命题表述为：(1′)点B不在图形F上⇒点B不符合某个条件；(2′)点B'不符合某个条件⇒点B'不在图形F上。（1）和（1′）保证了没有一个符合条件的点不在图形F上，亦即符合条件的点一个也没有遗漏掉，这叫做轨迹的完备性；（2）和（2′）保证了图形F上的点没有掺杂一个不符合条件的点，这叫做轨迹的纯粹性。两方面合起来，保证了轨迹上的点不漏不杂。完备性和纯粹性是轨迹的基本属性。轨迹命题的证明必需完成以下两步：（1）证完备性；（2）证纯粹性。

毕业率 毕业生数与入学人数之百分率，即$\text{毕业率} = \frac{\text{毕业生数}}{\text{入学人数}} \times 100\%$。

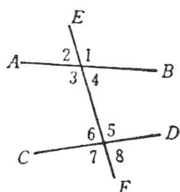
毕达哥拉斯数 即勾股数组，详见勾股数组。

毕达哥拉斯定理 见勾股定理。

同心圆 圆心相同，半径不相等的圆。

同名数 单位相同的名数。

同位角 两条直线（AB、CD）被第三条直线（EF）所截，在所构成的没有公共顶点的各角中，位置相同（即分别在两直线AB、CD的相同的一侧，并且都在第三条直线EF的同旁）的一对角。如图中的$\angle 1$和$\angle 5$，$\angle 2$和$\angle 6$，$\angle 3$和$\angle 7$，$\angle 4$和$\angle 8$等都是同位角。

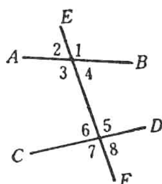


同类项　多项式中所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项。所有常数项都是同类项。

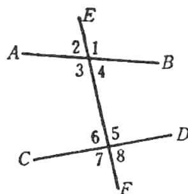
同次根式　根指数相同的根式。

同类根式　化成最简式以后，被开方数和根指数分别相同的几个根式。例如，$\sqrt{12}$，$\sqrt[6]{27}$，$\sqrt{\frac{1}{3}}$是同类根式。因为它们化简后分别是$2\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$\frac{1}{3}\sqrt{3}$。

同旁内角　两条直线（AB、CD）被第三条直线（EF）所截，在所构成的没有公共顶点的各角中，在这两条直线（AB、CD）之间，并且在第三条直线（EF）同旁的一对角。如图中的∠3和∠6，∠4和∠5等都是同旁内角。



同旁外角　两条直线（AB、CD）被第三条直线（EF）所截，在所构成的没有公共顶点的各角中，在这两条直线（AB、CD）之外，并且在第三条直线（EF）同旁的一对角。如图中的∠1和∠8，∠2和∠7都是同旁外角。



同解方程　两个方程，如果第一个方程的解，都是第二个方程的解；第二个方程的解，也都是第一个方程的解，那么这两个方程叫做同解方程。如方程$\frac{5x-1}{6}=\frac{7}{3}$和方程$5x-1=14$就是同解方程。

同向不等式　如果几个不等式的每一个的左边都大于右边，或者每一个左边都小于右边，那么这几个不等式叫做同向不等式。

同解不等式　解集相同的两个或几个不等式。

同解方程组　解完全相同的两个或几个方程组。

同类二次根式　被开方数相同的最简二次根式。

同底数幂的除法法则　底数不变，指数相减，即 $a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0)$。

同底数幂的乘法法则　底数不变，指数相加，即 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$。

同分母的分式加减法法则　同分母的分式相加减，把分子相加减，分母不变，即$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$。

同角三角函数的基本关系式　（1）倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$；$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$。（2）商数关

系：$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

(3)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha, 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$。上面这些关系式都是恒等式，即当角$\alpha$取使关系式的两边都有意义的任意值时，关系式两边的值都相等。

因式 如果一个多项式能整除另一个多项式，则称前者为后者的因式。例如，$a+b$是a^2-b^2的因式。

因数 见乘法。

年龄问题 与人的年龄有关的一类数学应用问题。其特点是，两人的年龄差是不变的，而年龄的倍数差却历年不同。其基本数量关系是：

年龄差÷（倍数－1）＝成倍数时小的年龄；
成倍数时小的年龄－小的现年＝几年后的年数；
小的现年－成倍数时小的年龄＝几年前的年数；
几年后大小年龄之和÷（倍数＋1）＝几年后小的年龄；
几年后小的年龄－几年后的年数＝小的现年。

曲线 在平面上或空间中按一定条件运动的点的轨迹称为曲线。例如，平面上一动点到一定点的距离保持定长，它的轨迹是一个圆；又如在圆柱面上一动点的运动方向恒与母线或定角时，其轨迹为螺旋线。当曲线位于平面上或空间中时分别称为平面曲线或空间曲线。

曲线的方程 在平面直角坐标系中，如果一条曲线和一个二元方程的实数解有如下关系：(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解；(2)以这个方程的解为坐标的点是曲线上的点，那么这个方程就叫做这条曲线的方程；反过来，这条曲线就叫做这个方程的曲线。

曲线的切线 如果P、Q是直线和曲线的两个相邻的交点，当Q点沿着曲线无限接近于P时，直线PQ的极限位置PT叫做这条曲线上经过P点的切线，P点叫做切点。

曲线的割线 和一条曲线有两个或两个以上公共点的直线叫做这条曲线的割线。

曲线的对称性 在曲线方程中，若把x换成$-x$时，方程不变，则曲线关于y轴对称；若把y换成$-y$时，方程不变，则曲线关于x轴对称；若把x、y同时换成$-x$、$-y$时，方程不变，则曲线关于原点对称；若把x、y互换时，方程不变，则曲线关于直线$y=x$对称，若把x、y分别换成$-y$、$-x$时，方程不变，则曲线关于直线$y=-x$对称。

曲线方程的讨论 一般从以下几个方面讨论：(1)曲线在坐标轴上的截距；(2)曲线的对称性；(3)曲线的范围。

曲线的参数方程 在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标x、y都是某个变数t的函数$\begin{cases}x=f(t),\\y=Q(t)\end{cases}$，并且对于$t$的每一个允许值，由方程组所确定的点$M(x、y)$都在这条曲线上，那么方程组就叫做这条曲线的参数方程。联系x、y之间的关系的变数叫做参变数，简称参数。

曲线在一点的法线　经过切点并且垂直于曲线的切线的直线。

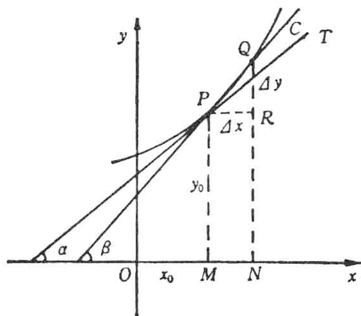
曲线的极坐标方程　在极坐标系中，曲线可以用含有ρ、θ这两个变数的方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 来表示，这种方程叫做曲线的极坐标方程。这时，以这个方程每一个解为坐标的点都是曲线上的点，曲线上每一个点的坐标中至少有一个是这个方程的解。

曲线在平面内的射影　曲线在平面内的射影，就是这条曲线上所有的点在这平面内射影的集合。

曲线在坐标轴上的截距　原点到曲线与坐标轴的交点的有向线段的数量。曲线在x 轴上的截距简称为横截距，在y 轴上的截距简称为纵截距。在曲线方程 $F(x、y)=0$ 中令 $y=0$，解得 x 的实数解就是它的横截距。在曲线方程$F(x、y)=0$ 中，令 $x=0$，解得y的实数解就是它的纵截距。

曲线的普通方程化成参数方程　在平面直角坐标系中，如果已知变数x，y 中的一个与参数 t 之间的关系，例如 $x=f(t)$，把这个关系式代入曲线的普通方程，求得另一个变数与参数间的关系 $y=g(t)$，那么$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$就是曲线的参数方程。参数可以根据图形的特点或所研究问题的性质来选定。由于选择的参数不同，因而关系式 $x=f(t)$ 可以有各种不同的形式，所以同一条曲线的参数方程也可以有不同的形式。

曲线$y=f(x)$在点x_0处的切线和切线斜率　在平面几何中定义过，和圆有唯一公共点的直线就叫做圆的切线。这个定义对于一般的曲线$y=f(x)$是不适用的。为说明一般曲线$y=f(x)$的切线，请看图。



设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象。在曲线C上取一点$P(x_0,y_0)$ 及点P附近的任一点$Q(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$，过 P、Q 两点作割线，并作 $MP\perp Ox$，$NQ\perp Ox$，$PR\perp NQ$。又设割线PQ的倾斜角为β，则

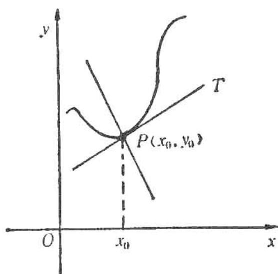
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}QPR=\mathrm{tg}\beta$，这就是割线$PQ$的斜率。

当点Q沿着曲线 C 无限地趋近于点P，即$\Delta x\to 0$ 时，割线PQ绕着点P转动，它的极限位置PT叫做曲线C在点 P 处的切线。这时若函数 $y=f(x)$在点x_0处可导，则当$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$，而$\mathrm{tg}\,\beta$以$PT$的斜率 $\mathrm{tg}\alpha$（α是PT的倾斜角）为极限，所以$f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$。因此，函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数 $f'(x_0)$的几何意义，就是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的切线的斜率。这样，求曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的切线，只要先求出函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$，然后根据直线方程的点斜

式，就得到切线的方程 $y-y_0=f'(x)(x-x_0)$，这里$y_0=f(x_0)$。但是 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，导数不存在，这时切线PT平行于y轴，切线的方程为 $x=x$。

曲线$y=f(x)$在点x_0处的切线斜率$\text{tg}\alpha=f'(x_0)$，决定着切线的倾斜程度。当$\text{tg}\alpha>0$时，切线PT过一、三象限；当$\text{tg}\alpha<0$时，切线PT必过二、四象限，倾角α为钝角。根据$\text{tg}\alpha$的增减性，$|\text{tg}\alpha|$越小，切线PT与x轴就越接近。特别地 $\text{tg}\,\alpha=0$，即 $\alpha=0$，或 $\alpha=\pi$，切线 PT 与x轴重合或与x轴平行。函数$f(x)$在点x_0处有导数，则在该点处函数 $f(x)$ 的曲线必有切线。反之，函数 $f(x)$ 的曲线在点 x_0 处有切线。则在该点处函数 $f(x)$ 不一定可导。如函数 $y=\sqrt[3]{x}$在点 $x=0$处有与x轴垂直的切线，但在该点处不可导。

曲线$y=f(x)$在点x_0处的法线和法线方程 经过切点 $P(x_0, y_0)$ 且与切线PT垂直的直线叫做曲线C在点P处的法线(如图)。由解析几何知道，如果两条有斜率的直线互相垂直，那么，它们的斜率互为负倒数。已知曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率为$f'(x_0)$，那么，当$f'(x_0)\neq 0$时，曲线在该点处的法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，法线的方程为 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。当$f'(x_0)=0$时，法线平行于$y$轴，法线的方程为$x=x_0$。当切线$PT$平行于$y$轴时，法线平行于$x$轴，这时法线的方程为$y=y$。

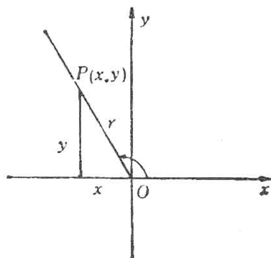


任意角的三角函数 如图，对于任意角 α，以角的顶点为原点，角的始边为x轴的正方向，建立平面直角坐标系xoy。设角α的终边上任意一点P的坐标是(x, y)，它与原点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，则比值$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$分别称为角α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，并分别记做

正弦 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，余弦 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，

正切 $\text{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}$，余切 $\text{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}$，

正割 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$，余割 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$。



对于确定的角 α，这六个比值的大小和P点在角 α 的终边上的位置没有关系。当角α的终边在x轴上时，即$\alpha=k\pi$（或 $\alpha=k\cdot180^\circ$），$k\in z$时$\mathrm{ctg}\alpha$，$\csc\alpha$无意义（因为$y=0$）；当角 α 的终边在 y 轴上时，即 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$（或$\alpha=k\cdot180^\circ+90^\circ$），$k\in z$ 时，$\mathrm{tg}\alpha$，$\sec\alpha$无意义（因为$x=0$）。对于确定的角 α，上面六个比值都是一个确定的实数。这就是说，正弦、余弦，正切、余切，正割、余割分别可看成从一个角的集合到一个比值的集合的映射，它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，这些函数都叫做三角函数。按通常习惯，用x表示自变量，用 y表示函数，则它们依次表示为：正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$，余切函数 $y=\mathrm{ctg}\,x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数$y=\csc x$。

由于用弧度制来度量角时，使角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系。对于每一个实数，对应着一个确定的角，而这个确定的角又对应着它的三角函数值，因此，三角函数可以看成以实数为自变量的函数。

自变量　见函数。

自然数　用来表示物体个数1、2、3、4、5、6、……的数。通常称正整数。“1”是自然数的单位，也是自然数中最小的一个。“1”再添上“1”就得到自然数“2”，“2”再添上“1”就得到自然数“3”，等等，任何一个自然数，都可以由若干个“1”合并而成。自然数的个数是无限的，没有最大的自然数。

自然对数　以e(无理数$e=2.71828\cdots$）为底的对数叫做自然对数。通常记作$\ln N$。

自然数列　把自然数按照从小到大的顺序排列起来构成的数列。

向量　既有方向又有大小的量。向量可以用有向线段来表示：有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。

向量的模　有向线段的长度代表向量的大小，向量的大小就是向量的模。例如，始点是A，终点是B 的向量，记作 $\overrightarrow{AB}$。有时也用小写字母 $\vec{a}$、$\vec{b}$、…或用黑体字母$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$…来记向量。向量 $\overrightarrow{AB}$的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$\vec{a}$ 的模，记作$|\vec{a}|$。

行列式　将n^2个数a_1，a_2，…，a_n；$b_1,b_2,\cdots$，b_n；…；$l_1,l_2,\cdots,l_n$排成n行（指横排）及n列（指竖排）的正方形，并在两旁各加一条竖线，

即
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}$$

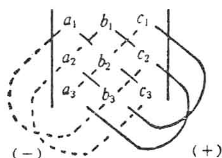
称做 n 阶行列式。其中每一个数叫做行列式的一个元素。

当 $n=2$时，称为二阶行列式。

即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，且$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$。当 $n=3$时，称为三阶行列式。即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，

且 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$。

三阶行列式是按对角线法则展开的，即图中实线上三个元素的积，添上正号；虚线上三个元素的积，添上负号。于是三阶行列式即为上面表达式



中六项之和。这种对角线方法展开三阶行列式的法则，不适用于高阶的行列式。在中学里，主要研究二、三阶行列式。

行列式的元素　见行列式。

行列式的性质（1）把行列式的各行变为相应的列，所得行列式与原行列式相等。以三阶行列式为例，

即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

（2）把行列式的两行（或两列）对调，所得行列式与原行列式绝对值相等，符号相反。以三阶行列式为例，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质（2）的推论：如果行列式某两行（或两列）的对应元素相同，那么行列式等于零。（3）把行列式的某一行（或一列）的所有元素同乘以某个数k，等于用数k乘原行列式。以三阶行列式为例，

即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。性质（3）可得以下推论：①行列式的某一行（或一列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面；②如果行列式某一行（或一列）的所有元素都是零，那么行列式等于零。（4）如果行列式某两行（或两列）的对应元素成比例，那么行列式等于零。以三阶行列式为例，即 $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$。

（5）如果行列式的某一行（或一列）的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应行（或列）而其余行（或列）不变的两个行列式的和。以三阶行列式为例，

即 $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

（6）把行列式某一行（或一列）的所有元素同乘以一个数k，加到另一行（或另一列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等。以三阶行列式为例，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

行列式按一行（一列）的展开　行列式等于它的任意一行（或列）的各元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和。即行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n),$$

其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。例如$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$。

全集　全集是相对于它的一切子集而言的。在研究集合与集合的关系时，在某种情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合叫做全集，记作I。全集包含了所需研究的各个集合的全部元素。例如，在研究数集时，常常把实数集R作为全集。在研究图形的集合时，常常把所有的空间图形组成的集合作为全集。

全排列　从n个不同的元素中，每次选取n个不同元素，按一定顺序排成一列，叫做全排列。

全等三角形　能够完全重合的三角形。

全概率公式　一批外形相同的某种元件，是由元件一厂、二厂、三厂、…、n厂生产的。从这批元件中任取一只元件，必然是这n个元件厂中某一个厂的产品。如果以B_i表示"任取一只元件为元件i厂产品"这一事件（$i=1,2,\cdots,n$），那么，B_1，B_2，…，B_n是一组互不相容的事件，而且$B_1+B_2+\cdots+B_n$是一个必然事件。这时叫做事件B_1，B_2，…，B_n构成一个互不相容事件完备群。如果以A

表示“取到的元件为次品”这一事件，那么因为元件必然是元件一厂，二厂，……或n厂中某一个厂的产品，即事件A总是事件AB_1，AB_2…，AB_n中的一个，故

$$A=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n。$$

由于B_1，B_2，…，B_n互不相容，所以AB_1，AB_2，…，AB_n也互不相容。由概率加法公式和乘法公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB_1+AB_2+\cdots+AB_n)\\&=P(AB_1)+P(AB_2)\\&\quad+\cdots+P(AB_n)\\&=P(B_1)P(A|B_1)\\&\quad+P(B_2)P(A|B_2)\\&\quad+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)。\end{aligned}$$

这个公式就是全概率公式。

合数 在自然数中，除了能被1和它本身整除外，还能被其他数整除的数。例如，4、6、8、9、10、12、15、……。

合格率 产品加工中，合格品数与全部加工产品数之百分率，即合格率

$$=\frac{\text{合格品数}}{\text{加工产品数}}\times 100\%。$$

合比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

称为合比定理。$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

称为分比定理。

合比性质 一称合比定理为合比性质，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；一称合比定理与分比定理为合比性质，即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}。$$

合分比定理 在一个比例式中，第一个比的两项之和与两项之差的比，等于第二个比的两项之和与两项之差的比。即，若$a:b=c:d$，则$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$，或写成：若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

众数 一组数据中频数出现最多的那个数值。它是集中量的一种指标。

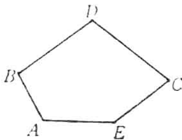
负数 带有负号的数。负数最早出现在我国西汉（公元前206年至公元8年）编成的一部古典数学著作《九章算术》。三国时魏的数学家刘徽（公元263年）对《九章算术》所作的注解说：“两算得失相反，要令‘正’、‘负’以名之”。意思是说，在布列方程时，由于所给的量可能具有相反意义，因而引进正，负数的概念。在国外，首先提到负数的是印度人巴士卡洛，但那是公元1150年的事了。比我国迟1300多年。十一至十三世纪，欧洲出现负数概念，但人们仍有不同意见。直到1937年，法国数学家笛卡尔发明了解析几何，创立了坐标观念，负数才获得实际的解释，才逐渐为人们所公认。

负整指数 在幂的运算中，幂的指数是负的整数的。如2^{-2}，a^{-5}等。

名数 带有计量单位名称的数。例如，3名，5公斤等。

多边形 由三条或者三条以上线段首尾顺次连结而组成的封闭图形。组成多边形的各条线段叫做多边形的边；每相邻两条边的公共端点叫做多边形

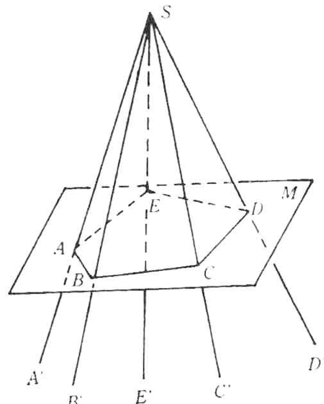
的顶点；相邻两条边所组成的角叫做多边形的内角或称多边形的角；连结多边形的不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线。多边形用表示它的顶点的字母表示，如图所示的多边形记作多边形$ABCDE$。一个多边形至少要有三条边，有$n(n\geqslant 3)$条边的多边形叫做n边形，其中“三边形”习惯上称“三角形”。边数$n\geqslant 4$的多边形有凸多边形与凹多边形之分，如不特别说明，多边形均系指凸多边形而言。



多项式　有限个单项式的和。

多面体　由若干多边形所围成的几何体。多面体的面数至少为四，通常以围成它的面数来命名。如四面体、五面体、六面体等。

多面角　从一点出发并且不在同一平面内的几条射线，以及每两条相邻射线之间的平面部分所组成的图形。一个多面角的面数等于它的棱数、面角数、二面角数。多面角的面数最少是三，有三个面的多面角叫做三面角，有四个面的多面角叫做四面角，其余类推。表示一个多面角，应先写出表示顶点的字母，并且在它的后面画一条短的横线，再依次取每一条棱上的一个字母写在后面，如图中的多面角记作多面角$S—A\ B\ C\ D\ E$；有时多面角也可以只用表示它的顶点的字母来表示，如图中的多面角也可以记作多面角S。



多项式的元　多项式中所含未知数的个数。含有几个未知数，就称为几元多项式。

多项式的次　多项式合并同类项后，所含各单项式中最高次项的次数称为多项式的次数。

多项式的项　多项式合并同类项后多项式所含非零单项式的个数，称为多项式的项数，其中每一个单项式都称为多项式的项。

多面体的棱　多面体中相邻两平面的相交线段。

多面角的面　相邻两棱之间的平面部分。

多面角的棱　组成多面角的射线。

多边形的内角　见多边形条。

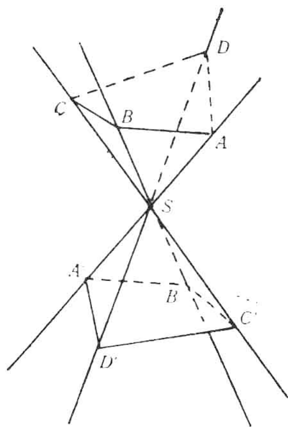
多边形的外角　多边形的角的一边与另一边的反向延长线所组成的角。

多边形的周长　多边形各边长度的和。

多面体的顶点 相交于同一点的几个平面组成一个多面角，各多面角的顶点。

多面体的截面 一个平面与多面体相交，在这个平面上所截得的多边形。

多面角的对称 如果把多面角 $S—ABCD$ 的各棱经过它的顶点S向反向延长，就构成另一个多面角 $S—A'B'C'D'$，这样的两个多面角 $S—ABCD$和$S—A'B'C'D'$是关于S点为对称的。在关于某点对称的两个多面角中，各对应的二面角相等，各对应的面角也相等，但是在一个多面角中的面角和二面角的位置顺序和它的对称多面角中的对应面角和二面角的位置顺序恰好相反。



多面角的顶点 组成多面角的射线的公共点。

多面角的面角 在每个面内由两条棱组成的角。

多边形的内切圆 和多边形（三角形）的各边都相切的圆。这时这个多边形（三角形）叫做圆的外切多边形。三角形的内心与各顶点连结，所组成的三个三角形的面积之和等于该三角形的面积，由此可求得三角形内切圆的半径：$r=\dfrac{s}{p}$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{P}}$$

（$p=\dfrac{a+b+c}{2}$），三角形内切圆半径可由公式

$$r=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$

$4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$求得。除三角形外，并非任一$n$边形($n\geqslant 4$)都有内切圆。

多边形的内角和 多边形各个角的和。对凸多边形而言，n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$。多边形内角和定理证明方法，一是从一个顶点引对角线把多边形分成$(n-2)$个三角形，而每一个三角形的内角和为180°，从而得证。一是现行教材采用的证法，即在 n 边形内部取一点与各顶点连结成 n 个三角形，由三角形内角和定理得证。

多边形的对角线 连结多边形不相邻的两个顶点的线段。n 边形的对角线总数为$\dfrac{1}{2}n(n-3)$。

多边形的外角和 多边形的各外角之和。多边形的外角和等于360°。

多面体的对角线 连结不在同一个平

面内的两个顶点的线段。

多面角的二面角　每相邻两个面间的二面角。

多项式的平方公式　多项式的平方等于每一项的平方，再加上每两项乘积的2倍。即$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+\cdots+2a_{n-1}a_n$。

多项式乘法法则　用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。例如，$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$。

多项式恒等于零定理　在给定数集上，对于自变数的任意值，多项式的值都等于零，则多项式的所有系数都等于零。

多项式除以单项式法则　先把多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加。例如，$(28a^3-14a^2+7a)\div 7a=4a^2-2a+1$。

齐次方程　由齐次多项式等于零所得的方程。例如，$2x^2-5xy+7y^2=0$。

齐次多项式　各项次数都相同的多项式。例如，$3x^2+4xy-5y^2$是x，y的二次齐次多项式。

齐次线性方程组　常数项为零的线性方程组。

交集　由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$，读作$A$交$B$。例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,4,5\}$，则$A\cap B=\{1,2,4\}$。对于任何集合$A$、$B$，有$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap B=B\cap A$。

交代式　含有字母的整式，把其中的两个字母互相交换，这个式子只改变一个正负号，则称这个式子关于这两个字母的交代式。例如，$a-b$，$(a-b)(b-c)(c-a)$。

充分条件　见必要条件

充要条件　如果具有性质A的元素也具有性质B，便说由A推出B，用符号$A\Rightarrow B$表示。因此，如果$A\Rightarrow B$并且$B\Rightarrow A$（即$A\Longleftrightarrow B$），那么称A是B的充分必要条件，也称B是A的充分必要条件。充分必要条件简称充要条件。

闭区间　满足$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合。表示为$[a,b]$。

并集　由属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的并集，记作$A\cup B$，即$A\cup B=\{x|x\in A，或x\in B\}$，读作$A$并$B$。例如，$A=\{2,-2\}$，$B=\{1,-1\}$，则$A\cup B=\{1,-1,2,-2\}$。对于任何集合$A$、$B$，有$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup B=B\cup A$。

关系符号　表示数量之间相互关系的符号。例如，等号（$=$）、大于号（$>$）、小于号（$<$）、不大于号（$\leqslant$）、不小于号（$\geqslant$）、不等号（$\neq$）、相似（$\backsim$）、全等（$\cong$）等。

关于sin x及cos x的齐次方程　方程的每一项关于$\sin x$及$\cos x$的次数都是相同的，这样的三角方程叫做关于$\sin x$及$\cos x$的齐次方程。例如方程

$$\sin^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$$

就是关于$\sin x$及$\cos x$的二次齐次方程。解这类方程的方法通常是化为

只含有未知数的正切函数的三角方程，然后求解。

导数概念 设函数$y=f(x)$在点x_0及其附近有定义，给x_0以改变量Δx，如果函数的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$与自变量增量$\Delta x$之比，当$\Delta x\to 0$时有极限，就是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称这个极限值为函数$f(x)$在点$x_0$处的导数，并称函数$f(x)$在点$x_0$处可导。记为$f'(x_0)$，或$y'|x=x_0$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$。但应注意：导数是研究在点$x_0$处及其附近函数的改变量$\Delta y$与自变量的改变量$\Delta x$之比的极限，它是一个局部性的概念。如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，函数$y=f(x)$在点$x_0$处就有导数。否则就没有导数。函数在$x_0$处是否可导，就看在该点的极限是否存在。所谓极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，就是这个极限的极限值是一个定数，函数$f(x)$在点$x_0$处的导数也应是一个定数。导数概念是由瞬时速度等实际问题抽象出来的，也就是把物体的运动规律抽象为一般函数$y=f(x)$。物体运动的瞬时速度，即是路程对于时间的变化率$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$，抽象为函数$f(x)$对自变量$x$的变化率—导数$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。所以，在数学上把函数在点$x_0$处的变化率叫做函数在点$x_0$处的导数。导数的定义是一个重要的数学概念，由这个定义也给出了求函数$f(x)$在点x_0处的导数的方法：即根据自变量x的改变量Δx，求得函数$y=f(x)$的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；求$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。若极限存在，则这个极限值就是所求函数$f(x)$在点$x_0$处的导数。

导数公式表

(1) $y=c$, $y'=0$;

(2) $y=x^{\alpha}$(α实数), $y'=\alpha x^{\alpha-1}$;

(3) $y=\log_a x$, $y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$;

$y=\ln x$, $y'=\frac{1}{x}$;

(4) $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$;

$y=e^x$, $y'=e^x$;

(5) $y=\sin x$, $y'=\cos x$;

(6) $y=\cos x$, $y'=-\sin x$;

(7) $y=\operatorname{tg} x$, $y'=\sec^2 x$;

(8) $y=\operatorname{ctg} x$, $y'=-\csc^2 x$;

(9) $y=\arcsin x$, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(10) $y=\arccos x$, $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(11) $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y'=\frac{1}{1+x^2}$;

(12) $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, $y'=-\frac{1}{1+x^2}$。

导数与导函数 如果函数 $f(x)$ 在开区间(a, b)内的每一点x 处都可导，就叫做函数$f(x)$在开区间(a, b)内可导。这时对于开区间 (a, b) 内每一个确定的值 x，总有这点的导数值 $f'(x)$与之对应，因而，在开区间 (a, b)内就定义了一个新的函数 $f'(x)$，我们就把这个新的函数称为函数$f(x)$的导函数。导函数 $f'(x)$一般简称为导数。

应当注意：（1）函数 $f(x)$的导数$f'(x)$与函数 $f(x)$ 在点 x_0处的导数不同。前者为函数 $f(x)$的导函数；后者则是一个具体的导数值。（2）欲求函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x)$，常先求函数$f(x)$的导函数 $f'(x)$，然后再将x_0代入导函数 $f'(x)$中求得导数值 $f'(x_0)$。因此，函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数$f'(x_0)$是导函数$f'(x)$在点x_0处的函数值。

异名数 单位不同的名数。

异次根式 根指数不同的根式。

异面直线 不在任何平面内的直线，它们既不相交也不平行。

异向不等式 如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，则称这两个不等式是异向不等式。

异面直线的性质 经过两条异面直线中的一条直线可以作一个平面，且只可以作一个平面和另一条直线平行。

异面直线所成的角 设a，b是两条异面直线经过空间任意一点 o，作直线a'、b'分别平行于a、b，a'和b'所成的锐角（或直角）。

异分母的分式加减法法则 异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减。即

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}。$$

阶乘 自然数由1到n的连乘积叫做n的阶乘，用$n!$表示。例如，$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$。规定$0!=1$。

约分 把一个分式的分子与分母的公因式约去。叫做分式的约分。

约数 若a、b均为自然数，且b能整除a，则b叫做a的约数。例如，$24 \div 6 = 4$，则6叫做24的约数。

约等于 表示两个数量近似地相等的关系叫做约等于或者近似于。

约等号 表示两个量近似相等关系的符号。记作“$\approx$”或“$\doteq$”，读作“约等于”或“近似于”。例如，$\pi \approx 3.14$，表示3.14是圆周率π的一个近似值。

约分的方法 约分的方法有两种：（1）逐次约分法。用分子和分母的公约数同时逐次去除分子和分母，直到得出一个既约分数。例如，$\frac{15}{75} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$。（2）一次约分法。先求出分子和分母的最大公约数，再用最大公约数去除分子和分母。例如，$\frac{36}{120} = \frac{36 \div 12}{120 \div 12} = \frac{3}{10}$。

形如 $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ 的化积公式 $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$，其中辅助角$\varphi$在哪个象限，由$a$、$b$的符号确定，$\varphi$的值由$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$确定。

进率 在同类计量单位中，较大的计量单位是较小计量单位的倍数。例如，在长度计量单位中，1米是1分米的10倍，就说分米与米之间的进率是10。

进位制 用一定个数的计数单位组成一个相邻的较高计数单位的规定。这个一定个数叫做进位制的底数。进位制的底数可以是1以外的任何自然数。一般根据底数来命名进位制。例如，用“十”做底数的进位制叫做十进位；用“二”做底数的进位制叫做二进制。除此以外，世界上使用的进位制还有：五进制、十二进制、二十进制、六十进制，等等。

运算 设A为一非空集合，若对于任意从A中顺序取出的两个元素a、b，在对应f之下，有A（或A的扩集）中的唯一确定的元素c与之对应，就说对应f是集A上的一个运算。记为$f(a, b) = c$。运算是一种特殊的对应，可用符号“$\bigcirc$”表示一个运算，如上的运算关系可表示$a \bigcirc b = c$。由于这里的集A不一定是数集，所以，运算$a \bigcirc b = c$具有更广泛的意义。在数集里符号“$\bigcirc$”可以是$+$、$-$、$\times$、$\div$等。例如，$14 \bigcirc 2 = 16$，是加法运算，通常表示为$14 + 2 = 16$；$14 \bigcirc 2 = 12$，是减法运算，通常表示为$14 - 2 = 12$。

运算符号 表示计算方法的符号。例如，加（$+$）、减（$-$）、乘（$\times$）、除（$\div$）、乘方（x^n）、开方（$\sqrt[n]{\ }$）等都是运算符号。

运算顺序符号 表示运算先后顺序的符号。常用的运算顺序符号有小括号“（ ）”、中括号“〔 〕”、大括号“{ }”等。运用括号可以把几个数或几种运算结合成一组，先进行运算，所以，括号又叫做结合符号。在含有括号的算式里，应先算小括号里面的，次算中括号里面的，再算大括号里面的。分数线有时也能起到运算顺序符号的作用。例如，

$15 + \frac{13 + 8 \times 4}{7 \times 2 + 1} \div 3$，应先分别算出分子、分母的结果，再算出分数值，最后再进行其他运算。

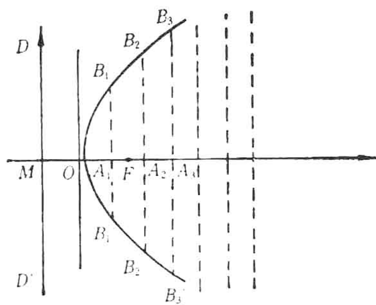
抛物线　如果平面内一个动点到一个定点和一条定直线的距离相等，那么这个动点的轨迹叫做抛物线。这个定点叫做抛物线的焦点，这条定直线叫做抛物线的准线。

抛物线的弦　连结抛物线上任意两点的线段。

抛物线的轴　抛物线的对称轴。

抛物线的焦弦　经过抛物线焦点的弦。垂直于轴的焦弦，叫做直径。

抛物线的几何画法　设DD'是准线，F是焦点，经过F点作$Mx\perp DD'$和DD'相交于M，取MF的中点O，在Ox上，取A_1、A_2、A_3……各点，经过A_1、A_2、A_3……分别作DD'的平行线，以F为圆心，MA_1、MA_2、MA_3……为半径画弧，分别交经过A_1，A_2、A_3……的平行线于B_1和B_1'，B_2和B_2'，B_3和B_3'……等点。把各点连结成光滑的曲线，就得到所求的抛物线。



抛物线的切线方程　（1）经过抛物线$y^2=2px$上一点$p(x_1,y_1)$的切线方程是$y_1y=p(x+x_1)$。（2）已知抛物线$y^2=2px$的切线的斜率是k，那么它的切线方程是$y=kx+\frac{p}{2k}$。

抛物线的标准方程　$y^2=2px$（$p>0$）、$y^2=-2px(p>0)$、$x^2=2py$（$p>0$）或$x^2=-2py$。

抛物线拱形的画法　抛物线拱形在工程建筑上很有用。如果已知拱形的宽和高，可以用下面的方法画出拱形（如图）：作矩形$ABCD$，使AB等于拱形的宽$2a$，BC等于拱形的高h，取AB的中点H，把线段AH和AD都分成n等分，在AH上从A点开始的分点顺次是A_1、A_2、A_3……；在AD上的分点顺次是B_1、B_2、B_3……；经过H、A_1、A_2、A_3……各点分别作直线HV、A_1A_1'，A_2A_2'，A_3A_3'……平行于AD，再顺次连结V和B_1、B_2、B_3……各点。VB_1和AA_1'，VB_2和A_2A_2'，VB_3和A_3A_3'……分别相交于P_1、P_2、P_3……各点，顺次连结A、P_1、P_2、P_3……V各点成光滑的曲线，就得到拱形的一半，类似地可以画出另一半。

抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的性质 （1）在y轴右侧，向右上方和右下方无限延伸。（2）关于x轴对称。（3）顶点是坐标原点。（4）离心率等于1。

拟柱体 如果一个多面体有两个面是互相平行的，其它各面是梯形或者三角形，这些梯形的上下底边，或者三角形的顶点和底边，分别在平行的两个面上，这样的多面体叫做拟柱体。平行的两个面叫做拟柱体的底面，其他各面叫做拟柱体的侧面，两底面之间的距离叫做拟柱体的高。相邻两个侧面的交线叫做拟柱体的侧棱。

拟柱体的体积 如果拟柱体的两个底面和中截面的面积分别是θ_1、θ_2、θ_0，高是h，那么它的体积是

$$V_{\text{拟柱体}}=\frac{1}{6}h(\theta_1+\theta_2+4\theta_0)。$$

拟柱体的中截面 经过拟柱体的高的中点而平行于底面的截面。

严格递减数列 见递减数列。

严格递增数列 见递增数列。

克莱姆法则 用行列式解线性方程组的方法。设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n。\end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D\neq0$，且D_j $(j=1,2,\cdots n)$是把D的第j列 a_{1j}，a_{2j}，$\cdots a_{nj}$换成常数列：$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的行列式，则有$x_1=\frac{D_1}{D}$，

$$x_2=\frac{D_2}{D}，\cdots，x_n=\frac{D_n}{D}。$$

极坐标系 在平面内取一定点O叫做极点，引一条射线ox叫做极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向），对于平面内任意一点M，用ρ表示线段OM的长度，θ表示ox到OM的角度，ρ叫做点M的极径，θ叫点M的极角，有序数对$(\rho、\theta)$就叫做点M的极坐标，这样建立的坐标系叫做极坐标系。这样建立极坐

标后，对于每一对极坐标(ρ、θ)，都可以作出平面内的一点，反过来，平面内任意一点，都有它的极坐标(ρ，θ)。和直角坐标系不同的是，平面内一点的极坐标，可以有无数多种表示方法。一般地说，如果(ρ，θ)是一点的极坐标，那么($\rho, \theta+2n\pi$)，[$-\rho$，$\theta+(2n+1)\pi$]都可以作为它的极坐标（n是整数）。

极坐标方程的对称性　设极坐标方程为$\rho=f(\theta)$。(*)(1) 对称于极轴：如果把(*)式的θ换为$-\theta$，而(*)式不变，那么曲线$\rho=f(\theta)$对称于极轴(如图1)。如果把(*)式的θ换成$-\theta$，

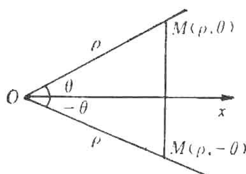


图1

ρ换为$-\rho$，而(*)式不变，那么，这个曲线$\rho=f(\theta)$对称于极轴（如图2)。

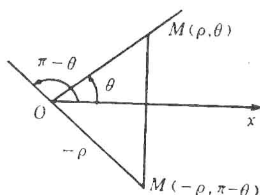


图2

(2) 对称于极点：如果把(*)式中的ρ换成$-\rho$，而(*)式不变，那么曲线$\rho=f(\theta)$对称于极点（如图3）。

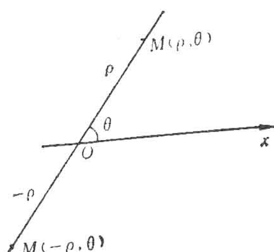


图3

如果把（*）式中的θ换为$\pi+\theta$，而（*）式不变，那么曲线对称于极点（如图4）。（3）对称于极轴的垂线：如果把(*)式的θ换成$-\theta$，ρ换成$-\rho$，而(*)式不变，那么曲线$\rho=f(\theta)$对称于极轴的垂线（如图5）；

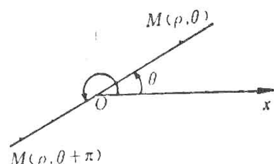


图4

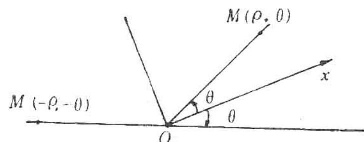


图5

如果把（＊）式的θ换为$\pi-\theta$，而（＊）式不变，那么曲线对称于极轴的垂线（如图6）。

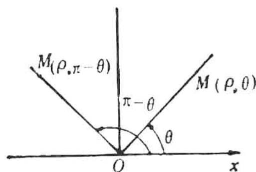


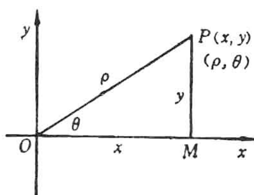
图6

极坐标和直角坐标的关系 设在平面内取定一个直角坐标系，把直角坐标系的原点作为极点，x轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位，设P是平面内任意一点，它的直角坐标是（x、y），极坐标是（ρ、θ），它们之间有如下的关系

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta。\end{cases} \quad (1)$$

由此可以推出

$$\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)。\end{cases} \quad (2)$$



利用公式（1）（2）可以把直角坐标化成极坐标，也可以把极坐标化成直角坐标。

杨辉三角

	1
$(a+b)$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
……	…………………………………

上面这样排列的三角形叫做杨辉三角。它是我国南宋时期数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》（1261年）中记载的。杨辉三角的每一横行都是一个二项展开式的系数。例如$(a+b)^4$的展开式的系数$C_4{}^0,C_4{}^1,C_4{}^2,C_4{}^3,C_4{}^4$即为杨辉三角第五行的五个数1，4，6，4，1。杨辉三角每一行的两端都是1，除1以外，每一个数都等于它肩上两个数之和。在欧洲，称这个三角形为帕斯卡三角形，由法国数学家帕斯卡在1654年发现，但比杨辉的发现至少晚了三百年。

求平均数问题 把几个不相等的数，通过移多补少的方法，使它们相等，而总数不变的一类应用题。其基本数

量关系是

总数÷总份数=平均数。

求倒数的方法　（1）求一个分数的倒数，把分数的分子、分母交换位置。（2）求一个带分数的倒数，先把带分数化为假分数，然后交换分子、分母的位置。（3）求一个整数的倒数，用1作分子，原整数作分母。

求曲线方程的步骤　（1）建立适当的直角坐标系，用(x, y)表示曲线上任意一点M的坐标。（2）写出适合条件P的点M的集合$p=\{M \mid p(M)\}$。（3）用坐标表示条件$p(M)$列出方程$f(x, y)=0$。（4）化方程$f(x, y)=0$为最简形式。（5）证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点。

求最值应用问题的一般方法　最值应用问题求解的一般方法是：

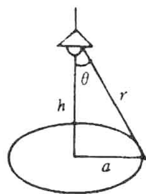
（1）认真全面地分析实际问题中各量之间的关系，把实际问题化为数学问题，列出函数关系式$y=f(x)$。

（2）确定变量x和y的变化范围，并求出x的变化范围内的各驻点。

（3）求出x变化范围的端点函数值。

（4）比较各驻点的函数值和端点函数值，根据问题的实际意义，确定函数的最值和最值点。

例如，在广场中心设立一个灯架，架顶安装上一个太阳灯，太阳灯离地面多高，可使与广场中心距离为a的圆形区域边上具有最大照度（如图）。



这个问题的求解过程是：如图所示，高度为h，照度为J，灯架与光距r成的角为θ。由于照度J与$\cos\theta$成正比，与光源距离r的平方成反比，则可设比例系数为k，于是得$J=k\frac{\cos\theta}{r^2}$，

$0<h<+\infty$，$\cos\theta=\frac{h}{r}$，

$r=\sqrt{a^2+h^2}$，所以$J(h)=k\cdot\frac{h}{r}\cdot\frac{1}{r^2}$

$=k\cdot\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\frac{1}{a^2+h^2}$

$=k\frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$。令

$J'(h)=k\frac{a^2-2h^2}{(a^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}=0$，解得驻点$h_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$（舍去），$h_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$。由于有唯一驻点$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$就是函数的最大值点，故当灯离地面的高度为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$时，灯的照度最大。

更比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$及$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$，比例的这一性质称之为更比定

理。即比例中两内项可以交换，两外项也可以交换。

两两互质　几个自然数中的任意两个数都是互质数。例如，1，3，4，5中，任意两个数都是互质数，所以1，3，4，5两两互质。

两圆内切　两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆内切。这个唯一的公共点叫做切点。如果两圆的半径分别为R和r，圆心距为d，则$d=R-r(R>r)\Longleftrightarrow$两圆内切。

两圆内含　两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆内含。两圆同心是两圆内含的特例。如果两圆的半径分别为R和r，圆心距为d，则$d<R-r$（$R>r$）$\Longleftrightarrow$两圆内含（注意：同心圆的$d=0$）。

两圆外切　两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做两个圆外切。这个唯一的公共点叫做切点。如果两圆的半径分别为R和r，圆心距为d，则$d=R+r\Longleftrightarrow$两圆外切。

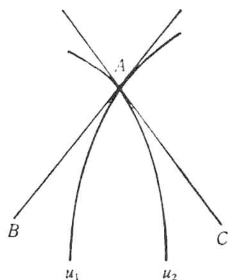
两圆外离　两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆外离。如果两个圆的半径分别为d和r，圆心距为d，则$d>R+r\Longleftrightarrow$两圆外离。

两圆相交　两个圆有两个公共点时，叫做这两个圆相交。如果两圆的半径分别为R和r，圆心距为d，则$R-r<d<R+r$（$R\geqslant r$）$\Longleftrightarrow$两圆相交。

两圆相离　两个圆没有公共点。两圆相离包含两圆外离和两圆内含两种情况。

两个重要对数　（1）$\log_a a=1(a>0，a\neq1)$；（2）$\log_a 1=0$（$a>0，a\neq1$）。

两条曲线的交角　两条曲线在交点处的切线的夹角叫做两条曲线的交角。如图中u_1和u_2是两条曲线，它们交于A点，过A点作u_1的切线AB，作u_2的切线AC，那么AB和AC的交角就是曲线u_1和u_2的交角。



两条曲线的交点　两条曲线的交点的坐标是两个曲线方程组成的方程组的实数解。反之，两个曲线方程组成的方程组的实数解是两条曲线交点的坐标。

两条直线的夹角　两条直线相交所成的不大于直角的角。设斜率分别为k_1、k_2的两直线的夹角为θ，则

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|。$$

两多项式恒等定理　在给定数集上，两个多项式恒等的充要条件是它们的同类项系数相等。

两条平行线间的距离　两条互相平行

的直线l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}。$$

两条异面直线的距离　两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长。

两条异面直线互相垂直　两条异面直线所成的角是直角。

两条异面直线的公垂线　和两条异面直线都垂直相交的直线。

两个平行平面之间的距离　夹在两个平行平面之间的公垂线段的长。

两个平面平行的判定定理　如果一个平面内的两条相交直线，分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面互相平行。

两条直线平行的充要条件　直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$与l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$互相平行的充要条件是$A_1B_2-A_2B_1=0$，且$B_1C_2-B_2C_1\neq 0$。若$B_1\neq 0$，$B_2\neq 0$，则直线l_1的斜率和它在y轴上的截距分别为$k_1=-\frac{A_1}{B_1}$，$b_1=-\frac{C_1}{B_1}$，直线l_2的斜率和它在y轴上的截距分别为$k_2=-\frac{A_2}{B_2}$，$b_2=-\frac{c_2}{B_2}$，则由$A_1B_2-A_2B_1=0$得$k_1=k_2$，由$B_1C_2-B_2C_1\neq 0$得$b_1\neq b_2$，即，两条不重合的直线互相平行的充要条件是它们的斜率相等。

两条直线位置关系的讨论　已知两条直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，若A_1、A_2、B_1、B_2全不为零，则（1）当$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$时，两条直线相交，交点坐标为

$$\left(\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\ \frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}\right)。$$

（2）当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$\left(或\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}且C_2=0，C_1\neq 0\right)$时，两直线平行。（3）当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$（或$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$，且$C_1=C_2=0$）时，两直线重合。若$A_1$、$A_2$、$B_1$、$B_2$中有等于零的情形，两直线的位置关系容易根据具体情况进行讨论。

两条直线垂直的充要条件　直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$与l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$互相垂直的充要条件是$A_1A_2+B_1B_2=0$。若$B_1\neq 0$，$B_2\neq 0$，则直线l_1的斜率为$k_1=-\frac{A_1}{B_1}$，直线l_2的斜率为$k_2=-\frac{A_2}{B_2}$，则由$A_1A_2\neq B_1B_2=0$得$k_1=-\frac{1}{k_2}$，即，两条都有斜率的直线互相垂直的充要条件是它们的斜率互为负倒数。

两个量成反比例的充要条件　两个量成反比例的充分必要条件。若量A和量B的对应数值分别表示为x、y，则A、B成反比例的充要条件是$x\cdot y=k$或$y=\frac{k}{x}$（k是一个常数，且$k\neq 0$）。

两角和与差的三角函数公式　对任意的角α和β有：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$

$-\cos\alpha\sin\beta$；$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta};$$

$$\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}。$$

两种量成正比例的充要条件 两种量成正比例的充分必要条件。若量A和量B的对应数值分别是x、y，则A、B成正比例的充要条件是$\frac{y}{x}=k$或$y=kx$（k是一个常数，且$k\neq 0$），k叫做A与B的比例系数。

两个不重合的平面的位置关系 （1）两平面平行——没有公共点；（2）两平面相交有一条公共直线。

否命题 如果一个命题的题设和结论分别是另一个命题的题设和结论的否定，这样的两个命题叫做互否的命题，把其中的一个叫做原命题，另一个就叫做它的否命题。

连比 三个或三个以上的数组成的比。例如，3与5的比是3∶5，5与8的比是5∶8，则3、5、8三个数的比是3∶5∶8。连比不是连除。

连加 两个以上的数依次相加。例如，3＋5＋8＝16。

连除 被除数依次除以几个数。例如，75÷3÷5＝5。

连乘 两个以上的数依次相乘。例如，8×7×3＝168。

连减 从被减数中依次减去几个减数。例如，18－5－7＝6。

连分数 形如

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\ddots}}}$$

的表达式。其中，a_0,a_1,a_2，……，b_0，b_1，b_2，……，可以是实数或复数，项数可以有限，也可以无限。a_0，a_1，a_2，……称为连分数的部分商。

连乘积 两个以上的数连乘所得的结果。例如，8×7×3＝168中的168，就是8×7×3的连乘积。

连比的求法 若甲、乙之比是a∶b，乙丙之比是b∶c，则甲、乙、丙的连比是a∶b∶c；若甲、乙之比是a∶b，乙、丙之比是c∶d，则甲、乙、丙连比是ac∶bc∶bd。

连分数的部分商 见连分数。

连续函数的局部保号性质 这是二阶导数应用的预备知识之一。这个预备知识，归纳为定理：即若函数$f(x)$在点x_0处连续，且$f(x_0)\neq 0$，则函数$f(x)$在点x_0附近必与$f(x_0)$同号，就是：当$f(x_0)>0$时，$f(x)>0$（如图1所示）；当$f(x_0)<0$时，$f(x)<0$（如图2所示）。

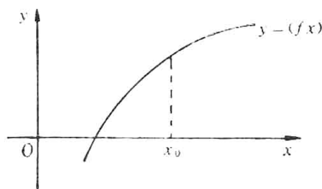


图 1

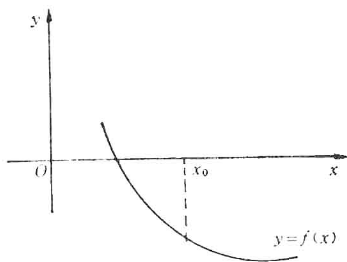


图 2

从图 1、图 2 容易看出连续函数具有保号性质。

利息　借款人支付给贷款人的报酬。俗称“子金”。

利息率　一定时期内利息额同贷出金额的比率，即利息率 $=\frac{\text{利息额}}{\text{贷出额}}\times 100\%$。利息率简称利率。利率按时间分有年利率、月利率、日利率。一般年利率按本金的百分之几表示；月利率按本金的千分之几表示；日利率按本金的万分之几表示。

利用平移化简二次曲线方程　（1）公式法：例 1　平移坐标轴化简方程 $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$，使新方程没有一次项。解：用平移公式 $\begin{cases}x=x'+h,\\ y=y'+k\end{cases}$ 代入所给方程，得 $4(x'+h)^2+9(y'+k)^2-8(x'+h)+18(y'+k)-23=0$，就是 $4x'^2+9y'^2+(8h-8)x'+(18k+18)y'+4h^2+9k^2-8h+18k-23=0$。①

令 $\begin{cases}8h-8=0,\\ 18k+18=0,\end{cases}$ 解方程组，得 $h=1$　$k=-1$，代入①，得到对于原点平移到 $0'(1,-1)$ 的新坐标系方程是 $4x'^2+9y'^2=36$，即 $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$ 这是一个椭圆方程。应例 1 可以看出，用公式法来化简方程的一般方法是：①把平移公式代入所给方程；②令含有 h 和 k 的两个一次项系数等于零，得方程组；③解所得的方程组，求出 h 和 k 的值；④把 h 和 k 的值代入第一步中所得的方程，就求得化简后的新方程。如果所给的方程是一个缺 x、y 项的二次方程，那么化简方程时，通常是在 x 的系数，y 的系数和常数项三者中，适当地令二者等于零，求出 h、k 的值，而把方程化成某一圆锥曲线的标准方程。（2）配方法：例 2　平移坐标轴化简方程 $x^2-y'+8x-14y-133=0$，并且画出新旧坐标轴和方程所表示的曲线。解：把所给方程按 x、y 配方，得 $(x+4)^2-(y+7)^2=100$。为了把这个方程化简，令 $x+4=x'$，$y+7=y'$，就是采用下列平移公式：$x=x'-4$　$y=y'-7$。代入上式得 $x'^2-y'^2=100$，即 $\frac{x'^2}{100}-\frac{y'^2}{100}=1$，这是一个等轴双曲线的方程，新坐标的原点在旧坐标系中的坐标是 $(-4,-7)$。从上面的例子可以看出，配方法适合于缺 x、y 项的二次方程的化简，经过配方以后，一般可以化成下列一些形式：

①$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1(a\geqslant b>0)$。

② $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

$(a>0\quad b>0)$。

③ $(y-k)^2=2p(x-h)$，$(y-k)^2=-2p(x-h)$，
$(x-h)^2=2p(y-k)$，$(x-h)^2=-2p(y-k)(p>0)$。

那么利用平移公式 $x=x'+h$，$y=y'+k$，平移坐标轴，把原点移到 $0'(h,k)$，上面的方程就可以分别化成椭圆、双曲线和抛物线对于新坐标系来说的标准方程。

利用转轴消去二元二次方程中的 xy 项　利用坐标系的旋转变换，可以消去一般二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ①中的 xy 项。如果旋转变换的旋转角 θ，由公式 $\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}$ 决定，那么就可以消去方程①中的x、y项。例　证明方程$x\cdot y=1$的图形是双曲线。证明：用旋转变换消去xy项，由于 $A=0$，$B=1$，$C=0$，得$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{0-0}{1}=0$，∴　$2\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，于是 $\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$$
得

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')。\end{cases}$$
把这个关系代入原方程，得曲线在新坐标系中的方程是$\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1$。这是双曲线的标准方程，可见方程 $xy=1$ 的图形是双曲线。

体积　物体所占空间的大小。

体积单位　度量一个几何体的体积时取做标准的小立方体的体积。它是边长等于一个单位长度的正方体。常用的公制体积单位有：立方米、立方分米、立方厘米等。它们之间的进率关系是：1000立方分米＝1立方米，1000立方厘米＝1立方分米，1000立方毫米＝1立方厘米。常用的市制体积单位有：立方丈、立方尺、立方寸等。它们之间的进率关系是：1000立方尺＝1立方丈，1000立方寸＝1立方尺。

低位　一个数右边的数位相对于左边的数位叫低位。右边第一位是这个数的最低位。

位似形　对于平面上的两个图形，如果一个图形上的点A'、B'、…、P'和另一个图形上的点A、B、…、P分别对应，并且①过各对对应点的直线$A'A$、$B'B$、…、$P'P$都经过同一点O，而且各对对应点都在O的同旁或都在0的两旁；②$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\cdots=\frac{OP'}{OP}=k$，那么这两个图形叫

做位似图形，点0叫做位似中心。这里与现行初中几何教材中的定义不同点是：加了“各对对应点都在0的同旁或都在0的两旁”一语。本定义中所指的图形是对任意图形而言，当然也包括多边形。两个位似多边形一定相似，它们的相似比等于对应顶点与位似中心的距离的比（k），它们的各对对应边分别平行。两个位似图形的各对对应点可以全部都在位似中心的同旁，这时这两个位似图形叫做相互外位似（亦称顺位似图形），这时位似中心叫做外位似中心（如图1、图2）；各对对应点也可以全部都在位似中心的两旁，这时这两个位似图形叫做相互内位似(亦称逆位似图形)，这时位似中心叫做内位似中心（如图3）。在此定义下，$k=1$的两个相互内位似图形就是两图形成中心对称。但是，各对对应点不能一部分在位似中心的同旁，另一部分却在位似中心的两旁，如图4中，若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相互外位似，取A点关于O的对称点K，则$\triangle KBC$虽满足现行课本中的定义，但不是位似图形。

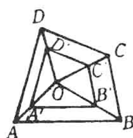


图 1

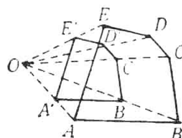


图 2

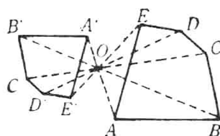


图 3

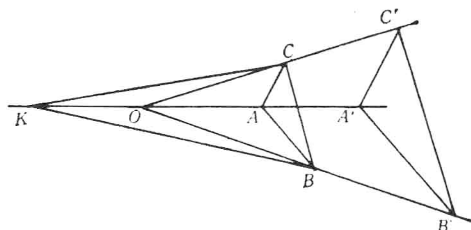


图 4

如果用有向线段给出更严格的定义是：假如有两个图形F与F'，它们的点之间存在一对一的对应关系，并且这个对应满足：①凡连结任一双对应点的直线都通过同一点0；②设A与A'是任一双对应点，则$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=K$为常数，那么$F$与$F'$叫做位似图形，其中$O$叫做位似中心。若$K>O$，$F$与$F'$

称为顺位似图形或相互外位似。若$K<0$，F与F'称为逆位似图形或相互内位似。在此定义下，$K=-1$时，F与F'成中心对称。

位置值 用数字值与数字所在数位结合起来所表示的值。例如，数字3，如果它在个位上，就表示它的位置值是3，如果它在十位上，则它的位置值就是30，余类推。

近似积 近似地表示两个数乘积的数。近似积又分不足近似积和过剩近似积。例如，两数$3581\times245=877345$，这是这两个数的乘积的准确值，如果用四舍五入法只取万位的近似值，则得880000，880000即是3581×245的过剩近似积；类似地，$825\times111=91575$，如果用四舍五入法只取万位的近似值，则得90000，90000即是825×111的不足近似积。

近似值 见近似数。

近似商 如果不可能或不必要求出商的准确数，而只求出一个商的近似数时，这个近似数称为近似商。

近似数 近似地表示某一个量的准确值的数。例如，我们常说我国人口数为11亿，这个11亿即是我国人口的近似数。近似数又称近似值。

近似计算 函数$y=f(x)$在点x_0处的改变量Δy，当$|\Delta x|$很小时，可以用函数y的微分dy近似表示，即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta y=dy\text{或}f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x。$$

一般说来，对于初等函数计算微分dy和点x_0处的函数值$f(x_0)$是不困难的，而计算函数改变量Δy或点$x_0+\Delta x$处的函数值$f(x_0+\Delta x)$却常常是很复杂的。因此，当$|\Delta x|$很小时，就利用上面的近似公式计算函数的改变量Δy的近似值或函数值$f(x_0+\Delta x)$的近似值。

（1）计算函数的改变量Δy的近似值。当$|\Delta x|$很小时，可用公式$\Delta y\approx dy=f'(x_0)dx$来计算函数$y=f(x)$在点$x_0$处的改变量。例如当$x$由45°变到45°10′时，函数$y=\lg x$的改变量$\Delta y$的近似值，因为$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$，又$\Delta x=45°10'-45°=\dfrac{\pi}{180\times6}$（弧度），则$dy=(\mathrm{tg}x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}\cdot$

$$\frac{\pi}{180\times6}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180\times6}=\frac{2\pi}{180\times6}=\frac{\pi}{540}\approx0.0058,$$

所以$\Delta y\approx0.0058$。

（2）计算函数值的近似值。当$|\Delta x|$很小时，根据公式

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

就可求出函数$y=f(x)$在点$x_1=x_0+\Delta x$处的函数值。例如，已知$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$，计算$f(0.03)$的近似值。令$x_0=0$，则$x_0+\Delta x=0+0.03=0.03$，所以$f(0.03)=f(0+0.03)\approx f(0)+f'(0)\times0.03$，

而$f'(0)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)'\Bigg|_{x=0}=\dfrac{1}{3}$,

所以$f(0.03)\approx 0+\dfrac{1}{3}\times 0.03=0.01$。

为了简化求函数值的近似计算，根据公式 $f(x_0+\varDelta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\varDelta x$，可推出一些应用简便的近似公式，一般有下面五个：

(1)$\sqrt[n]{1+h}\approx 1+\dfrac{1}{n}h$;

(2)$\ln(1+h)\approx h$;

(3)$e^h\approx 1+h$;

(4)$\sin h\approx h$;

(5)$\mathrm{tg}h\approx h$。

应该注意的是：上面五个近似公式要求$|h|$很小，也就是$|h|$与0充分接近时才能应用。在进行计算时，首先应根据所给函数选择相应的近似公式，然后再进行计算。一定要注意把$|h|$取得很小。

近似数的截取法　(1)四舍五入法：去掉多余部分的数字后，若去掉部分的首位数字大于或等于5，就给保留部分的最后一位数加上1；若去掉部分的首位数字小于5，则保留部分不变。(2)去尾法：去掉多余部分的数字，保留部分不变。(3)进一法：去掉多余部分的数字，给保留部分的末位数字加1。

近似数的加减计算　先把小数位数较多的近似数四舍五入，使比小数位数最少的近似数多一位小数，然后，按通常的加减法法则进行计算，最后，把计算结果的最末一位数字四舍五入。例如，$3.85+0.623+105.1285+0.0173\approx 3.85+0.623+105.129+0.017=109.619\approx 109.62$。

近似数的乘除计算　先把有效数字较多的近似数四舍五入，使其比有效数字较少的近似数多保留一个有效数字，然后，按通常的乘除法则进行计算，最后，再使计算结果中有效数字的个数和原来有效数字较少的那个近似数的有效数字的个数相同。例如，

$2.3721\times 3.52\approx 2.372\times 3.52$
$=8.34944\approx 8.349\approx 8.35$。

余切　见三角函数

余弦　见三角函数

余割　见三角函数

余子式　把行列式中某一元素所在的行与列划去后，剩下的元素按原行列顺序排列，所组成的行列式。

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

中，对应于元素a_2的余子式为

$\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$。

余弦定理　三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦积的两倍。即，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

坐标法　有一些几何问题，可以通过建立适当的坐标系转化为代数问题，从而借用代数的方法来解决，这种解决几何问题的方法叫做坐标法。坐标法也叫做解析法。应用坐标法来证明几何问题时，若坐标系数选得适当不

仅使图形的性质容易表达，而且使证明变得简单。例如选取图形中的一个点作为原点，就能使这点的横坐标和纵坐标都是零；选取图形中的一条直线作 x 轴或 y 轴，就能使这条直线上的点的纵坐标或横坐标是零；如果图形中有两条互相垂直的直线，那么把它们选作 x 轴和 y 轴，就能使一条直线上点的纵坐标是零，另一条直线上点的横坐标是零。

坐标轴　见平面直角坐标系。

坐标平面　见平面直角坐标系。

坐标变换　把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系。坐标变换在现行《解析几何》中介绍了两种情况：（1）坐标轴的平移，即只改变原点的位置，而不改变坐标轴的方向和长度单位；（2）坐标轴的旋转，即两条坐标轴按同一方向绕着原点转动同一角度，而不改变原点位置和长度单位。

坐标轴的平移公式　亦叫做移轴公式。设 P 是直角坐标平面内的任一点，它在旧坐标系中的坐标是 (x, y)，而在新坐标系中的坐标是 (x', y')。那么公式 $\begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k \end{cases}$ 就是坐标轴的平移公式。这个公式是用点的新坐标 (x', y') 表示点的旧坐标 (x, y) 的。而公式 $\begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k \end{cases}$ 是用点的旧坐标 (x, y) 表示点的新坐标 (x', y') 的。

坐标轴的旋转公式　设 P 是直角坐标平面内的任一点，它在旧坐标系中的坐标是 (x, y)，而在新坐标系中的坐标是 (x', y')，那么公式，

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

就是坐标轴的旋转公式，简称转轴公式。这个公式是用点的新坐标 (x', y') 表示点的旧坐标 (x, y) 的，而公式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

是用点的旧坐标表示点的新坐标的。

含有绝对值的不等式的性质

（1）$|ab| = |a|\cdot|b|$。

（2）$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$　$(b \neq 0)$。

（3）如果 a 是一个正数，那么 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$，$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$。

（4）$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$。

（5）$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$。

邻补角　将一个（小于180°的）正角的一边反向延长，这条反向延长线与这个角的另一边构成的角，和原来的角的关系称为互为邻补角。两个角互为邻补角时，其中的一个角叫做另一个角的邻补角。每一个（小于180°的）正角有两个邻补角，它们是一对对顶角。

角　有公共端点的两条射线所组成的图形。其公共端点叫做角的顶点，两条射线叫做角的边。角也可以看做是由一条射线绕着它的端点旋转而生成

的，起始位置的射线叫做角的始边，终止位置的射线叫做角的终边。角可以用符号“∠”或一个希腊字母表示，如∠AOB、角α等。按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角，特别地，当一条射线没有作任何旋转时，称之为零角。在角的概念推广后，所有与α角始边、终边都在同一位置，即始边、终边重合的所有的角，连同角α在内，可以用式子$k\cdot 360^\circ+\alpha(K\in Z)$来表示。即对于给定的顶点、始边和终边，确定了一个由无限个角组成的集合。与α角始边、终边都相同的角的集合可记作$\{\beta|\beta=K\cdot 360^\circ+\alpha,\ K\in Z\}$。在平面几何里，

除非特别指明者外，不考虑角的旋转方向，即不考虑角的正负、并且一般均指小于平角的角。

角平分线　从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线。OC是∠AOB的平分线，可以记作

$$\angle AOC=\angle COB \text{ 或 } \angle AOC=\frac{1}{2}$$

$\angle AOB$等。在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等；到一个角的两边的距离相等的点，在这个角的平分线上。角的平分线是到角的两边距离相等的点的轨迹。

角边角公理　有两个角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）。现行中学教材使用了扩大的公理体系（见公理条），以利于学生接受，这样只保证公理体系的相容性，未能保证其独立性和完备性。实际上，本命题的真实性可以象边角边公理一样，可以用叠合法证明（见边角边公理条），因而亦称“角边角定理”。

角角边定理　有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）。本定理在中学几何教材中是做为角边角公理的推论出现的。因为经过了论证，所以推论也应视为定理。

角度制与弧度制之间的换算关系　对于同一个角，当分别用角度制和弧度制的单位来度量时，所得的量数除零角以外都是不同的，它们之间的换算关系是：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{弧度};$$

$$1\text{弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ$$

$$=57^\circ 18'。$$

条件等式　只能用特定的数代替等式中的字母才能成立的等式。例如，$x-y=5$。

应用题　依现实中的实际问题为背景，用语言或文字叙述的数学问题。例如，某工程，甲、乙两队合作需80天完成，若由甲队独做72天，再由乙队独做90天，可以完成全部工程。求甲、乙两队独自完成全部工程，各需几天？

应用题的分类

- 应用题
  - 简单应用题
  - 复合应用题
    - 典型应用题
    - 一般应用题

应用题的结构　应用题由条件和问题两部分构成。条件是指已知量的数

值，已知量与已知量、已知量与未知量间的相互关系。问题是指要求出的未知量的数值。

应用题的基本要求 （1）完备性，即题目的条件必须充分，足以保证能求出未知量的数值。（2）无矛盾性，即题目中的条件之间、条件与问题之间均不能相互矛盾。（3）独立性，即题目的条件不能过剩。

应用换元法计算定积分 由于计算定积分$\int_a^b f(x)dx$的关键在于先求出被积函数$f(x)$的一个原函数$F(x)$，然后再计算原函数的改变量$F(b)-F(a)$，所以，可以运用不定积分中的换元法来求原函数$F(x)$。但值得特别注意的是：在换元过程中，如果设了新的积分变量，则在求关于新积分变量的定积分时，要相应地改变积分的上、下限。例如计算

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$。设$u=2x$，则$du=2dx$，

且当$x=\frac{\pi}{6}$时，$u=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$；当$x=\frac{\pi}{4}$时，$u=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即原来的积分变量$x$从$\frac{\pi}{6}$变到$\frac{\pi}{4}$时，新的积分变量$u$相应地从$\frac{\pi}{3}$变到$\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du=\frac{1}{2}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)。$$

如果没有设新的积分变量，一定不要改变积分的上、下限。

应用积分表计算不定积分 计算时，可以从“积分表”中查找所求积分的结果。在全日制十年制学校高中课本《数学》第四册后面所附的“积分表”共分四类：（1）基本积分表；（2）有理函数的积分；（3）无理函数的积分；（4）超越函数的积分。在应用表时，应先判断被积函数是属哪一类型的函数，然后到所属表中去查找。

如积分$\int\frac{x}{(3x+5)}dx$中的被积函数$f(x)=\frac{x}{(3x+5)^2}$是有理函数，就在表（2）类中查找。积分$\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx$的被积函数为超越函数，就在表（4）类中查找。但是，有一些积分不能直接用“积分表”查找结果，需要先进行变量替换，将被积函数转化为积分表公式中之一的形式，然后再利用“积分表”查找。如积分$\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$，先变换被积式为$\frac{1}{(1+x^2)^2}d(x^2)$，即

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}d(x^2)$，再用表（2）查找求得结果。

应用数列极限的定义证明数列的极限方法　从数列极限的定义可以知道，如果对于任意小的正数ε(即$\varepsilon>0$)，只要能找到与之对应的N，当$n>N$时，有不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立，就证明了常数A是数列$\{a_n\}$的极限。证明的步骤是：（1）给定任意小的正数ε；（2）解绝对值不等式$|a_n-A|<\varepsilon$，找N；（3）取正整数N，并令$n>N$；（4）由不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立，推出A是数列$\{a_n\}$的极限。例如，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$。其证明过程是：对任意小的$\varepsilon>0$，由$|a_n-A|=\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}$。令$|a_n-A|=\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$，得$n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$。于是取正整数$N\geqslant\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$，则当$n>N$时，有$|a_n-A|=\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立。故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$成立。应当注意在证明过程中，由不等式$|a_n-A|<\varepsilon$解出的仅是与$\varepsilon$有关的数，这个数不一定是正整数，如$\varepsilon=0.01$时，$\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4\times0.01}-\frac{1}{2}=24.5$，取正整数$N\geqslant\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$时，即取$N=25$，当$n>N$(即$N>25$)时，项数相应的从$n=26$开始。因此，证明中不要忘记取$N$为正整数。实际上，在证明极限过程中，并不要求把$N$的准确数值求出来，而只需证明它的存在就可了。但是，在证明它的存在时，还有两个值得重视的问题：（1）对每一个预先给定的正数ε，应是一个任意小的正数，不是比较大的正数。如果预先给定的ε较大，虽能使不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立，也不能说明a_n与A是无限接近的。如数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限是1。若预给定的正数$\varepsilon=1，2，3，\cdots$总存在一个正整数$N(N=1)$，当$n>N$时不等式$|a_n-1|=\left|\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon=1，2，3，\cdots$恒成立，不能断定$a_n$与$A$（即$\frac{1}{n}$与1）是无限接近的。只要再取$\varepsilon=0.1$，找得$N=2$，就使$|a_n-A|=\left|\frac{1}{n}-1\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>0.1$，可见数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限不是1。（2）用定义证明数列极限时，在解不等式$|a_n-A|<\varepsilon$时，常存在不易解的情况，难以给出判断。如证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$。遇此情况，可采用

“适当放大法”，以简化证明。采用这种方法证明过程是：对于任意小的正数 ε，由 $|a_n-A|=\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|=\frac{|\sin n|}{n}$。因为 $|\sin n|\leqslant 1$，则 $\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}$。令 $|a_n-A|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$，则 $n>\frac{1}{\varepsilon}$。所以取正整数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，$|a_n-A|=\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$ 成立。故结论得证

在这一证明过程中，利用 $|\sin n|\leqslant 1$ 进行了适当放大，简化了证明过程。

序数 用来表示有序集合中元素次序的数。例如，一个班有40个同学，把他们编成第1号，第2号……、第40号，这时的1、2、……40都是序数。序数的第1、第2……与数序的1、2……在概念上是不同的，前者的2表示排列，后者的2表示二个单位。

判定定理 根据组成几何图形的某几个元素的关系，可以断定这个图形归属的正确命题，或者根据两个几何图形中某些对应元素的关系，可以断定这两个图形之间存在某种关系的正确命题。

判定极限存在的两个定理和两个重要极限

定理1：如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 处的附近满足条件：（1）$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$（$A$ 为常数），则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。这个定理又叫做“两边夹定理”。它告诉我们：函数 $f(x)$ 夹在两个函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 之间，在同一过程中，若函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的极限都是 A 时，则函数 $f(x)$ 在这个过程中必有极限且极限值也是 A。例如，在点 $x=0$ 处附近，由图1可以明显看出：当 $x>0$ 时 $\sin x<x<\operatorname{tg}x$，则 $\sin x>0$，有 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$；当 $x<0$ 时，$\operatorname{tg}x<x<\sin x$，则 $\sin x<0$，有 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$，所以 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，故根据两边夹定理，得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。这是一个极为重要

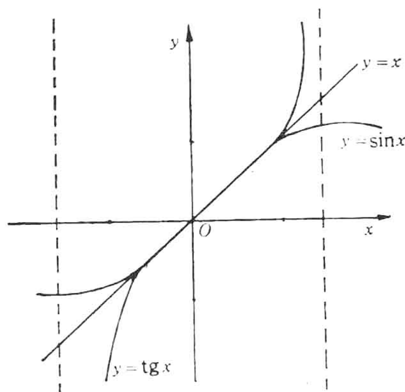


图1

的极限，利用它可以解决一些很不好解决的极限计算问题。

定理2：如果增数列或减数列 $\{a_n\}$ 是有界的，则当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 必有极限。

在平面直角坐标系上，可以明显看到这一定理的正确性。不妨设数列 $\{a_n\}$ 为增数列，且 $|a_n|<M$ 成立，则当 n 无限增大时。a_n 必然无限接近于某数 A（如图2）。例如，数列 $\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 就是增数列。可以证明这个数列总是小于定数3，是个有界数列。根据这个定理2，这个数列必定有极限，通常用字母“e”表示这个极限值，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$。可以证明，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限也是 e，即

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。这是另一个极为重要的极限，利用它可以解决另一类不好计算的极限问题。

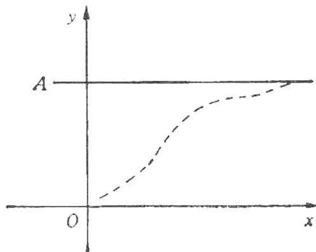


图2

完全平方公式　两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上（或者减去）它们的积的2倍，即

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2。$$

完全立方公式　两数和（或差）的立方等于这两个数的立方和（或差）与每一个数的平方乘以另一个数3倍的和(或差)，即 $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$。

证明　从命题的题设出发，通过推理来判断命题的结论是否成立的思维过程。任何逻辑证明都由论题、论据、论证三部分组成。论题是需要证明其真实性的判断，数学证明题中的结论即“求证”部分就是论题。论据是用来证明论题真实性所引用的那些判断，数学证明中的论据包括题设中给出的已知条件、已知数据以及已知的公理、定理、定义、公式等。论证就是根据论据进行一系列推理来证明论题真实性的过程，数学证明题中的“证明”部分就是论证。按照论证方式的不同，证明可分为演绎证明和归纳证明两类。按照论证方法的不同，证明可分为直接证明和间接证明两类。

证明不等式的比较法　因为 $a-b>0\Longleftrightarrow a>b$，因此要证明 $a>b$，只要证明 $a-b>0$，这是证明不等式常用的一种方法，通常叫做比较法。为了确定不等式两边的差的正负，有时要把这个差变形成为一个常数，或者变形为一个常数与一个或几个平方和的形式，也可变形为几个因式的积的形式，以便于判断其正负。

证明不等式的分析法　从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的条件，把证明这个不等式转化为判断这

条件是否具备的问题。如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立。这种证明方法通常叫做分析法。

证明不等式的综合法 利用已经证明过的不等式作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式，这种证明方法通常叫做综合法。

补集 设I为全集，A为I的一个子集，即$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做A的补集，记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=\{x|x\in I,且x\notin A\}$，读作$A$补。例如，$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，则$\overline{A}=\{2,4,6\}$。对于任何集合$A$，有 $A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$，$\overline{\overline{A}}=A$。

初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数叫做基本初等函数。初等函数是指能用一个解析式表示，而且这个解析式是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所形成的函数。微积分主要研究初等函数。象$f(x)=\log_2(x^2-1)$，

$y=\ln\cos\dfrac{1}{x+1}$，$y=\arcsin x^2$等

都是初等函数。但要注意，分段函数不是用一个解析式表示的，因而它不是初等函数。

初等函数的连续性 初等函数在定义域内都是连续的。所以，求初等函数在点x_0处的极限时，应先判断点x_0是否在函数的定义域内，若在定义域内，则函数值$f(x_0)$就是函数$f(x)$在点x_0处的极限值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)。$$

阿拉伯数字 现在世界各国通用的数字1、2、3、4、5、6、7、8、9、0。阿拉伯数字最早并不是由阿拉伯人发明的。在古代，印度人学习了古巴比伦人的六十进位法，创造了从1到0这十个数字和十进位记数法。后来，这十个印度数字传到了西班牙。公元八世纪，阿拉伯人又把印度数字传至欧洲，并逐步推广开来，后人便把这些数字称为阿拉伯数字。阿拉伯数字从创造至今，几经演变。现在通用的是1 2 3 4 5 6 7 8 9 0。由于阿拉伯数字具有简便、独立、清楚、易懂等特点，所以它通用于世界各国。

阿基米德螺线 见等速螺线。

阿拉伯数字记数法 见记数法。

纯小数 整数部分是“0”的小数。

纯虚数 见复数。

纯循环小数 循环节从小数后第一位数字开始的循环小数。例如，0.111……，9.666……等。

环形排列 从n个不同元素中，每次取出$m(1\leqslant m\leqslant n)$个元素，只按元素之间的相对位置而不分首尾地排成一圈，这种排列叫做环形排列。例如，开运动会时，在10名同学中找6名同学站在环形跑道上值勤，有多少种不同的站法，就是环形排列问题。

拉格朗日中值定理 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，那么在(a,b)内

至少有一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

取对数求导法　函数求导法的一种，它对幂指函数和一些特殊函数的求导是较为方便的。（1）幂指函数是指形如$y=f(x)^{\phi(x)}$（一般地，y的定义域是使$f(x)>0$的全体实数）的函数。如$y=x^x, y=(\sin x)^{\cos x}, y=(\ln x)^x$，$y=x^{\frac{1}{\ln x}}$等，都是幂指函数。欲求幂指函数的导数，既不能用幂函数的求导法则，也不能用指数函数的求导法则求幂指函数的导数。根据幂指函数的特点，可以采用取对数求这类函数的导数。通过对函数的两边取对数，就把作为指数的变数落下来，就可用所学过的求导方法求解了。下面通过两个具体例子来说明"取对数求导法"的应用。例如，①求幂指函数$y=(\sin x)^{\cos x}$的导数；②求幂指函数$(\cos x)^y=(\sin y)^x$的导数。

对①的求解过程是：两边取对数，得$\ln y=\ln[(\sin x)^{\cos x}]=\cos x\ln\sin x$。再两边各对$x$求导，得$(\ln y)'_x=(\cos x\ln\sin x)'x_0$根据隐函数的求导法则，得$\frac{1}{y}\cdot y_x'$

$$=-\sin x\cdot\ln\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x,$$于是有$y_x'=y\left(\frac{\cos^2x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)$

$$=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1-\sin^2x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x-\sin x\cdot\ln\sin x\right)=(\sin x)^{\cos x}\left[\frac{1}{\sin x}-\sin x\cdot(1+\ln\sin x)\right]。$$

对于②的求解过程是：两边取对数，得$\ln(\cos x)^y=\ln(\sin y)^x\Rightarrow y\ln\cos x=x\ln\sin y$。再两边各对$x$求导，得$y'_x\ln\cos x+y\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=\ln\sin y+\frac{x}{\sin y}\cdot\cos y\cdot y'_x\Rightarrow y'_x\ln\cos x-y\operatorname{tg}x=\ln\sin y+x\operatorname{ctg}y\cdot y'_x\Rightarrow y'_x(\ln\cos x-x\operatorname{ctg}y)=\ln\sin y+y\operatorname{tg}x\Rightarrow$

$$y'_x=\frac{\ln\sin y+y\operatorname{tg}x}{\ln\cos x-x\operatorname{ctg}y}。$$

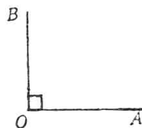
（2）除了幂指函数外，还有一些特殊的函数，应用"取对数求导法"比用其他方法求导数是要简便的。例如求$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数。具体求解过程是：两边取对数，得$\ln y=\ln\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$。再两边各对$x$求导，得$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$

$$\Rightarrow y'_x=y\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right.$$

$$-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\Big]=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot\Big[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\Big]。$$

直角　等于平角一半的角。直角的度数为90°。直角可以用Rt∠表示（Rt是 Right angle 的缩写），图中，$\angle AOB$为直角，记作$\angle AOB=\text{Rt}\angle$，Rt$\angle AOB$或$\angle AOB=90°$，图中角顶处的符号"⌉"表示已知这个角是直角。



直径　对于圆，过圆心的弦叫做圆的直径。对于球，过球心的直线与球面交点间的线段是球的直径。对于一般的圆锥曲线（二次曲线），一组平行弦的中点的轨迹叫做它的直径。圆和椭圆的直径是过中心的弦；双曲线的直径是过中心的直线；抛物线的直径是与其对称轴平行的射线。

直线　在一个科学系统中，总是要对概念下定义，就是说要用已知的概念来定义新概念，这样，就构成了一个概念的序列。而已知的概念又必须用它们以前的概念来定义，这样追溯上，总有一些概念不能用其他概念来定义，这样的概念在这个科学系统中称为不定义概念或原始概念。几何学中的直线就是这种不定义的概念。在几何教学中，可以对直线做一些描述，说明直线是从客观事物中抽象出来的，例如一根拉紧的线、一张纸的折痕以及由小孔中射入的光线等都给我们以直线的形象。一条直线上有无限多个点，直线是向两方无限延伸着的。经过两点有一条直线，并且只有一条直线，即两点确定一条直线。直线可以用表示它上面两个点的两个大写字母来表示，也可以用一个小写字母来表示，如直线AB、直线l等。

直线系　是指具有某一共同性质的直线集合叫做直线系。它的方程叫做直线系方程。例如，直线方程$y=kx+b$，只要k和b中有一个是常数时，就是直线系。当k是常数，b不是常数时，它是平行的直线系；当b是常数，k不是常数时，它是共点的直线系。共点的直线系也叫做直线束。

直棱柱　侧棱和底面垂直的棱柱。

直二面角　平面角是直角的二面角。

直三面角　三个面角都是直角的三面角。

直角三角形　有一个角是直角的三角形。在直角三角形中，夹直角的两边叫做直角边，直角的对边叫做斜边。直角三角形的两个锐角互余，斜边上的中线等于斜边的一半，两直角边的平方和等于斜边的平方。

直角坐标系　（1）在平面上选定两条互相垂直的直线，分别用箭头表示出正方向；（2）以两条互相垂直的直线的交点作为原点；（3）选取任意（适当）长的线段作单位长度（两条直线所选定的单位长度不一定相同），所形成的坐标系叫做平面直角坐标系，亦称笛卡尔坐标系。在这个坐标系

中两条互相垂直的直线叫做坐标轴。应用时，常将其中的一条直线水平放置叫做横轴，用$x'x$表示，与横轴垂直的另一条直线叫做纵轴，用$y'y$表示，坐标原点常用O表示，简称原点。

直线坐标系　（1）在给定的直线l上确定正方向；（2）在直线l取一定点作为原点l一般从0表示这一点）；（3）任取一条定长线段作为单位长度。于是就说在直线l上建立了直线坐标系。这条有正方向、原点和单位长度的直线也叫做数轴或坐标轴。O点叫做坐标原点，它将坐标轴为两部分：从O点向正方向发出的半直线叫做正半轴，从O点向相反的方向发出的半直线叫做负半轴。显然，正半轴上点的坐标都大于零，负半轴上点的坐标都小于零，原点O的坐标等于零。这样实数和数轴上的点建立了一一对应的关系。

直线的法线　设直线l不经过原点，从原点O引射线n和直线l垂直，并交l于N点，则n叫做直线l的法线。规定法线n的正方向是从O到N的方向。用θ表示从x轴的正方向到法线的正方向的角，这个角θ叫做法线的辐角，用p表示$|ON|$，这时$0\leqslant\theta<2\pi$，$p>0$。如果直线l经过原点，这时有两种情况：（1）当l不与y轴重合时，显然$p=0$，这时规定法线的正方向是向上的；$0<\theta<\pi$；（2）当l与y轴重合时，规定法线的正方向向右，即和x轴的方向相同，这时$p=0$，$\theta=0$。

直线的斜率　一条直线倾斜角α的正切叫做这条直线的斜率。斜率通常用k来表示，即$k=\operatorname{tg}\alpha$。当一条直线的倾斜角是96时，那么，它的斜率不存在。斜率可以表示一条直线对x轴的倾斜程度。

直接积分法　在求不定积分的某些问题中，可以或只需要经过简单的恒等变形，直接运用基本积分公式与不定积分的两个运算法则：

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=$$

$$\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$ 来求积分结果的方法。运用直接积分法计算结果应注意以下几种情况：

（1）在遇到被积函数为$x^n(n\neq-1)$类型的积分，如$\sqrt{x^3}$、$\frac{1}{x^3\sqrt{x}}$等，一般都把被积函数化成幂的形式，即化为分数指数或负指数的形式再积分。

（2）当被积函数是一个比较复杂的函数时，往往把它折成几个简单函数的和的形式，再积分。如

$$\int\frac{2\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left[\frac{2\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right]dx=\int 2x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$-\int e^x dx+\int x^{-1}dx=\cdots\cdots。$$

（3）当被函数的分子、分母可以进行因式分解时，应先进行因式分解，然后约去可约去的因式，最后再

约分。如$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx =$

$$\int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} dx = \cdots\cdots$$

（4）在求不一定积分的具体问题中，常需要从它的全部原函数的中确定一个具有已知条件的原函数，即从被积函数的全体原函数族 $F(x)+C$ 中，挑选一条通过某点(x_0, y_0)的曲线，这时需要利用已知条件来确定出常数C，从而找出所要求的具体原函数（通过一条已知点的一条曲线）。

（5）利用直接积分求不定积分，在进行一些简单的恒等变形时，需要一些技巧如利用“加1减1”、“同加、减一项”、“同乘、同除一个非零的代数式”的技巧。对此应备加注意应用。

（6）检验计算结果是否正确，可根据积分法与微分法的互逆运算关系，将求出的不定积分求导，视导数是否等于被积函数。

直线的倾斜角　一条直线向上的方向和x轴的正方向所成的最小正角，叫做这条直线的倾斜角，简称倾角。如图1、2中的α，当直线和x轴平行时，规定它的倾角为零，因此，直线的倾斜角α的范围是$0 \leqslant \alpha < \pi$。

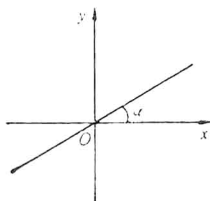


图 1

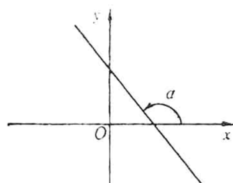


图 2

直线和平面平行　一条直线和一个平面没有公共点。

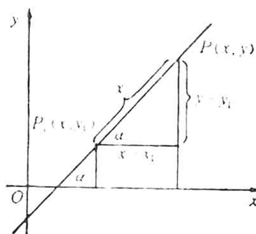
直线和平面垂直　如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，就叫做这条直线和这个平面垂直。这条直线叫做这个平面的垂线，这个平面叫做这条直线的垂面。平面的垂线和平面的交点叫做垂线足，简称垂足。

直线和平面相交　一条直线和一个平面只有一个公共点。

直线的参数方程　设直线经过$P_1(x_1$ $y_1)$点，它的倾斜角为α，那么

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cos\alpha, \\ y = y_1 + t\sin\alpha \end{cases}$$

就是经过(x_1, y_1)点，且倾斜角为α的直线的参数方程，t叫做参变数，简称参数。它的几何意义：$|t|$就是$P(x, y)$和$P_1(x_1, y_1)$的距离，自P_1至P的方向与α的终边的方向一致



时，t 取正值；否则 t 取负值。一般地说，$\begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt \end{cases}$ 是一条直线的参数方程，这条直线经过 $P_1(x_1, y_1)$ 点，斜率是 $\frac{b}{a}$。但是这里的参数 t 并不一定都具有上面所说的几何意义。

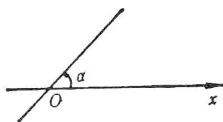
直线和平面的交角　一条直线和它在平面内的射影所成的锐角叫做直线和平面的交角也叫做直线和平面所成的角。

直线和平面的距离　一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离叫做这条直线和这个平面的距离。

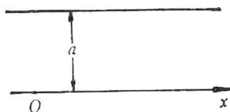
直线的一般式方程　在直角坐标系中，直线的一般式方程是 $Ax + By + C = 0$，这里 A、B 不同时为零。平面内任何一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程。它的图象都是一条直线。

直线的两点式方程　已知直线经过 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点，那么直线的两点式方程为 $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$（＊）或 $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$，简称两点式。使用此公式时，应注意以下几点：（1）当 $x_1 = x_2$ 时，方程（＊）可改写成 $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$，这时 $x - x_1 = 0$，说明直线平行于 y 轴。（2）当 $y_1 = y_2$ 时，方程（＊）可改写成 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$，这时 $y - y_1 = 0$，说明直线平行于 x 轴。（3）如果 P、P_1 和 P_2 三点为直线 L 上的三点，那么根据三点共线的条件，直线 L 的两点式方程可以写成三阶行列式的形式 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$（＊＊）。（4）可以利用方程（＊）或（＊＊）来检验已知的三个点是否在同一条直线上。

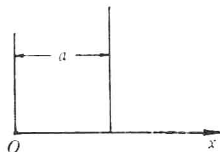
直线的极坐标方程　方程 $\theta = \alpha$，$\rho\cos\theta = a$；和 $\rho\sin\theta = a$ 都是直线的极坐标方程。它们的图形如图所示。



直线　$\theta = \alpha$



直线 $\rho\cos\theta = a$



直线 $\rho\sin\theta = a$

直线的法线式方程 设平面内的一条直线与它的法线相交于N，$|ON|=p$，法线的辐角为θ，方程$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$，叫做直线的法线式方程，简称法线式。如果$\theta=0$或者$\theta=\pi$，那么上面的式子就成为$x-p=0$或者$-x-p=0$；如果$\theta=\frac{\pi}{2}$或者$\theta=\frac{3}{2}\pi$，那么上面的式子就成为$y-p=0$或者$-y-p=0$。它们分别表示平行于坐标轴并且和原点的距离等于$P$的直线，所以上面的式子对于平行于坐标轴的直线也能适用。

直线的点斜式方程 已知直线l经过$P_1(x_1,y_1)$，并且它的斜率是k，那么直线l的点斜式方程是
$y-y_1=k(x-x_1)$。当直线l平行y轴时，倾角是$\frac{\pi}{2}$，斜率$k=\text{tg}\frac{\pi}{2}$不存在，其点斜式方程不存在。

直线的斜截式方程 已知直线在y轴上的截距是b，它的斜率是k，那么，直线的斜截式方程是$y=kx+b$。如果直线平行于y轴，设它与x轴的交点是$A(a,0)$这时直线的倾角$\alpha=\frac{\pi}{2}$，而$\text{tg}\frac{\pi}{2}$不存在，即斜率k不存在，这时直线的方程为$x=a$。

直线的截距式方程 已知直线在x轴和y轴上，的截距分别是a和$b(a\neq0,b\neq0)$，那么，直线的截距式方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。如果直线经过原点，那么$a=0$，$b=0$，这时截距式方程不存在；如果直线平行于$x$轴或者平行$y$轴时，截距式方程也不存在。

直线l_1到直线l_2的角 直线l_1依逆时针方向旋转到与l_2重合时所转的角。斜率分别为k_1和k_2的两条直线l_1到l_2的角为θ，则$\text{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$。

直线和圆的位置关系 一条直线和一个圆的位置关系有以下三种情况：（1）直线和圆相离—即直线和圆没有公共点；（2）直线和圆相切—即直线和圆只有一个公共点，这时，直线AB叫做⊙O的切线，公共点P叫做切点；（3）直线和圆相交—即直线和圆有两个公共点这时，直线AB叫做⊙O的割线。

直棱柱的侧面展开图 把一个侧棱长为h，底面边长为a的直棱柱的侧面，沿着一条侧棱展开，就可以得到一个直棱柱的侧面展开图。这个展开图是一个矩形。这个矩形的一边长是直棱柱的底面周长，另一边的长是直棱柱的高。

直线在坐标轴上的截距 一条直线与两条坐标轴分别相交，原点到交点的有向线段的数量，叫做这条直线在坐标轴上的截距。直线在x轴上的截距简称为横截距；直线在y轴上的截距简称为纵截距。

直线和平面平行的判定 平面外的一条直线如果和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行。

直线和平面平行的性质 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的一个平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。

直线和平面垂直的判定 （1）如果一条直线和一个平面内的两条相交直线

都垂直，那么这条直线就垂直于这个平面。（2）如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

直线和平面垂直的性质　如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行。

直线两点式的极坐标方程　在极坐标系中，经过已知两点$P_1(\rho_1, \theta_1)$和$P_2(\rho_2, \theta_2)$的直线方程

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}$$

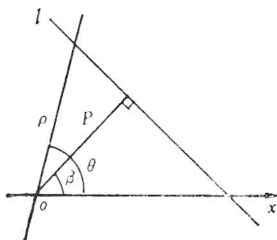
。这个方程是由三角形面积公式而推得，即

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta-\theta_1)+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin(\theta_2-\theta)$$

。因为$\rho_1\neq 0$，$\rho_2\neq 0$，所以等式两边同除以$\frac{1}{2}\rho\rho_1\rho_2$便得方程。

直线法线式的极坐标方程　在极坐标系中，$\rho\cos(\theta-\beta)=p$ 表示已知法线辐角为 β，法线长为 p 的直线 l 的方程，这是用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入直线的法线式方程 $x\cos\beta+y\sin\beta-p=0$ 得到的。



直线点法式的极坐标方程　在极坐标系中，经过已知点(ρ_0, θ_0)、法线幅角为β的直线方程 $\rho\cos(\theta-\beta)=\rho_0\cos(\theta_0-P)$。它是将已知点$(\rho_0, \theta_0)$的坐标和$P$的值代入法线式而得到的。

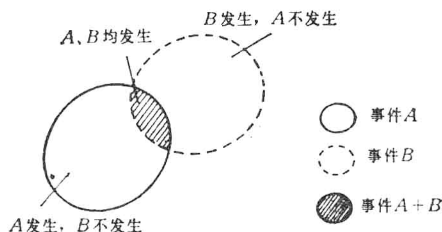
直线一般式方程化为法线式方程的方法　（1）首先把直线方程写成一般式方程 $Ax+By+C=0$。（2）方程的两边同时乘以法线化因子

$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$，得$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$。（3）正确地选取 λ 的符号：如果，$C\neq 0$，λ 与 C 取异号；如果 $C=0$，$B\neq 0$，λ 与B取同号；如果 $C=0$，$B=0$，λ与A取同号。特别注意，把直线一般式方程化为法线式方程后，不能去分母化简，也不能用“-1”乘以或除以两边。

事件的合成关系　“事件A与B中至少有一个发生”的事件C，称为事件A与B的合成事件，记做$C=A+B$。并说事件C是事件A和B的和或并。这种合成关系可用下图表示。

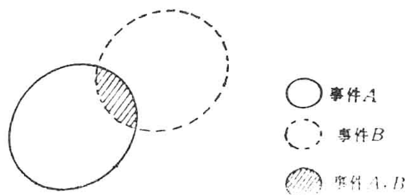
由图可以看出，事件$A+B$通常包含着三个部分：（1）A 发生而B不

发生；（2）B发生而A不发生；（3）A和B都发生。当事件A和B互不相容时，事件$A+B$不包括（3）这一部分。事件合成关系可以推广到有限多个事件的合成情况中去。"事件A_1，A_2，……，A_n中至少有一个发生"这一事件记作A，事件A就是事件A_1，A_2，……，A_n这些事件的合成，记作$A=A_1+A_2+\cdots+A_n$。例如：有两个战士向同一目标射击，那么"命中目标"这一事件，就意味着两位战士中，"至少有一个命中目标"。如果记"第一位战士射击命中目标"为事件A，记"第二个战士射击命中目标"为事件B，"命中目标"记为事件C，则"C发生"意味着"A与B中至少有一个发生"于是有$C=A+B$。



事件的兼并关系　通常是指如果事件C相当于"事件A和B同时发生"，那么事件C兼有事件A与B。记作$C=A\cdot B$或$C=AB$。AB读作事件A与事件B的积或交。这种兼有关系可用下图表示。

事件的兼有关系可以推广到有限个事件中去，如果把"事件A_1，A_2，……A_n同时发生"记作A，那么A就是A_1，A_2，…A_n这些事件的积，写作$A=A_1A_2\cdots\cdots A_n$。



事件的独立关系和包含关系　事物总是一分为二的。每一事件总是存在着与它意义对立的事件。如"某元件是好品"与"某元件是次品"就是互相对立的事件。两个互为对立的事件总是互不相容的（互斥的），但两个互不相容事件还不一定是对立事件，只有当事件A和B互不相容，并且在一

次试验中必定发生其中之一，事件 A 和B才是互相对立的事件。事件 A 的对立事件习惯上记为$\overline{A}$，当然$\overline{A}$的对立事件也就是 A。此外，我们还规定必然事件和不可能事件是互为对立的。根据对立事件的含义，可以得到 $A+\overline{A}=U$，即互为对立事件的和是一个必然事件。再根据概率加法公式，有$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(U)=1$，即对立事件概率和为 1。移项后，得$P(\overline{A})=1-P(A)$。

有两个事件 A 和B，如果事件A发生，那么事件 B一定发生，就称事件B包含事件A，记作$A\subset B$。如，事件“5 件产品中至少有一件次品”就包含事件“5 件产品中有三件次品”。从事件包含关系的意义可以看出，如果事件B包含事件A，那么 A 发生的可能性不会大于B 发生的可能性，故有$P(A)\leqslant P(B)$。

奇数　不能被 2 整除的整数。例如，+1、-1、+3、-3、……。在小学数学里，由于没有学习有理数，故只把+1、+3、……等看作是奇数。

奇函数　见函数的奇偶性

欧拉公式　把模为 1，辐角为θ（用弧度为单位）的复数$\cos\theta+i\sin\theta$用记号$e^{i\theta}$来表示，即$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（$e=2.71828\cdots$，是自然对数的底数）这个式子叫做欧拉公式。例如

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=e^{i\frac{\pi}{4}}。$$

欧几里得几何　埃及是几何学的重要发源地之一，相传几何学起源于古代埃及的测地术。后来古埃及的测地术传入希腊，随着贸易和航海事业的发展，大大丰富了几何学的内容。当时古希腊的哲学与逻辑学思想比较发达，如亚里斯多德(Alistotle，约公元前384～前332）就提出了三段论推理法。同时，古希腊人积累了大量的几何事实，创立了许多证明方法。在此背景下，到公元前三世纪，欧几里得（Euclid，公元前330～前 275）把原有的几何事实按照比较严密的逻辑系统，建立了几何学的演绎体系，著有《几何原本》十三卷。该书·根据公理、公设和定义来论证其他命题，可以说《几何原本》是公理法的源泉。自此，几何学成为一门独立的学科。欧几里得《几何原本》原有的 13 卷中，前四卷及第六卷论述平面几何，第五卷及第七至十卷论述比例及算术理论，后三卷论述立体几何。此后世界各国的初等几何的教科书一直沿袭《几何原本》的内容，人们一直把这种体系的几何学称之为欧几里得几何学。由于历史条件的限制，欧氏几何原本在逻辑结构上还有不少缺陷，他的公里体系不够完整严密，直至1899年德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862～1943）才完成了这一几何的奠基工程，著有《几何基础》一书，建立了完整的公理体系，保证了公理体系的相容性、独立性和完备性（见公理条），使欧几里得几何学有了完整的逻辑基础。

转置行列式 把行列式D的各行变为相应的各列所得到的行列式D'。以三阶行列式为例，即

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$则D'=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。$$

轮换对称式 含有几个字母整式，把这几个字母同时轮流地交换后，这个式子不变，就称这个式子为轮换对称式。例如，把 $a+b+c$中的a换成b，b换成c，c换成a得到 $b+c+a$，它与原来式子$a+b+c$一样。整式 $a+b+c$ 是轮换对称式。

非十进复名数 单位间的进率不是十的复名数。

非欧几里得几何 罗巴切夫斯基几何与黎曼几何统称非欧几里得几何，简称非欧几何。非欧几何与欧氏几何的主要区别在于它改变了欧氏几何的平行公设。欧几里得几何的平行公设即第五公设（见平行公理条），该公设的等价命题是："在一平面上，通过已知直线外的一点只能引一条直线，使之与原有直线不相交。"很多人认为欧几里得《几何原本》中的其他公设都是比较显而易见的，而第五公设似不浅显，从而怀疑它的独立性，试图证明该公设，但均以失败而告终。在试图证明第五公设失败的过程中，却产生了非欧几里得几何学。1826年俄国数学家罗巴切夫斯基（Лобачевский，1792～1856）指出了欧氏几何第五公设的独立性，并且创立了罗巴切夫斯基几何学。在罗氏几何里保留了欧氏几何第五公设之外的其他公设和公理，但取消了第五公设及其有关命题，而代之以一个相反的公设："在一平面上，通过已知直线外的一点，至少可引两条直线都与原有的直线不相交"。此后，德国人黎曼（Riemann，1826～1866）又提出了不同于罗氏几何的新假设："在一平面上，通过已知直线外的一点，不可能引出一条直线与原有的直线不相交"，从而创立了另一种非欧几何，即黎曼几何。也有人把罗巴切夫斯基几何和黎曼几何称为双曲线几何与椭圆几何。非欧几何与欧氏几何表面上看似有矛盾，但他们都反映了现实空间的相对真理。

典型复合应用题 数量关系特殊，用特殊方法来解答的复合应用题。例如，"求平均数问题"、"归一问题"和"相遇问题等。

罗马数字 罗马人创造的数字。大约两千五百年前，罗马人是用手指作为计算工具的。为了表示1、2、3、4个物体，就分别伸出1、2、3、4个手指；表示5个物体就伸出一只手；表示10个物体就伸出两只手。当时，为了记录下这些数字，便在羊皮上画出Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ来代替手指数；要表示一只手时，就画成"V"表示大拇指与食指张开的形状；表示两只手时，就画成"VV"形，后来又演变成一只手向上，一只手向下的"X"形。这就是罗马数字的雏形。后来，为了表示较大的数，又用符号C表示

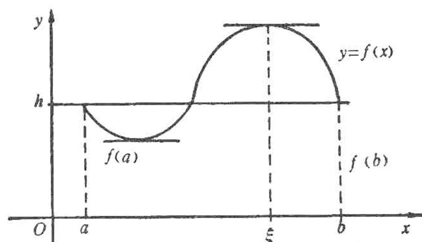
100，C是拉丁字“Centum”（100的意思）的头一个字母。同理，由于拉丁字“mille”表示1000的意思，所以用M表示1000。取字母C的一半，写成符号L表示50。用字母D表示500。这样，罗马数字就有了下面七个基本符号：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

由于罗马数字记数不如阿拉伯数字方便，所以很少被人使用。

罗尔中值定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上连续，在开区间（a，b）内可导，且在两端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

罗尔定理的几何意义：若函数 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，那么它在闭区间〔a，b〕上有一条连续曲线 $y=f(x)$，且过曲线上每一点（端点除外）都可以作一条切线，当曲线两端点的纵坐标相等时，在曲线上至少能找到一点（ξ，$f(\xi)$），$\xi\in(a,b)$，使曲线在该点的切线平行于 x 轴（如图）。



罗马数字记数法　用罗马数字记数的方法。其方法是：（1）若干相同数字写成一列表示的数，等于这个数字相加的和。例如，III表示3，XX表示20，CCC表示300。（2）若在一个数字的右边附着一个较小的数字，则这个符号所表示的数是大数字加小数字的和。例如，VI表示 $5+1=6$，XVI表示 $10+5+1=16$。（3）若在一个数的左边附着一个较小的数字，则这个符号表示的数是大数字减小数字的差，例如，IV表示 $5-1=4$，IX表示 $10-1=9$。（4）在数字上面加一条横线，则表示是这个数字的一千位。例如，$\overline{\text{V}}$表示 $5\times1000=5000$，$\overline{\text{XIII}}$表示 $13\times1000=13000$。有时在数字的右下方加一脚码“m”，也表示是这个数字的一千倍。例如，XII_m与$\overline{\text{XII}}$都表示12000。（5）若在一个数字上加两条横线，则这个符号表示是原数的百万倍。例如，$\overline{\overline{\text{CXV}}}$表示 $115\times1000\times1000=115,000,000$。

垂足　两条直线互相垂直时，它们的交点叫做垂足。如 AB、CD 两直线相交于 O，并且互相垂直，记作

“$AB\perp CD$，垂足为O”。

垂线 当两条直线相交所构成的四个角中有一个是直角时，称这两条直线互相垂直。此时，其中一条直线叫做另一条直线的垂线。经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。

垂线段 经过一点所作的已知直线的垂线上，这一点与垂足之间的线段叫做这点到已知直线的垂线段。直线外一点与直线上各点连结的所有线段中，垂线段最短。

垂径定理 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧。本定理的题设与结论分别是两个与三个属性的集合，它们分别是：

题 设

$\begin{cases} A. \text{直线过圆心} \\ B. \text{直线和弦垂直} \end{cases}$

结 论

$\Rightarrow \begin{cases} a. \text{直线平分弦} \\ b. \text{直线平分弦所得劣弧} \\ c. \text{直线平分弦所得优弧} \end{cases}$

因此题设中A、B之一不动，另一个分别与a、b、c交换，可得六个逆命题；a、b、c中任取其二与A、B同时交换，又可得三个逆命题，这样本定理可以组成九个逆命题，可以证明这九个逆命题都成立。

和见加法。

和倍问题 已知两数的和及两数的倍数关系，求这两个数的一类应用题。其基本数量关系是：

和÷倍数和＝小数；

小数×倍数＝大数。

和差问题 已知两数的和与差，求这两个数的一类应用题。其基本数量关系是：

(和－差)÷2＝小数；

(和＋差)÷2＝大数。

和、差的整除性 （1）若两数都能被同一个自然数整除，则它们的和（或差）也能被这个自然数整除。例如，18和9均能被3整除，它们的和27、差9也能被3整除。（2）若两数中的一个数能被一个自然数整除，则这两个数的和（或差）能被这个自然数整除的充要条件是：另一个数也能被这个自然数整除。

质式 一个整式在给定的数集里，只有它本身是它的因式，这个整式称给定数集里的质式。例如，x^2+1是实数集里的质式。

质数 在自然数中，除了单位1外，只能被1和它本身整除的数。例如，2、3、5、7、11、13、17、……。质数有无穷多个。质数又叫素数。

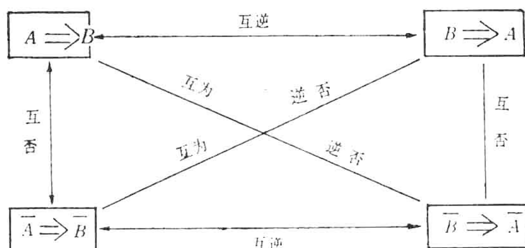
质因数 若正整数a有一因数b，且b又是质数，则称b为a的质因数，又叫素因数或质约数。例如，2、3都是6的质因数。

质数的判定方法 （1）查表法。判定某数是否为质数，可直接查对质数表。若表内有此数，它就是质数。（2）试除法。从2起依次按由小到大的次序用各个质数去除所要判定的数，若除到所得的商比除数小时，还不能整除，则这个数就是质数。

命题 判断一件事情的语句。每一个命题都是由题设、结论两部分组成的。判断是对思维对象及其属性有所断定的思维形式。任何判断必须是肯

定的或者是否定的，无所肯定并且无所否定的就不是判断，如果一个判断所肯定或否定的内容与客观现实相符合，那么这个判断是正确的；否则，就是错误的。所以命题可真可假，有真命题与假命题之分。

命题的四种形式　对于命题"若A则B"（$A\Rightarrow B$）叫做原命题，它有如下三个重要变形，统称命题的四种形式。"若B则A"（$B\Rightarrow A$）叫做原命题的逆命题；"若$\overline{A}$则$\overline{B}$"（$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$）叫做原命题的否命题；"若$\overline{B}$则$\overline{A}$"（$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$）叫做原命题的逆否命题。命题的四种形式，有如下面图示的关系：



两个互为逆否的命题是等价命题。

周角　一条射线由原来的位置，绕着它的端点旋转一周，当终边与始边重合时，所成的角叫做周角。周角的度数为360°，即1周角＝360°。

周期　见周期函数

周期函数　对于函数$y=f(x)$。如果存在一个不为零的常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，$f(x+T)=f(x)$都成立，那么就把函数$f(x)$叫做周期函数，常数T叫做这个函数的周期。例如正弦函数　$y=\sin x$（$x\in R$）和余弦函数$y=\cos x$（$x\in R$）都是周期函数，2π，4π，…，-2π，-4π，…都是它们的周期。

变量　在某一过程中可以取不同数值的量。例如，在路程s（公里）与时间t（小时）之间的关系$s=60t$中，s与t都是变量。

底数　见乘方

废品率　产品加工中，废品数与全部加工产品数之百分率，即废品率

$$=\frac{\text{废品数}}{\text{加工产品数}}\times 100\%。$$

放大比例尺　比的后项是1的比例尺。例如，1000∶1，表示图上距离比实际距离扩大了1000倍。

单比　两个数量所成的比。例如，3∶5。

单比例　组成比例的两个比都是单比的比例。例如，$a:b=c:d$。

单位圆　在平面直角坐标系中，以原点为圆心，以单位长度为半径的圆叫做单位圆。

单名数　带有一个单位的名数。

单项式　对于数字和若干个字母施行

有限次乘法运算所得的式子。其中的字母可以表示常量或变量，数或数与表示常量的字母的积称这个单项式的系数。所有表示未知量的字母的指数的和称做这个单项式的次数。例如，单项式$4x^2y$的系数是4，次数是3。

单调数列 递增数列与递减数列都叫做单调数列。

单元素集合 只含有一个元素的集合叫做单元素集合。例如$\{0\}$，$\{x|x+2=0\}$都是单元素集合。

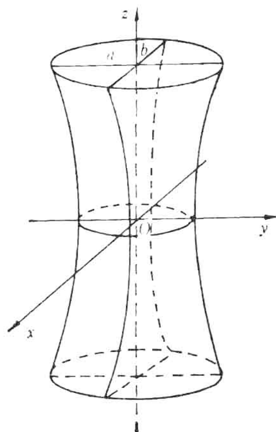
单叶双曲面 由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (2)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (3)$$

中的每一个方程所确定的曲面都叫单叶双曲面，其中a、b、c叫做双曲面的半轴。若$a=b$，则方程（1）变为



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，这时方程表示一个由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。绕虚轴旋转而成的旋转曲面叫做单叶旋转双曲面。它被平面xOy或其平行平面所截得的截痕都是圆。

单项式乘法法则 单项式相乘，系数相乘作为积的系数，对于相同的字母，用它们的指数的和作为积里这个字母的指数，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。例如，

$$(-5a^{n+1}b)(-2a)=10a^{n+2}b。$$

单叶双曲面的截痕 单叶双曲面的截痕是指单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(*)$被坐标面或与坐标面平行的平面所截得的截痕，分述如下：（1）平面xOy（$z=0$）截曲面（$*$）所得截痕为一椭圆，其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，半轴为$a$及$b$与平面$xoy$平行的平面$z=h$截曲面（$*$）所得的截痕也是一椭圆，其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$，半轴为$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$及$\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$。（2）平面$xOz(y=0)$截曲面（$*$）所得的截痕是一双曲线，其方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，实轴与$x$轴相合，虚轴与$z$轴相结合，半轴为$a$及$c$与平面$xOz$平行的平面$y=h(h\neq\pm b)$截曲面（$*$）所得的截痕也是双

曲线，其方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$，半轴的平方为$\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)$及$\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)$。若$h^2<b^2$，则双曲线的实轴平行于$x$轴，虚轴平行于$z$轴。若 $h^2>b^2$，则双曲线的实轴平行于z轴，虚轴平行于x轴。若 $h^2=b^2$，则上列方程成为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$，分解得两个一次方程为$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$这表示平面 $y=b$ 截双曲线所得截痕为相交于点（0，b，0）的一对直线，同理，平面 $y=-b$ 截此双曲线所得截痕为一对相交于点（0、$-b$、0)的直线。（3）平面$yOz(x=0)$和与平面 yOz 平行的平面截曲面（*）所得的截痕也是双曲线，两平面 $x=\pm a$截曲面(*)所得的截痕是两对相交直线。

单项式除以单项式法则　单项式相除，把系数和同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，连同它的指数作为商的一个因式。例如，

$$-5a^5b^3c\div 15a^4b=-\frac{1}{3}ab^2c.$$

单项式与多项式相乘法则　用单项式去乘多项式的每一项，再把所得积相加。例如，$(-4x)x(2x^2+3x-1)=-8x^3-12x^2+4x$。

性质定理　正确揭示几何图形属性的命题。

定理　用推理的方法判断为正确的命题。判断一个命题是否正确，要从命题的题设出发，以已知的概念、公理和其他已知的真命题作为依据，并且要保证推理无误，即任何定理都要经过证明，未经证明的命题不能叫做定理。

定积分的概念　设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，用分点$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$ 把区间〔a、b〕等分成 n 个小区间，在每个小区间$[x_i,\ x_{i+1}]$上取任一点$\xi_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，作和式 $I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$（$\Delta x$为小区间长度），我们把 $n\to\infty$时，I_n 的极限叫做函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的定积分，记作$\int_b^a f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$。这里$a$与$b$ 分别叫做积分下限与积分上限，区间$[a,b]$叫做积分区间，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积式，x 叫做积分变量。

空集　不含任何元素的集合,记作 ϕ。例如，$\{x\mid x+1=x+3\}=\phi$。规定空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集。

空间两直线的位置关系　空间两条不重合的直线之间的位置关系有以下三种：(1)异面直线—没有公共点,不同在任何一个平面内。(2)平行直线—在同一个平面内,没有公共点。(3)相交直线—在同一个平面内，有且只有一

个公共点。

空间直线平行的传递性　如果空间两条直线各与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行。

空间中对应边平行的两角的关系　（1）空间的两个角如果它们的对应边互相平行，并且方向相同，那么这两个角相等。（2）如果空间的两个角，它们的对应边互相平行，并且方向都相反，那么这两个角相等。（3）如果空间的两个角，它们的对应边互相平行，并且有一对对应边的方向相同，另一对对应边的方向相反，那么这两个角互补。

实数　有理数与无理数的统称。

实系数一元 n 次方程虚根成对定理　实系数一元 n 次方程如果有一个虚数根 $a+bi$，则虚数 $a-bi$ 也是它的一个根。

试商法　计算多位数除法求某一位商数时，有时不知商几才对，需把除数看作它所接近的整十数、整百数、……进行试除，由此所得的商称为试商。试商与原除数相乘检验这一位商数是否正确。如果商大了，需调小；如果商小了，要调大，直至找到正确的商为止。这种求商的方法称为试商法。

视图　在工程制图中，将物体按正投影法向投影面投射时所得到的投影称为视图。物体的视图与物体对于投影面的位置有关。如一支圆柱形铅笔，若与投影面平行放置，其投影面上的视图是一矩形；若与投影面垂直放置，其在投影面上的视图则是一圆面。

弧度制　在一个定圆中，等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角。如图1，$\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是1弧度的角。我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零，任一已知角 α 的弧度的绝对值

$$|\alpha|=\frac{l}{r}。$$

如图2，其中 l 为以角 α 作为圆心角时所对圆弧的长，r 为圆的半径。

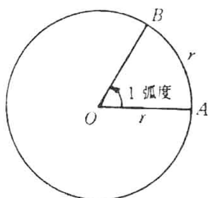


图 1

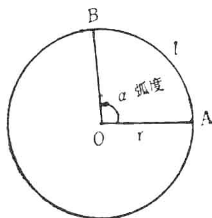


图 2

这种用弧度做单位来度量角的制度叫做弧度制。

弧与弧相连接　两弧的连接分两种情况，如图1中，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A，我们称在连心线 O_1O_2 两旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 外连接；图2中，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于 A 点，我们称连心线 O_1O_2 两旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 内连接。弧与弧连接在工程作图中应用极广。

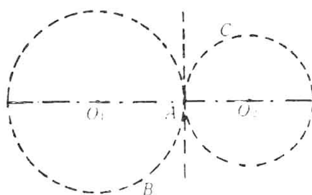


图 1

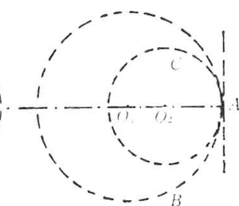


图 2

弦 连结圆上任意两点的线段叫做圆的弦。连结圆锥曲线上任意两点的线段叫做圆锥曲线的弦。

弦切角 顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角。弦切角等于它所夹的弧对的圆周角。

弦心距 从圆心到弦的距离。在同圆和等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各量都相等。

弦切角定理 弦切角等于它所夹的弧对的圆周角。即弦切角的度数等于它所夹的弧的度数之半。

函数 在初中阶段函数的定义是这样叙述的：在某变化过程中有两个变量x和y，变量y随着变量x一起变化，而且依赖于x，如果对于x的每一个确定的值，按照某种对应关系，y都有确定的值和它对应，则y叫做x的函数，记作$y=f(x)$，其中x叫自变量，y叫因变量。在高中阶段引入了集合、映射等概念，从映射刻划函数的定义是这样叙述的：设A，B都是非空的数的集合，f是从A到B的一个对应法则，那么A到B的映射f：$A\to B$就叫做A到B的函数，记作$y=f(x)$，其中$x\in A$，$y\in B$。原象集合A叫做函数$f(x)$的定义域，象集合C叫做函数$f(x)$的值域。很明显$C\subseteq B$。函数是中学数学中最重要的基本概念之一。早在十六、十七世纪，函数概念尚未明确提出之前，数学已经接触到了如三角函数、对数函数、双曲函数等的具体函数。1673年莱布尼兹第一次把函数作为数学术语引进数学。当时莱布尼兹所指的是：象曲线上的点的横坐标、纵坐标、切线的长度、垂线的长度等，所有与曲线上的点有关的量。1698年，瑞士数学家约翰·贝努利(Johann Bernoulii，1667—1748年)，第一次对函数概念进行扩张，把它表述为“由变数x和常数所构成的式子，叫做x的函数”，记作X或ξ。到1718年，他又用φx表示x的函数。1734年欧拉第一次把x的函数记作$f(x)$。1821年与1823年柯西先后两次给出如下的函数定义：对于x的一个值，如果y有完全确定的值与之对应，则y叫做x的函数。根据这个定义，y可以用一个式子或多个式子表示，只要对于x的每一个值，y有与之对应的完全确定的值即可。1837年，数学家狄里克雷给出了如下的定义：

对于x的每一个值，如果y有完全确定的值与之对应，不论x、y所建立的对应方式如何，y都叫做x的函数。这一定义避免了以上各定义中所有关于依赖关系的描述，而且函数$f(x)$可以是连续地或不连续地取值。后来，x取值的连续性亦被取消。到20世纪初，把函数中的变量限制在数集中这个条件也被取消。把变量看作是代表某个非空集合中的任一“元素”的记号。变域被看作是“元素的集合”。常量被看作是上述集合中只含一个“元素”的变量。依此变量概念，数学家维布伦（Oswald Veblen，1880—1960年）等人给出了如下的函数定义：在变量y的集合与另一个变量x的集合之间，如果存在着对于x的每一个值，y有确定的值与之对应这样的关系，那么，变量y叫做变量x的函数。在这个定义中，x、y可以是数，也可以是点，可以是有形之物，亦可以是无形的东西。后来，在康托尔集合论的基础上，出现了如下的函数概念：对于以集合为元素而构成的集合P的每一个元素A，如果在另一个集合的集合Q中有完全确定的元素B与之对应，那么，集合Q叫做集合P的函数。后来，苏联数学家索伯列夫，（Сергей Дьвовпцч Собоgев，1908—）把函数、测度等统一起来，引入了广义函数，函数概念再次扩张。

函数值 设有函数$y=f(x)$，当自变量x取允许值范围内某一个确定的值a，和它对应y所取的值$y=f(a)$叫做当$x=a$时的函数值。

函数图象 在平面解析几何中学过，函数$f(x)$由某个式子给定，可以利用描点法作出函数的图象。这种图象是较为粗糙的，在一些关键性点的附近函数的变化状态，不一定能确切地反映出来。在学习了导数及其应用，就可以利用函数的一、二阶导数及其某些性质，给出较准确地描述函数动态。一般地，描绘函数图象的步骤是：

（1）确定函数的定义域及其某些性质：

① 由函数定义域，找出其图象范围；

② 由函数的奇偶性、周期性，缩小研究范围；

③ 找出函数图象与两坐标轴的交点。

（2）计算$f'(x)$，求方程$f'(x)=0$在研究范围内的所有实根，找出$f(x)$的增减区间、驻点、极限点。

（3）计算$f''(x)$，求方程$f''(x)=0$在研究范围内的所有实根，找出曲线$y=f(x)$的凸向区间和拐点。

（4）计算驻点、拐点及有关点的函数值，列出表格，描绘图象。

例如 描绘函数$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$的图象。其过程是：

（1）函数$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）。因为$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，只研究区间（0，∞）上的图象，再利用它关于y轴对称性，即得（$-\infty$，$+\infty$）上的$f(x)$的图象。当$x=0$时，$y=1$，故与y轴交点为（0，1）；又当$y=0$

时，方程$0=e^{-\frac{x^2}{2}}$无解，故与x轴无交点。

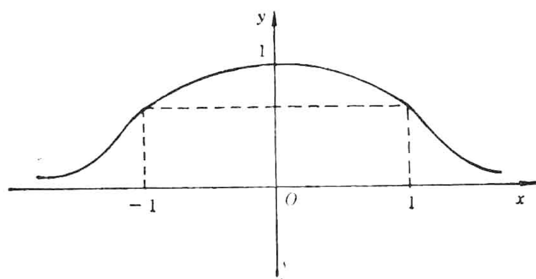
（2）$f(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$解方程$f'(x)=0$，得驻点为$x=0$。在区间$(0,+\infty)$内$f(x)<0$，$f(x)$为减函数。

（3）$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$，解方程$f''(x)=0$，得根$x=1$。在区间$(0,1)$内$f''(x)<0$，$f(x)$上凸；在区间$(1,+\infty)$内$f''(x)>0$，$f(x)$下凸；点$(1,\frac{1}{\sqrt{e}})$为拐点。

（4）因$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，$f'(x)$，$f''(x)$，$f(x)$的变化状态如下表:

x	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	—	—	—
$f''(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘
$y=f(x)$	极大值	上凸	拐点	下凸

根据以上讨论，函数的图象描绘如下图:



函数关系 函数中，自变量和因变量之间相互依赖的关系，即因变量随着自变量的确定而确定的某种对应规律或法则，称为函数关系。设有函数$y=f(x)$，其中"f"就表示已知的函数关系。例如，$y=f(x)=2x+1$，"f"这个函数关系就是：自变量x的2倍再加1就对应了它的因变量。

函数的极限

（1）当$x\to\infty$时函数的极限当自变量x的绝对值无限增大时，如果函数$f(x)$无限趋近一个常数A，就说当x趋向于无穷大时，函数$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A。$$

也可记作

当$x\to\infty$时，$f(x)\to A$。

（2）当$x\to x_0$时函数的极限 当自变量x无限趋近于常数x_0（但x不等于x_0）时，如果函数$y=f(x)$无限趋近于一个常数A，就说当x趋近于x_0时，函数$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

或者

当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$。

函数的值域 一个函数的函数值的集合叫做函数的值域。

函数的微分 设函数$y=f(x)$在点x处可导，则$y=f(x)$在点x处的导数$f'(x)$与自变量的改变量Δx的乘积叫做函数$y=f(x)$在点x处的微分，简称函数y的微分，记作$dy=f'(x)\Delta x$。通常把自变量的改变量Δx记为dx，即$dx=\Delta x$，并叫做自变量x的微分，于是函数$y=f(x)$的微分也表示为$dy=f'(x)dx$。

函数的左极限 当x从点$x=x_0$左侧（即$x<x_0$）无限趋近于x_0时，函数$f(x)$无限趋近于常数A，就说A是函数$f(x)$在点x_0处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A。$$

函数的右极限 如果当从点$x=x_0$的右侧（即$x>x_0$）无限趋近于x_0时，函数$f(x)$无限趋近于常数A，就说A是$f(x)$在点x_0处的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A。$$

函数的有界性 如果函数$f(x)$在它的定义域上，其绝对值$|f(x)|$的一切值都不大于某一个正数M时，即$|f(x)|\leqslant M\ (M>0)$，则称函数$f(x)$为有界函数。如果不论M是多么大的正数，总有函数定义域中的x值，使得$|f(x)|>M\ (M>0)$成立，则称函数$f(x)$为无界。

函数的表示法 （1）解析法：用解析式来表示一个变量是另一个变量的函数。（2）列表法：用表格表示一个变量是另一个变量的函数。（3）图象法；用图象来表示一个变量是另一个变量的函数。

函数的奇偶性 对于函数$f(x)$：（1）如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数，例如，$y=x^2+3$；（2）如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数，例如，$y=x^3$。一个函数是偶函数的充分必要条件是它的图象关于y轴成轴对称图形；一个函数是奇函数的充分必要条件是它的图象关于原点成中心对称图形。

函数的单调性 对于给定区间上的函

数$f(x)$：（1）如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是增函数；（2）如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值x_1、x_2当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是减函数。如果函数$y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间上具有（严格的）单调性，这一区间叫做$f(x)$的单调区间。

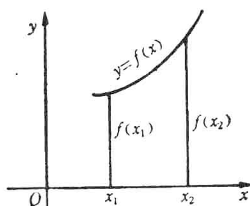


图 1

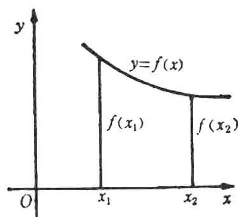


图 2

函数的定义域　函数自变量的取值范围。

函数的增减性　如果函数$f(x)$在定义域或定义域的子区间（即区间的一部分叫做该区间的子区间）(a, b)内，随着自变量x的增加而增加，即在定义域或子区间(a, b)内对任意的x_1，x_2，当$x_2>x_1$时，有$f(x_2)>f(x_1)$，则称函数$f(x)$在这个范围内是增函数。例如，函数$y=2^x$在整个定义域内为增函数（如图1）；函数$y=x^2$在定义域$(-\infty, +\infty)$的子区间$(0, +\infty)$内为增函数（如图2）。

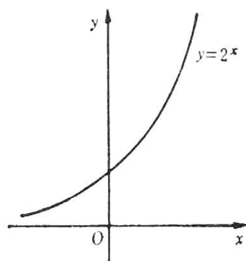


图 1

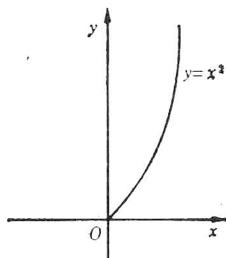
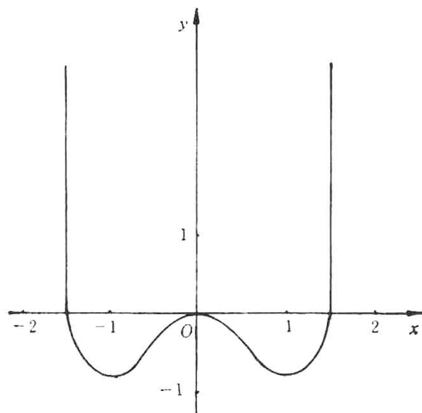


图 2

如果函数$f(x)$在定义域或定义域的子区间(a, b)内随自变量x的增大而减少，即在定义域或其(a,b)内对任意的x_1、x_2，当$x_2>x_1$时，有$f(x_2)<f(x_1)$，则称函数$f(x)$在这个范围内是减函数。例如，函数$y=$

$\log_{\frac{1}{3}} x$在整个定义域内为减函数；函数$y=\sin x$在定义域$(-\infty, +\infty)$的子区间$(\frac{\pi}{2}, \pi)$上为减函数。

函数极值的判定 用二阶导数来判定函数的极大值和极小值统称函数极值的判定。判定方法是根据定理：如果函数$f(x)$在点x_0附近有连续的导函数$f'(x)$，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$。(1)若$f''(x_0)<0$，则函数$f(x)$在点x_0处取极大值；(2)$f''(x_0)>0$，则函数$f(x)$在点x_0处取极小值。这个定理的证明过程是：(1)因$f''(x_0)<0$，由连续函数局部保号性质，在点x_0附近有$f''(x)<0$。根据二阶导数中值定理，有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$。因为$f'(x_0)=0$，所以$f(x)-f(x_0)=\frac{f'(\xi)}{2}(x-x_0)^2$。①又因为$\xi$在点$x_0$与$x$之间，即$\xi$在点$x_0$附近，于是$f'(\xi)<0$。再从①得$f(x)<f(x_0)$，也就是说$f(x_0)$为函数$f(x)$在点$x_0$处的极大值。(2)若$f''(x_0)>0$，同样可得$f''(\xi)>0$，再由①得$f(x)>f(x_0)$，也就是$f(x_0)$为$f(x)$在点$x_0$处的极小值。下面通过一例说明判定方法。例求$f(x)=(x^2-1)^2-1$的极值，并在区间$(-\infty, \infty)$，$[-2, 2]$，$(-1, 1)$分别讨论其最大值、最小值。解：$f'(x)=4x(x^2-1)$，$f''(x)=4(3x^2-1)$。令$f'(x)=4x(x^2-1)=0$，得驻点$x=-1, 0, 1$，因为$f''(0)=-4<0$，所以$f(x)$在$x=0$处取极大值，且极大值为$f(0)=0$。又$f''(-1)=f''(1)=8>0$，所以$f(x)$在$x=\pm 1$两点都有极小值，极小值为$f(\pm 1)=-1$。下面讨论函数$f(x)$在不同区间内最值是否存在。因为当$x\to\pm\infty$时，函数$f(x)=(x^2-1)^2-1$也趋向于无穷大，所以$f(x)$在开区间$(-\infty, \infty)$内无最大值。但从图中可以看到，函数$f(x)$有最小值$f(\pm 1)=-1$；在$[-2, 2]$上$f(x)$的最大值为$f(\pm 2)=8$，最小值为$f(\pm 1)=-1$；在$(-1, 1)$内$f(x)$的最大值为$f(0)=0$，无最小值。应当注意，一般地，在开区间$(a, b)$内的连续函数不一定有最大值、最小值。



函数的单边极限　函数的左极限和右极限都叫做函数的单边极限。

函数的基本性质　函数的基本性质一般指函数的定义域，值域，奇偶性，单调性，周期性和有界性。

函数增减性的判定　定理："设函数$f(x)$在区间(a, b)内可导，如果在(a, b)内$f'(x)>0$，那么$f(x)$在(a, b)内是增函数；如果在(a, b)内，$f'(x)<0$那么$f(x)$在(a, b)内是减函数。""如果在(a, b)内恒有$f'(x)=0$，那么$f(x)$在(a, b)内是常数。"

关于定理的证明：在区间(a,b)内任取两点x_1，x_2，且使$x_1<x_2$，根据拉格郎日中值定理,可得$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$ $(x_1<\xi<x_2)$。①若在区间(a, b)内$f'(x)>0$，则①中的$f'(\xi)>0$，而$x_2-x_1>0$，由①得$f(x_2)>f(x_1)$，即$f(x)$在区间(a, b)内是减函数；若在区间(a, b)内恒有$f'(x)<0$，则①式中$f'(\xi)<0$，而$x_2-x_1>0$，由①得$f(x_2)<f(x_1)$，即$f(x)$在区间(a, b)内是减函数；若在区间(a,b)内恒有$f'(x)=0$，则①式中的$f'(\xi)=0$，由①得$f(x_2)=f(x_1)$，即在区间(a, b)内，任意两点的函数值相等。因此，$f(x)$在区间(a, b)内是常数。

函数增减性的判定步骤是：（1）确定函数$f(x)$的定义域(a, b)；（2）求函数$f(x)$的导数$f'(x)$；（3）令$f'(x)=0$，解这个方程，求出在区间(a, b)内的全部实根$x_i(i=1, 2, 3, \cdots\cdots n)$，按从小到大的顺序排列为$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$；（4）确定区别$(a, x_1)$，$(x_1, x_2)\cdots(x_n, b)$内的导数$f'(x)$的符号；（5）若函数$f(x)$在某个区间内，有$f'(x)>0$，则这个区别为$x$的增区间；若函数$f(x)$在某区间内，有$f'(x)<0$，则这个区间为函数的减区间。如确定函数$y=x^2-2x+4$的增减区间。根据判定步骤：函数定义域为$(-\infty, +\infty)$。$f'(x)=2x-2$。令$f'(x)=2x-2=0$，得$x=1$。将定义域分为区间$(-\infty, 1)$和$(1, \infty)$。在$(-\infty, 1)$内$f'(x)<0$，是减函数；在$(1, \infty)$内$f'(x)>0$，是增函数。

函数的凸向和拐点　是指设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则曲线$y=f(x)$在点$p(x_0, f(x_0))$处有切线。若此切线位于切点附近曲线的下方，切点除外，则称曲线在点$x=x_0$处下凸，如图1，2；若此切线位于切点附近曲线的上方，切点除外，则称曲线在点$x=x_0$处上凸，如图3，4。

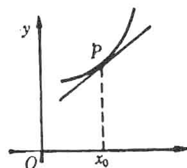


图 1

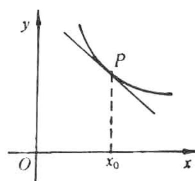


图 2

若曲线$y=f(x)$在区间$(a,\ b)$内所有点都下凸（或上凸），则称曲线在区间$(a,\ b)$内下凸(或上凸)。

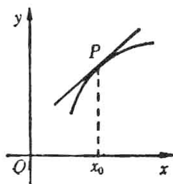


图 3

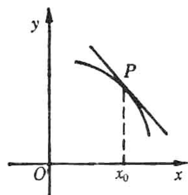


图 4

若曲线 $y=f(x)$ 在切点$p(x_0,\ f(x_0))$的两侧改变了凸向，即左下凸右上凸，或左上凸右下凸，则称点 p 为曲线的拐点，如图 5，6，7，8。

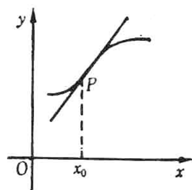


图 5

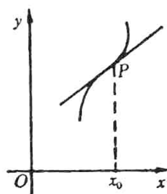


图 6

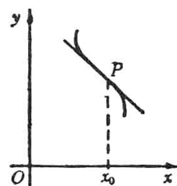


图 7

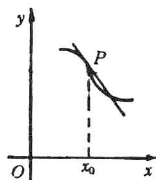


图 8

欲判定曲线的凸向和拐点需应用二阶导数，具体方法是根据两个定理进行的。

定理 1　设函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$内有二阶导数 $f''(x)$，

（1）若对所有点$x\in(a,\ b)$，有$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$ 在区间$(a,\ b)$内下凸；

（2）若对所有点 $x\in(a,\ b)$，有

$f''(x)<0$，则曲线$y=f(x)$在区间(a, b)内上凸。

定理2 设函数$f(x)$在点x_0处附近有二阶导函数，满足下列条件：

（1）$f''(x_0)=0$；（2）在$x=x_0$的两侧$f''(x)$变号，则点$P(x_0, f(x_0))$必为曲线$y=f(x)$的拐点。

函数极限的运算法则 如果两个函数在点$x=x_0$处都有极限，那么这两个函数的和、差、积、商在点$x=x_0$处的极限分别等于这两个函数的极限的和、差、积、商（做为除数的函数的极限不等于零），即

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)。$$

函数的极值和极值点 如果函数$y=f(x)$在点x_0处连续，并且x_0不是其定义区间的端点，若对x_0附近的所有点$x(x\neq x_0)$，都有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$），就说函数$f(x)$在点x_0处取极大值（或极小值）。也可以说$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值（或极小值），记作$y_{极大}=y_{\max}=f(x_0)$（或$y_{极小}=y_{\min}=f(x_0)$），并把点x_0叫做函数$f(x)$的一个极大点（或极小点）。极大值和极小值统称为极值；极大点与极小点统称为极值点。求可导函数$f(x)$的极值方法是：

（1）求导数$f'(x)$；（2）求$f(x)$在定义域内的驻点；（3）检查$f'(x)$在驻点左右的符号，若左正右负，则$f(x)$在这个驻点取极大值；若左负右正，则$f(x)$在这个驻点取极小值；若左右同号，则$f(x)$在这个驻点的函数值不是极值。

函数的和、差、积、商的导数 下面公式中的u及v都是x的函数，而且都是可导的。

（1）和（或差）的导数

法则 两个函数的和（或差）的导数，等于这两个函数的导数的和（或差），即$(u\pm v)'=u'\pm v'$。

这个法则可以推广到任意有限个函数，即$(u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'$。

（2）积的导数

法则 两个函数的积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数，即$(uv)'=u'v+uv'$。

从这个法则可以得到$(Cu)'=C'u+Cu'=0+Cu'=Cu'$。这就是说，常数与函数的积的导数，等于常数乘以函数的导数。

（3）商的导数

法则 两个函数的商的导数，等于分子的导数与分母的积，减去分母的导数与分子的积，再除以分母的平方，即$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$。

函数的最大值与最小值 如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上可导，那么$f(x)$在闭区间$[a, b]$上的一切点（包括区间端点）处的函数值中最大者（或最小者），称为函数$f(x)$在区

间〔a，b〕上最大值（或最小值）。

求可导函数$f(x)$在〔a，b〕上最大值与最小值的方法步骤是：（1）求函数$f(x)$的导数$f'(x)$；（2）令$f'(x)=0$，求出函数在开区间(a, b)内的各驻点；（3）求出函数$f(x)$在开区间(a, b)内的所有极值；（4）求出函数$f(x)$在闭区间〔a，b〕的两端点函数值$f(a)$和$f(b)$；（5）比较各极值和端点函数值，其中最大者为函数$f(x)$在〔a，b〕上的最大值，最小者为函数$f(x)$在〔a，b〕上的最小值。

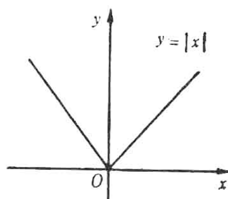
函数$f(x)$在点x_0处连续的定义 如果函数$f(x)$在点x_0处及其附近有定义，并且函数$f(x)$在点x_0处的极限值等于这点的函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么函数$f(x)$在点$x_0$处连续。从函数$f(x)$在点$x_0$处连续的定义可以看出，函数在点$x_0$处连续应符合三个条件：（1）$f(x)$在点$x_0$处及其附近有定义；（2）$f(x)$在点$x_0$处有极限；（3）$f(x)$在点$x_0$处的极限值等于点$x_0$处的函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

函数的可导性与连续性的关系 由导数的定义，可以推出函数在一点处可导与函数在该点处连续的关系：如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，那么$y=f(x)$在点x_0处连续。但是，如果函数$f(x)$在点x_0连续，$f(x)$在该点不一定可导。如$y=|x|$在点$x=0$连续，而在点$x=0$处不可导。从图形上看，就是曲线$y=f(x)$在点$O(0, 0)$处没有切线（如图）。下面根据导数的定义，证明$y=|x|$在$x=0$处不可导，从而导出左、右导数的概念。

$$\because \quad \Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, & 当\Delta x>0,\\ -\Delta x, & 当\Delta x<0,\end{cases}$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1。$$



就是说，当$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的左、右极限不相等，所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当$\Delta x\to 0$时极限不存，因此，函数$y=|x|$在点$x=0$处不可导。

一般地，设已知函数$y=f(x)$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的左极限存在，就把左极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫做$f(x)$在点$x_0$处的左导数；如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的右极限存在，就把右极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫做$f(x)$

在点x_0处的右导数。

根据左、右极限存在且相等是极限存在的充要条件，可得左、右导数存在且相等是导数存在的充要条件。

如果函数$y=f(x)$在开区间(a,b)内可导，在左端点$x=a$处存在右导，在右端点$x=b$处存在左导数，就称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导。

函数极限的基本类型和它们各自的特点　函数的极限是与自变量的变化方式有关的。自变量的变化方式通常有两种：即$x\to\infty$和$x\to x_0$。函数值的变化趋势也有两种，因此，函数的极限可归结为四种基本类型：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$。

在中学数学教材中只直观地研究了（1）、（2）两种。

第一种类型极限的特点是：在无限区间$(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$或$(-\infty,+\infty)$上研究自变量x无限变大时，函数$f(x)$的变化趋势。如在无穷区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上研究函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势（如图1）。

第二种类型极限的特点是：在定点x_0处附近的小区间上研究自变量x无限趋近x_0时，函数$f(x)$的变化趋势。如函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$（$x\neq 0$）在点$x=0$处附近有意义，研究当$x\to 0$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势（如图2）。

上述两种极限所研究的自变量的变化方式不同，一是$x\to\infty$，一是$x\to x_0$；研究函数的范围也不同，一在无穷区间上，一在某一固定点附近。

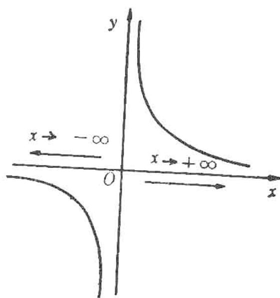


图1

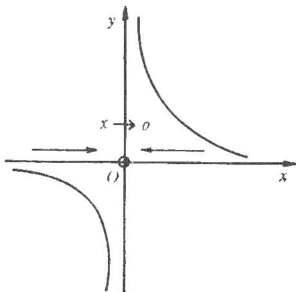


图2

函数$f(x)$在点$x=x_0$处极限存在的充分必要条件　函数$f(x)$在点$x=x_0$处极限存在的充分必要条件是这个函数在点$x=x_0$处的左极限和右极限都存在并且相等，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A。$$

参数方程 如果曲线 l 与方程组

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}，（*）$$满足如下的条件：

对于 t 的每个允许值，方程组（*）所确定的点$P(x，y)$都在曲线 l 上，同时曲线 l上的任一点P的坐标 x、y 都可以由 t 的某一个允许值通过方程组（1）得到，那么方程组（1）就叫做曲线 l的参数方程。变数 t 叫做参变数，简称参数。相对于参数方程来说，直接给出曲线上点的坐标关系的方程，叫做曲线的普通方程。

参数方程曲线的画法 如果已知一条曲线的参数，给这个参数以若干个值，可以计算出曲线上相应的若干个点的坐标，这样就可以用描点法画出曲线。

线段 直线上两点间的部分。这两点叫做线段的端点。线段用表示两个端点的两个大写字母来表示，有时也用一个小写字母来表示，如线段 AB 或线段BA，线段a等。线段可以向任意一方延伸。在所有连结两点的线中，线段最短，连结两点的线段的长度，叫做两点的距离。线段 AB 的长度，即 A、B 两点的距离也可以用 AB 表示，如$AB=a$表示线段 AB 的长度为 a。对于一条线段，如果规定了它的起点和终点，这种具有方向的线段叫做有向线段。以 A 为起点、B为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$，有向线段的长度也称有向线段的模，记作

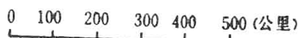
$|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$。

线段图 用线段所表示的应用题中反映数量关系的示意图。

线性方程 见一次方程。

线性方程组 见一次方程组。

线段比例尺 用注有数字刻度的线段表示的比例尺。例如下图所示的比例尺：表示图上的一个单位长是实际的100公里。



线段的中点 将一条线段分成两条相等线段的点。点C是线段AB的中点，记作$AC = CB$或 $AC = \frac{1}{2}AB$。

线段的中垂线 垂直于一条线段并且平分这条线段的直线。线段的中垂线简称中垂线。一条线段的垂直平分线有且只有一条。线段的垂直平分线上的总和线段两个端点间的距离相等；和线段两个端点距离相等的点在该线段的垂直平分线上。线段的垂直平分线是和线段两个端点距离相等的点的轨迹。

线段的内分点 若在线段 AB 上有一点 C，分AB 所成的比$\frac{CA}{CB} = k$，则称C点以分比k内分线段AB，C 点叫做AB的内分点。

线段的正射影 从一点到一条直线所作垂线的垂足，叫做这点在这条直线上的正射影，一条线段的两个端点在一条直线上的正射影之间的线段，叫做这条线段在这条直线上的正射影；点、线段在一条直线上的正射影，简称射影。

线段的外分点 若在线段AB 向一方的延长线上有一点 D，所成的比

$\frac{DA}{DB}=k$，则称 D 点以分比 k 外分线段 AB，D 点叫做 AB 的外分点。显然，在未引入无穷远点的概念的情况下，k 值不能为 1。

线性方程组的系数矩阵　由线性方程组的系数按它们原来的位置构成的矩阵。例如，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3。\end{cases}$$

的系数矩阵是 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$。

线性方程组的增广矩阵　把线性方程组的系数矩阵、常数项矩阵合写成一个矩阵。例如，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$。

线性方程组的常数项矩阵　由线性方程组的常数项按它们原来的位置构成的矩阵，例如，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的常数项矩阵是 $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$。

组合　从 n 个不同的元素中，任意取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同的元素，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的一个组合。例如，ab 是从 a、b、c 三个不同元素中取出两个元素的一个组合。

组合数　从 n 个不同元素中，每次取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素取出 m 个元素的组合数，记为 $C_n{}^m$。

组合数的性质　（1）从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，等于从 n 个不同元素中取出 $n-m$ 个元素的组合数，即 $C_n^m=C_n^{n-m}$。（2）从 $n+1$ 个不同元素中取出 m 个元素的组合，对于其中某个元素 a 来说，可分为两种情况，一种是含元素 a 的组合，共有 C_n^{m-1} 个，另一种是不含元素 a 的组合，共有 C_n^m 个，因此共有组合数为 $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$。

组合数计算公式　$c_n^m=\frac{p_n^m}{p_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$，

或　$C_n{}^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$　$(1\leqslant m\leqslant n$，m、$n\in N)$，规定 $C_n^0=1$。

经过一点和平面垂直的直线　经过一点可以作一条直线，并且只可以作一条直线和已知平面垂直。

经过一点和直线垂直的平面　经过一点可以作一个平面，并且只可以作一个平面和一条直线垂直。

经过两圆交点的圆系方程　设有相交的两个圆 c_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，①c_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，②那么方程 $x^2+y^2+D_1x$

$+E_1y+F_1+\lambda\ (x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$ ③叫做经过 C_1和C_2两圆交点的圆系方程。此外，还要说明：（1）不论圆 C_1和 C_2相交或不相交，$C_1+\lambda C_2=0$是一个圆系方程（$\lambda\neq-1$），这些圆的中心都在C_1，C_2的连心线上。（2）当$\lambda=-1$时，③式变为一条直线$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ ④，称它为两圆的根轴。如果 C_1和 C_2相交，则根轴通过它们的交点（就是它们的公共弦所在的直线）；如果C_1和C_2相切，则根轴就是它们的公切线(过切点)。（3）在③式中，如果C_1和C_2相交，则③式的圆过它们的交点；如果相切，则过切点。（4）③式中任意两个圆的根轴都是④式，所以称③式为同轴圆系方程。④式是它们的公共根轴，根轴垂直于 C_1，C_2 两圆的联心线。（5）根轴上任意一点到两圆的切线长相等。

经过两条直线交点的直线系方程 设 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$是两条相交直线，那么 l：$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 是经过l_1和l_2的交点的直线系方程，式中入是任意常数，这个直线系方程不包括直线l_2。

括号 见运算顺序符号。

指数 见乘方。

指数方程 在指数里含有未知数的方程叫做指数方程。例如，$4^x=2^{x+1}$，$3^{x+1}+9^x-18=0$，都是指数方程。在中学阶段只能解一些特殊的指数方程，通常的解法是转化为代数方程来解。

指数函数 函数 $y=a^x$ 叫做指数函数，其中a是大于0且不等于1的常数。函数的定义域是实数集 R，值域是正实数集。例如，$y=2^x$，$y=10^x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$都是指数函数。

指数函数的导数 （1）$(e^x)'=e^x$。（2）$(a^x)'=a^x\ln a$。

指数函数的图象和性质 列表如下

	0 > 1	$0<a<1$
图 像	y, $y=a^x$, $y=1$, $(0,1)$, O, x	y, $y=a^x$, $(0,1)$, $y=1$, O, x
性 质	（1）是增函数。 （2）图像过(0,1)点，即$a^0=1$。 （3）当$x\geqslant0$时$y\geqslant1$， $x<0$时$0<y<1$。	（1）是减函数。 （2）图像过(0，1)点即$a^0=1$。 （3）当$x\geqslant0$时 $0<y\leqslant1$， $x<0$时$y>1$。

按反比例分配问题　把一个量（数）分成若干部分，使其和几个已知数成反比例的应用题。

按正比例分配问题　把一个量（数）分成若干部分，使其和几个已知数成正比例的应用题。

带小数　整数部分不是“0”的小数。

带分数　由一个非零整数和一个真分数或一个假分数合并而成的分数。其中的非零整数部分叫做带分数的整数部分，真分数或假分数叫做带分数的分数部分。例如，$7\frac{1}{2}$，$4\frac{5}{5}$，$13\frac{15}{11}$，$-3\frac{3}{5}$，等都是带分数。在$-3\frac{3}{5}$中，-3是带分数$-3\frac{3}{5}$的整数部分，$\frac{3}{5}$是带分数$-3\frac{3}{5}$的分数部分。在小学阶段，只学整数部分是正整数的带分数。

带分数化假分数　用原来带分数的分母作分母，用分母乘以整数部分再加上原来带分数的分子所得的和作分子，即得到所要化的假分数，即$q\frac{r}{b}=\frac{bq+r}{b}$。例如，$4\frac{2}{3}=\frac{4\times3+2}{3}=\frac{14}{3}$。

标准量　用作与其它量相比较规定为准则的量。在实际中常用“1”作为标准量。

柯西不等式　设a_i，b_i $(i=1,2,\cdots,n)$为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)。$$

等号只当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立。

相反数　只有符号不同的两个数互为相反数。零的相反数是零。除零以外的互为相反的数在数轴上可以用关于原点对称的两个点表示。

相反复数　复数$-a-bi$叫做$a+bi$的相反复数。复数z的相反复数用$-z$表示。这样复数z_1与z_2的差可以看作z_1与z_2的相反复数的和。

相对误差　近似数的绝对误差除以准确数所得的商的绝对值。若设Δ表示绝对误差，a表示近似数，δ表示相对误差，则

$$\delta=\left|\frac{\Delta}{a}\right|。$$

δ通常表示为百分数的形式。

相似系数　相似多边形（含三角形）对应边的比。相似多边形中：一切对应线段之比以及周长之比都等于相似比；面积之比等于其相似比的平方。

相遇问题　行程问题中匀速运动条件下异向运动的一种形式。其基本问题是两个物体以不同的速度从两地出发，“相向而行”，经若干小时后相遇。所研究的是两物体在相遇过程中速度，时间、距离之间的数量关系。其基关系式是

相遇距离＝速度和×相遇时间。

相互内位似　如果两个位似图形的各对对应点都在位似中心的两旁，这时两个位似图形叫做相互内位似，亦称逆位似图形。如位似形采用有向线段

的定义方法，即当位似比 $k<0$ 时，叫做相互内位似（见位似形）。

相互外位似 如果两个位似图形的各对对应点都在位似中心的同旁，这时两个位似图形叫做相互外位似，亦称顺位似图形。如位似形采用有向线段的定义方法，即当位似比 $k>0$ 时，叫做相互外位似（见位似形）。

相对误差界 近似数的绝对误差界与近似数本身绝对值的比。

相似三角形 对应角相等，对应边成比例的两个三角形。相似用记号"$\backsim$"来表示，读作"相似于"，$\triangle BAC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似三角形对应边的比，叫做两个相似三角形的相似比（或相似系数）。全等三角形是相似三角形的特例，即当相似比为1时的相似三角形为全等三角形。

相似多边形 如果两个边数相同的多边形的对应角都相等并且对应边都成比例，这两个多边形叫做相似多边形。相似多边形的对应边的比叫做相似比（或相似系数）。相似多边形的对应线段的比以及周长的比都等于相似比；相似多边形面积的比等于相似比的平方；相似多边形的对应三角形相似，其相似比等于相似多边形的相似比。

相交弦定理 圆内两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。由此可得，如果一弦与直径垂直相交，那么该弦之半是它分直径所成的两条线段的比例中项。相交弦定理的逆定理亦成立。即如果两条线段 AB、CD 相交于 p，且有 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆。

相关联的量 有密切联系的量。例如，速度与时间，体积与质量，工作效率与工作量等都是相关联的量。相关联的量不一定是成比例的量。例如，身高与体重是相关联的量，但不成比例。

相等的向量 模相等且方向相同的向量。只要满足以上条件，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量。在这一规定下，向量可以根据需要进行平移。

相互独立事件同时发生的概率计算 事件 A 和 B，A 的发生与 B 的发生没有影响时，我们说这个事件在概率含义下是互相独立的。对于互相独立的两个事件的乘积，有一个重要的概率计算公式——概率乘法公式。如果事件 A 和事件 B 互相独立。那么 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$。这个概率乘法很易推广到有限多个事件的情形下。

例如，"甲坛子里有六个白球，4个黑球；乙坛子有3个白球，5个黑球，从这两个坛子里分别摸出一个，它们都是白球的概率是多少？"我们把"从甲坛子里摸出一个球是白球"叫做事件 A，把"从乙坛子里摸出一个球是白球"叫做事件 B。显然，从一个坛子里摸出的是白球还是黑球，对从另一个坛子里摸出白球的概率没有影响。就是说，事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，那么这样两个事件就叫做相互独立事件。"从两个坛子里分别摸出一个都是白球"是一个事件，它的发生，就是事件 A、B 同时发生，我们将它记做 $A\cdot B$，于是，这里的问题就是求相互独立事件 A，

B同时发生的概率 $P(A\cdot B)$。从甲坛子里摸出一个球，有10种等可能的结果；从乙坛子里摸出一个球，有8种等可能的结果。于是从两个坛子里分别摸出一个球，共有10×8种等可能的结果，其中同时摸出白球的结果共有6×3种，因此，从两个坛子里分别摸出一个球，都是白球的概率

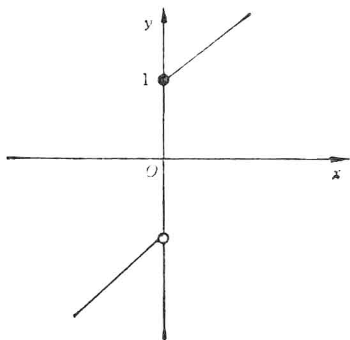
$$P(A\cdot B)=\frac{6\times 3}{10\times 8}=\frac{6}{10}\times\frac{3}{8}。$$

另一方面，从甲坛子里摸出一个球，得到白球的概率$P(A)$为$\frac{6}{10}$，从乙坛子里摸出一个球，得到白球的概率$P(B)$为$\frac{3}{8}$，于是便得到上面公式$P(A\cdot B)=P(A)$、$P(B)$。这就是说。两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率积。一般地，如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，那么这n个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)。$$

从上面问题我们还可以得到，如果事件$\overline{A}$是指“从甲坛子里摸出一个球，得到黑球”，事件$\overline{B}$是指“从乙坛子摸出一个球，得到黑球”。显然，事件A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B也都是相互独立的。一般地，如果事件A与B相互独立，那么A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B也都是相互独立的。

研究 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$应注意的问题　(1)这种类型的极限，仅仅研究点$x_0$附近函数的变化状态，而不研究函数$f(x)$在点$x_0$处的状态。就是说，自变量$x$可以无限接近$x_0$点，但一般$x\neq x_0$。如对于$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$，仅研究$x$无限接近于1时，函数$f(x)=\frac{1}{x+1}$的变化趋势，而不研究$x=1$时，函数$f(x)$的状态。(2)自变量$x$无限接近于$x_0$时，可以从小于$x_0$的方向无限接近$x_0$；也可以从大于$x_0$的方向无限接近$x_0$；还可以同时从小于$x_0$和大于$x_0$的两个方向无限接近$x_0$。如当$x_0=1$时，$x\to 1$可从三个不同方向无限接近于1：从小于1的方向；从大于1的方向；从小于1和大于1的两个不同方向。(3) $x\to x_0$的过程中，$x\neq x_0$，所以函数$f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与函数$f(x)$在点$x_0$处的状态无关。因此，虽然函数$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$在$x=4$处无定义，仍可研究$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$。(4)函数$f(x)$在$x_0$处



有定义，则在这点不一定有极限。因为 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的状态无关，所以，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义并不能保证在这点必有极限。如函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \geqslant 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处有意义，$f(0)=1$，但函数在该点无极限（如图）。而函数 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ 在点 $x=4$ 处无定义，但在该点有极限。

面积 在平面上，一个图形的面积就是它所围成的平面部分的大小。图形的面积有下述性质：两个图形全等、它们的面积相等；一个图形的面积，等于它的各部分面积的和。常见的平面图形的面积公式如下：

三角形：$S=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C=rp=\dfrac{abc}{4R}$ （其中，R 为外径，r 为内径，

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$）。

矩形：$S=ab=\frac{1}{2}d^2\sin\theta$（$d$ 对角线长，θ 对角线夹角）。

平行四边形：$S=bh=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$（$\alpha$－内角，$d_1$、$d_2$ 对角线长，θ 对角线夹角）。

菱形：$S=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2=ah$（$\alpha$－内角，$d_1d_2$ 对角线长）。

正方形：$S=a^2=2R^2=4r^2$。

梯形：$S=\frac{1}{2}(a+b)h=m\cdot h$ （m 中位线长）。

任意四边形：$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$

$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos a}$

（d_1、d_2 对角线长，θ 对角线夹角，p 半周长，α 对角和之半）。

正三角形：　$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2=3\sqrt{3}r^2$。

正五边形：　$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$。

正六边形：　$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2=2\sqrt{3}r^2$。

正n边形：　$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha=nr^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$　（α中心角）。

圆：　$S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$。

扇形：　$S=\frac{1}{2}R^2l=\frac{1}{2}R\theta$　（l弧长，θ弧度值）。

弓形：　$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)\approx\frac{2}{3}bh$。

面积单位　度量一个平面图形的面积时取做标准的小正方形的面积。它是边长等于一个长度单位的正方形。常用的公制面积单位有平方公里、平方米、平方分米、平方厘米、平方毫米，等等。它们之间的进率是100平方厘米＝1平方分米，100平方分米＝1平方米，1000000平方米＝1平方公里。常用的市制面积单位有平方丈、平方尺、平方寸。它们之间的进率是：100平方尺＝1平方丈，100平方寸＝1平方尺。

轴对称图形　对于一个平面图形，如果沿着某一条直线对折，该直线两旁的部分能够互相重合，也就是图形和它自身重合的图形。

点集　元素为点的集合叫做点集。例如，$\{(x,y)|3x-2y=11\}$就是点集。

点的轨迹　如果下面的两个命题都是正确的，即（1）图形F上的每一个点，都符合某个条件C；（2）符合某个条件C的每一个点，都在图形F上，那么，图形F是符合某个条件C的点的轨迹。也就是符合某个条件的点的轨迹，就是符合某个条件的所有点的集合。

点的坐标　点在坐标系中的位置是由有序实数数组所确定。确定点的位置的有序实数数组就是点的坐标。当点在数轴上时，与点相对应的坐标是一个实数x_0；当点在坐标平面内时，如果是在直角坐标平面内，那么点的坐标是一对有序实数(x_0,y_0)。如果

是在极坐标系中，那么点的坐标是一对有序实数(ρ, θ)；当点在三维空间内时，点的坐标是一个有序三元数组(x_0, y_0, z_0)。

点到平面的距离 从平面外一点向这这个平面引垂线，这个点和垂足间的距离叫做这点到这个平面的距离。

点到直线的距离 从直线外一点到已知直线的垂线段的长度。点到直线的距离为非负数。当该点在已知直线上时，可以说点到直线的距离为零；反之，点到直线的距离为零，指该点在直线上。

点在平面内的射影 自一点向平面作垂线，其垂足叫做这点在平面内的正射影，简称射影。这个平面叫做射影面，垂线叫做投射线，射影又叫做投影。

点到平面垂线的性质 从平面外一点向这个平面引垂线和斜线，垂线的长比任何一条斜线长都短。

映射 设A, B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射，记作f：$A \to B$。如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么，和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象。例如，

$$A = \{4, 9, 16\},$$

$$B = \{2, -2, 3, -3, 4, -4\},$$

f：开平方。（如图1）。

f就不是从A到B的映射。若f改为求算术平方根，（如图2）那么这样的对应f就是从A到B的映射。2是4的象，4是2的原象。对于映射来说，有以下特点：（1）从集合A到集合B的映射与从集合B到集合A的映射是不同的；（2）集合A中的元素在对应f下，在集合B中必有象且象唯一；（3）并不一定要求集合B中每一个元素在集合A中都有原象。

f：开平方

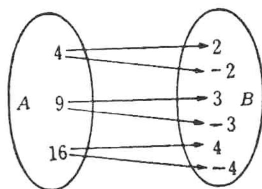


图1

f：求算术平方根

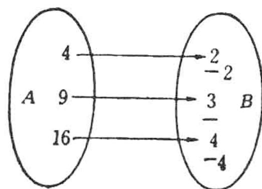


图2

钝角 大于直角而小于平角的角。若角α是钝角，则$90° < \alpha < 180°$；反之，若$90° < \alpha < 180°$，则角α是钝角。

钝角三角形 有一个角是钝角的三角形。钝角三角形与锐角三角形合称斜三角形（见锐角三角形）。

矩阵 把$m \times n$个数排成一个m行n列的矩形表，用括弧把它的两侧括起来，这个表叫做矩阵。例如$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

是一个两行三列的矩阵，$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

是一个三行三列的矩阵，也叫三阶方阵。各行、各列上的数叫做矩阵的元素。

矩形　有一个角是直角的平行四边形。矩形通常也称做长方形。矩形具有平行四边形的所有性质，并且四个角都是直角，对角线相等。

矩阵的元素　见矩阵。

矩阵的行的初等变换　对矩阵进行以下三种变形：（1）用一个非零常数乘矩阵某一行的所有元素；（2）用一个数乘矩阵某一行的所有元素，然后加到另一行的对应元素上去；（3）两行互换。这三种变形叫做矩阵的行的初等变换。

选排列　从n个不同元素中，选取m（$1 \leqslant m < n$）个不同的元素，然后按照任意一种顺序排成一列，叫做一个选排列。

科学记数法　利用10的整数次幂来记数的方法，是科学技术上常用的一种记数法，习惯上称为科学记数法。科学记数法是把一个数记成$\pm a \times 10^n$的形式，其中n是整数，a是大于或等于1而小于10的数，即$1 \leqslant a < 10$。如

$$849000 = 8.49 \times 10^5,$$

$$0.000075 = 7.5 \times 0.0001 = 7.5 \times 10^{-5}。$$

重根　代数方程的两个或两个以上相等的根。例如，-1是方程

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

的重根。

重复排列　从n个不同元素中，每次取出m（$1 \leqslant m \leqslant n$）个元素，允许重复，按一定顺序排成一列，叫做可重复排列，简称重复排列。例如，由数字1，2，3，4，5可以组成多少个三位数就是重复排列问题。

复比　把两个或两个以上单比的前项相乘作前项，后项相乘作后项所组成的比。例如，两个单比3∶5和2∶7所组成的复比是

$$(3 \times 2):(5 \times 7)。$$

复数　形如$a + bi$的数。其中a、b是实数，i是虚数单位，a和b分别叫做$a + bi$的实部和虚部。对复数$a + bi$来说：当$b = 0$时，就是实数；当$b \neq 0$时，叫做虚数；当$a = 0$，$b \neq 0$时，叫做纯虚数。全体复数形成的集合叫做复数集，通常用字母C来表示。显然，实数集R是复数集C的真子集，即$R \subset C$。数的概念是从实践中产生和发展起来的。数的概念扩充到实数集以后，象$x^2 = -1$这样的方程还是无解，因为没有一个实数平方等于-1。十六世纪，为了解决这一难题，意大利数学家拉斐尔·邦别利建议使用复数概念。从而在他的著作《代数》中，创立了复数概念。最早使用i这个符号的是数学家欧拉。对于引进的新数i，叫做虚数单位。它纯粹是一个符号，它服从于基本规则①$i^2 = -1$；②实数与它进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立。在这种规则的规定之下，出现了形如$a + bi$（a、$b \in R$）的数，从而构成了复数集C。十八世纪以后，复数在数学、力学和电学中得到了应用，从此对它的研究日益展开。现在复数已成为科学技术中普遍使用的一种数

学工具。

复比例　组成比例的两个比中至少有一个比是复比的比例。例如，

$$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\}=e:f$$

或

$$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}e:f\\g:h\end{matrix}\right.。$$

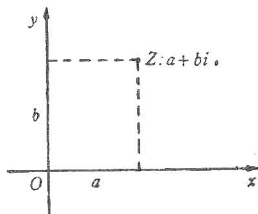
复名数　带有两个或两个以上单位的名数。例如，5米18厘米，3小时25分30秒等。

复数系　复数$\begin{pmatrix}a+bi\\a、b\in R\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}\text{实数}(b=0),\\\text{虚数}(b\neq0)\left\{\begin{matrix}\text{纯虚数}(b\neq0,a=0),\\\text{非纯虚数}(b\neq0,a\neq0)。\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$

复合函数　若y是z的函数，$y=f(z)$，而z又是x的函数$z=\varphi(x)$，如果对于某些x值所对应的z值，函数$y=f(z)$是有定义的，则y也是x的函数，记作$y=f[\varphi(x)]$。函数$y=f[\varphi(x)]$为y对x的复合函数。变量z称为这个复合函数的中间变量。如设$y=z^2$，$z=\sin x$，则y对x的复合函数是$y=(\sin x)^2$。又如，设$y=\text{tg}z$，$z=x^2$，则y对x的复合函数是$y=\text{tg}x^2$。

复种指数　全年内农作物的总种植面积与总耕地面积之百分比。即复种指数$=\dfrac{\text{总种植面积}}{\text{总耕地面积}}\times100\%$。它反映了耕地的利用程度。例如，某地全年内农作物的总种植面积为2000亩，总耕地面积为1000亩，则复种指数$=\dfrac{2000}{1000}\times100\%=200\%$，即该地种植农作物达到了一年两熟。

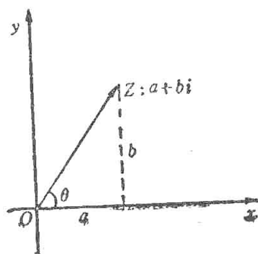
复数平面　任何一个复数$z=a+bi$，都可以由一个有顺序的实数对(a,b)唯一确定。这样就能借用平面直角坐标系来表示复数$z=a+bi$。如图所示，点z的横坐标是a，纵坐标是b，复数$z=a+bi$可以用点$Z(a,b)$来表示，这个建立了直角坐标系并用来表示复数的平面叫做复数平面，简称复平面，有的书上也叫高斯平面。x轴叫做实轴，y轴除去原点的部分叫做虚轴。由于建立了复平面，复数集C和复平面内所有的点所成的集合是一一对应的。



复数的模　如图，复数$z=a+bi$对应于向量$\overrightarrow{OZ}$，向量$\overrightarrow{OZ}$的长度r叫做复数$z=a+bi$的模，也叫做复数$z=a+bi$的绝对值，记作$|z|$。

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}。$$

如果$b=0$，那么$z=a+bi$是一个实数a，它的模等于$|a|$（即a在实数意义上的绝对值）。



复合应用题 用两步或两步以上运算才能解答的应用题。复合应用题又分典型复合应用题和一般复合应用题。

复数的开方 复数的$n(n\in N)$次方根是n个复数，它们的模都等于这个复数的模的n次算术根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与2π的0，1，…，$n-1$倍的和的n分之一，例如，复数$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$。

复数的相等 如果两个复数$a+bi$与$c+di$的实部与虚部分别相等，我们就说这两个复数相等，记作$a+bi=c+di$。两个非零复数相等的充要条件是它们的模与辐角的主值分别相等。

复数的除法 （1）应用复数的代数形式进行两个复数的除法，可以先把它们的商写成分式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，并且把结果化简，把实部与虚部分别合并，写成复数的代数形式。例如设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di\neq0$，则

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i。$$

（2）应用复数的三角形式进行两个复数相除，其商还是一个复数，它的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，它的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差。例如，设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\neq0,$$

则
$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

复数的乘方 （1）应用复数的代数形式进行复数的乘方，可以根据二项式定理$(a+bi)^n$展开，再利用i的幂的周期性，把结果化简合并。（2）应用复数的三角形式进行复数的乘方，可按棣莫佛定理求得结果。

复数的乘法 （1）应用复数的代数形式进行两个复数相乘，可按多项式乘法法则进行，但必须在所得的结果中把i^2换成-1，并且把实部与虚部分别合并，写成复数的代数形式。例如，设$z_1=a+bi, z_2=c+di$，则

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i。$$

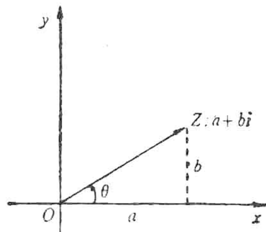
（2）应用复数的三角形式进行两个复数相乘，积还是一个复数，它的模等于两个乘数的模的乘积，它的辐角等于两个复数的辐角的和。即设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则
$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]。$$

复数的辐角　如图，设复数$z=a+bi$对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，以x轴的正半轴为始边，以向量$\overrightarrow{OZ}$所在的射线（起点是0）为终边的角θ，叫做复数$z=a+bi$的辐角。不等于零的复数$z=a+bi$的辐角有无限多个值，这些值相差2π的整数倍，例如，复数i的辐角是$\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中k可以取任意整数，适合于$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$的辐角$\theta$的值，叫做辐角的主值，记作$\arg z$，即$0\leqslant\arg z<2\pi$，复数0的辐角是任意的。



复数的绝对值　见复数的模。

复合函数的导数　设函数$\mu=\varphi(x)$在点x处有导数$\mu_x'=\varphi'(x)$，函数$y=f(\mu)$在点x的对应点μ处有导数$y'_\mu==f'(\mu)$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处也有导数，且$y'_x=y'_\mu\cdot\mu'_x$或记作

$$f'_x[\varphi(x)]=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)。$$

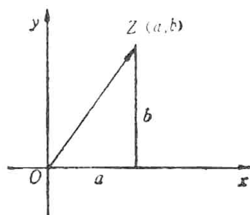
复杂分数应用题　需通过三步或三步以上运算才能解答的分数应用题。解复杂分数应用题的关键，在于通过中间问题求得“是多少”相对应的分数“几分之几”，并由此将问题转化为较复杂或简单分数应用题。

复数加法的性质　设$z_1、z_2、z_3\in C$，则有：（1）交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；（2）结合律：

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)。$$

复数乘法的性质　设$z_1,z_2,z_3\in C$，则有：（1）交换律：$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；（2）结合律：$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$；（3）乘法对加法的分配律：$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$。

复数的几何表示　如图，在复平面上任一点$Z(a,b)$，连结OZ，得到以O为起点，以Z为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$，这个向量就是复数$a+bi$的几何表示。任何一个向量都可以通过平移，把起点移到复平面的坐标原点，这样，复平面上的点，复数、起点在原点的向量建立了一一对应关系。1799年，丹麦测量学家加斯帕·范赛尔（Caspar Wessel）第一次运用向量概念从几何角度表示复数。



复数的三角形式　把复数z写成$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，叫做复数$z$的三角形式，其中$r$为复数$z$的模，$\theta$为复数$z$的辐角。

复数的代数形式　复数$z=a+bi$的形式（其中$a、b\in R$）。

复数的指数形式　将欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$代入任意一个复数的三角形式$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，可得$z=re^{i\theta}$，这个表达式叫做复数的指数形式。例如，

$$z=5\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

的指数形式为$z=5e^{i\theta}$。

复数的模的性质　（1）设复数$z=a+bi$，则有$|a|\leqslant|z|$，$|b|\leqslant|z|$，$|a|+|b|\geqslant|z|$；（2）设两个复数z_1，z_2，则有$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2,$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq0),$$

$$|z^n|=|z|^n。$$

复数的加法与减法　设两个复数为$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，复数的加法（减法）的法则是：把复数的实部与实部、虚部与虚部分别相加（或相减），即

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

复数开方的几何意义　复数

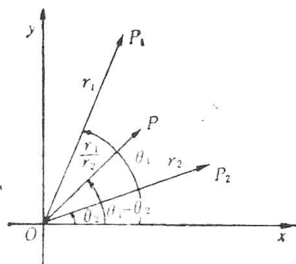
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的n个n次方根所对应的点，是以原点为圆心以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的一个内接正n边形的顶点。

复数除法的几何意义　如果复数用向量来表示，设复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

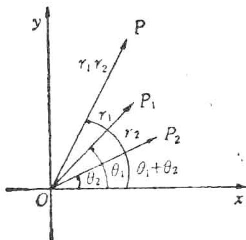
z_1除以z_2时，如图，先画出分别与z_1，z_2相对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，然后把向量$\overrightarrow{OP_1}$先按照z_2的幅角θ_2旋转一个角$-\theta_2$，再把$\overrightarrow{PO_1}$的长度按$\overrightarrow{OP_2}$的模数r_2改变$\frac{1}{r_2}$倍，所得到的新向量$\overrightarrow{OP}$，即为复数$\frac{z_1}{z_2}$所对应的向量。



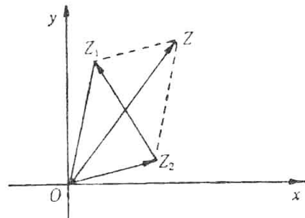
复数乘法的几何意义　如果复数用向量来表示，设复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

两个复数z_1，z_2相乘时，如图，先画出分别与z_1，z_2对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，然后把向量$\overrightarrow{OP_1}$按逆时针方向旋转一个角θ_2（如果$\theta_2<0$，就要把$\overrightarrow{OP_1}$按顺时针方向旋转一个角$|\theta_2|$），再把它的模变为原来的r_2倍，所得的向量$\overrightarrow{OP}$，即为复数$z_1\cdot z_2$所表示的向量。



复数加减法的几何意义 如果复数用向量来表示，那么复数的加法就可以按照向量的加法法则来进行，这就是复数加法的几何意义。如图，求复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$的和，可以先画出与这两个复数对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如果$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$不在同一条直线上，再以这两个向量为两条邻边画平行四边形，那么与这个平行四边形的对角线OZ所表示的向量$\overrightarrow{OZ}$对应的复数，就是所求这两个复数的和。如果$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$在同一条直线上，可以画一个"压扁"了的平行四边形，并据此画出它的对角线来表示$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$的和。两个复数的差z_1-z_2（即$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$）与连结两个向量终点并指向被减数的向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$对应。



复合应用题的一般解题思路 复合应用题是由若干个简单应用题组成的，用算术法解复合应用题时，一般思路是把复合应用题依次转化为若干简单应用题。转化的方法常用分析法和综合法。

复数的代数形式与三角形式的互化公式 用一个复数z的代数形式$z=a+bi$与三角形式$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$之间互化公式是$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，

$$r=\sqrt{a^2+b^2}，\cos\theta=\frac{a}{r}，$$

$$\sin\theta=\frac{b}{r}。$$

追及问题 行程问题中，匀速运动下同向运动的一种形式。其基本数量关系是

追及的距离÷速度差＝追及的时间。

叙述式式题 用语言或文字叙述的式题。例如，求23乘以8的积减100除以4的商的差。

独立重复试验 一般地，如果在一次试验中某事件发生的概率是P，那么在n次独立重复试验中这个事件恰好发生k次的概率是

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}。$$

例如：某射手射击一次，击中目标的概率为0.9，他射击4次恰好击中3次的概率是多少？一题，可分别记在第1，2，3，4次射击中，这个射手击中目标为事件A_1，A_2，A_3，A_4，未击中目标为事件$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，$\overline{A_3}$，$\overline{A_4}$，那么射击四次，击中3次共有4种情况：

$$A_1A_3\overline{A_3}A_4，\quad A_1A_2\overline{A_3}A_4$$
$$A_1\overline{A_2}A_3A_4，\quad \overline{A_1}A_2A_3A_4。$$

这四种情况的每一种，都可看成是在4个位置上取出了3个写上A，另一个写上$\overline{A}$，所以这些情况的种数等于从4个元素中取出3个的组合数C_4^3，即四种。由于各次射击是否击中相互之间没有影响。因而前三次击中，第4次未击中的概率是

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A_4})$$
$$= 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times (1-0.9) = 0.9^3 \times (1-0.9)^{4-3}。$$

同理，
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4)$$
$$= P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = 0.9^3 \times (1-0.9)^{4-3}。$$

即在射击四次，击中三次的4种情况中每一种发生的概率是$0.9^3 \times (1-0.9)^{4-3}$。由于这四种彼此排斥，所以射击四次，击中三次的概率是

$$P = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4)$$
$$+ P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)$$
$$= C_4^3 \times 0.9^3 \times (1-0.9)^{4-3} = 4 \times 0.9^3 \times 0.1 \approx 0.29。$$

在此例中，4次射击可以看成是进行4次独立重复试验。

差　见减法。

差异量　表示一组数据变异程度或离散程度的量。

差倍问题　已知两数的差及两数的倍数关系，求这两个数的一类应用题。其基本数量关系是：

差÷倍数差＝小数；

小数×倍数＝大数。

逆运算　设○是集A上的运算，若对于集A中的任意两个元素a、b，在集A中有唯一确定的元素x，使得$x○a=b$，或$a○x=b$，就说运算○在集A上有逆运算。当满足$x○a=b$时，称○在A上有左逆运算；当满足$a○x=b$时，称○在A上有右逆运算。例如，在整数集上，减法的左逆运算是加法，右逆运算是减法。若○是一个在集A上满足交换律的运算，则○的左、右逆运算是一致的，此时称○在A上有唯一的逆运算。例如，在整数集中，加法和乘法运算都满足交换律，它们分别有唯一的逆运算减法和除法。

逆命题　如果一个命题的题设和结论分别是另一个命题的结论和题设，这样的两个命题叫做互逆命题。这时，如果把其中一个叫做原命题，另一个就叫做它的逆命题。真命题的逆命题不一定是真命题。关于如何构造一个命题的逆命题，严格地说，如果一个命题的题设和结论是若干个属性的集合时，把原命题的题设和结论中的任一部分属性换位，或者把原命题的题设和结论全部属性换位，所得到的新命题都是原命题的逆命题。因而原命题的逆命题可能不止一个。例如“等腰三角形顶角的平分线也是底边的中垂线”，这一命题的前提是在$\triangle ABC$中，题设为：①$AB=AC$，②AD平分$\angle A$，结论为③$AD \perp BC$，④AD平分BC。分别将①与③、①与④、②与③、②与④换位，以及将题设与结论全部换位，将会得到下述五个逆命题：（1）若三角形顶角平分线又是底边上的高，则它也是底边的中线，并且该三角形等腰；（2）若三角形顶角的平分线又是底边的中线，则它也是底边上的高，并且该三角形等

腰；（3）等腰三角形底边上的高也是底边的中线和顶角的平分线；（4）等腰三角形底边的中线也是底边上的高及顶角的平分线；（5）若三角形底边上的高与中线重合，则它也是顶角的平分线，并且该三角形等腰。

逆映射 已知映射f：$A\to B$是集合A到集合B的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a与之对应，这样得到的映射叫做映射f：$A\to B$的逆映射，记作f^{-1}：$B\to A$。例如，

$$A=\{1,2,3,4\},$$
$$B=\{2,4,6,8\},$$

映射f：$A\to B$乘以2，是A到B的一一映射，而f^{-1}：$B\to A$乘以$\frac{1}{2}$，是f：$A\to B$的逆映射。显然f：$A\to B$也是f^{-1}：$B\to A$的逆映射。

逆否命题 如果一个命题的题设和结论分别是另一个命题的结论和题设的否定，这样的两个命题叫做互为逆否的命题，把其中的一个命题叫做原命题，另一个就叫做它的逆否命题。

总体 是统计学中的名词，指要考察的对象的全体。

总体方差 容量很大的样本的样本方差。

总体平均数 总体中所有个体的平均数。

恒等 两个量不论怎样变化总相等。记作“≡”。读作“恒等于”。

恒等号 见恒等。

恒等式 不论用什么数代替等式中的字母都能成立的等式。例如，

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2.$$

恒等用符号“≡”表示。

祖暅原理 夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任何平面所截得的两个截面的面积都相等，那么这两个几何体的体积相等。祖暅原理在外国直到公元十七世纪，才由意大利的数学家卡发雷利提出，但也没有证明。

误差 在实际观察和近似计算中，往往不能得到真实情况的准确数值，而只能得到近似值，其间的差叫做误差，又叫做绝对误差。绝对误差与近似值之比叫做相对误差。相对误差更能确切表示近似值的近似程度。误差按其来源可分为测量误差，截断误差（方法误差或近似误差），舍入误差等。

诱导比例 把已知比例的某些项实行加减运算后所得到的一些新比例。

诱导公式 用角α的三角函数来表示$-\alpha$，$90°\pm\alpha$，$180°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$，$360°-\alpha$，$k360°+\alpha(k\in Z)$的三角函数公式，称为诱导公式。如下表所示：

	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$90°-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$
$90°+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$180°-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-\sec\alpha$	$\csc\alpha$

$180^\circ+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$270^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$
$270^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$360^\circ-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$k\cdot360^\circ+\alpha(k\in Z)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$

表中这些诱导公式，可以概括如下：$k\cdot360^\circ+\alpha\ (k\in Z)$，$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$的三角函数值等于$\alpha$的同名函数值，前面加上一个把$\alpha$看成锐角时原函数在相应象限内的符号；$90^\circ\pm\alpha$，$270^\circ\pm\alpha$的三角函数值等于$\alpha$的相应的余函数的值，前面加上一个把$\alpha$看成锐角时原函数在相应象限内的符号。

既约多项式　见不可约多项式

除号　表示除法运算的符号。记作“÷”。十八世纪，瑞士人哈纳首先使用除号“÷”。因为最初人们把除法理解为分解的意思，所以哈纳想到用一条横线把两个圆点分开，以表示分解的意思。有时除号“÷”也代以横线，被除写在横线之上，除数写在横线之下，例如，6除以3，记作$\frac{6}{3}$。有时除号“÷”也代以斜线，被除数写在斜线的左边，除数写在斜线的右边。例如，6除以3，记作$\frac{6}{3}$。莱布尼兹首先提出用符号“:”表示比或除号。十八世纪，法国人格里曼提出用反写的拉丁字母D，即符号“ᗡ”表示除号，但未被公认。

除法　已知两个因数的积与其中一个因数，求另一个因数的运算。除法是乘法的逆运算。设a为两个因数之积，b为其中一个因数，q为另一个因数，则除法运算可表示为$a\div b=q$，读作：“a除以b等于q”或“b除a等于q”。a叫被除数，b叫做除数，q叫做a除以b的商。

除数　见除法

除法的运算性质　（1）一个数除以两个数的积，等于这个数依次除以积的两个因数，即$a\div(b\cdot c)=a\div b\div c$。（2）两个数的积除以一个数，等于先用这个数去除积里的任何一个因数，再用所得的商与另一个因数相乘，即$(a\cdot b)\div c=(a\div c)\cdot b$或$(a\cdot b)\div c=a\cdot(b\div c)$。(3)一个数除以两个数的商，等于这个数先乘以商中的除数，再除以商中的被除数；或者这个数先除以商中的被除数，再乘以商中的除数，即$a\div(b\div c)=(a\cdot c)\div b$或$a\div(b\div c)=(a\div b)\cdot c$。(4)两个数的商除以一个数，等于商中的被除数先除以这个数，再除以原来商中的除数，即$(a\div b)\div c=(a\div c)\div b$。(5)若干个数的和除以一个数，等于用除数去除和里的各个加数（在能整除的条件下），然后再把所得的商加起来，即若b能分别整除a_1、a_2、$a_3\cdots\cdots a_n$，且$b\neq0$，则$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\div b$

$=a_1\div b+a_2\div b+\cdots\cdots+a_n\div b$。

除法的验算方法 （1）用除验算：把被除数（有余数除法要减去余数）除以商，检验是否等于除数。（2）用乘法验算：把除数与商相乘，看积是否等于被除数（有余数的除法要加上余数）。

除法简单应用题 用除法解答的简单应用题。有四种基本类型：（1）等量分配的除法应用题；（2）求一个数包含几个另一个数的除法应用题；（3）求一个数是另一个数的几倍的除法应用题；（4）求一倍数是多少的除法应用题。

除法与减法之间的关系 除法也可以看作是连续减去相同的数的减法的简便算法。被除数就是被减数，除数就是相同的减数，连减的最多次数就是商。例如，$a\div b=c$，相当于

$$a\underbrace{-b-b\cdots\cdots-b}_{c\text{个}}=0。$$

盈亏问题 由题目中所给的两种方案的结果〔一种方案的结果出现“多（盈）”，另一方案的结果出现“少（亏）”〕确定要求的未知量的一类应用题。解答这类问题的关键是先找出两个相关数的差数，再求出一个单位量的数值，或用倍比法求出两个差数的倍数，再根据其他条件求得解答。例如，某人带钱去买布，若买5米则多3元，若买7米则少1.8元。问他共带多少钱？这布每米多少钱？这是一个典型的盈亏问题。解此题需先求出两个相关差：总价差：$3+1.8=4.8$（元），米数差$7-5=2$(米)。由此可求出布的单价：$(3+1.8)\div(7-5)=2.4$（元）。$2.4\times5+3=15$（元），即为所带总钱数。

结合符号 见运算顺序符号

绝对值 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。实数a的绝对值用$|a|$表示，即

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当}a>0\text{时},\\ 0, & \text{当}a=0\text{时},\\ -a, & \text{当}a<0\text{时}。\end{cases}$$

复数$a+bi$的绝对值是

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}。$$

绝对误差 一个量的准确数与近似数之差的绝对值。如果用A表一个量的准确数，a表示A的近似数，Δ表示绝对误差，则$\Delta=|A-a|$。例如，若$A=1.356$，$a=1.36$，则

$$\Delta=|1.356-1.36|$$
$$=|-0.04|=0.04。$$

绝对误差界 绝对误差的范围。例如，用最小刻度是毫米的钢尺来度量一个工件的长度，我们无法量得这个工件的准确数，因而也就无法求出这个近似数的绝对误差，但是，这时我们可以确定测量结果的绝对误差不超过1毫米。又如，若近似数8.27是由四舍五入法得到的，由于舍去或增加的不会超过0.005，因此，可以说8.27的绝对误差界是0.005。再如，在生产中见到图纸尺寸标准$80^{\pm0.5}$，在生活中见到火柴盒上写有$100^{\pm2}$。±0.5，±2就是绝对误差界。

珠算 运用算盘进行的加、减、乘、除、乘方、开方等计算。珠算是中国劳动人民发明的。在公元1274年宋朝

杨辉所著的《乘除通变算宝》和公元1299年元朝朱世杰所著的《算学启蒙》两书中，都有珠算歌诀的记载。有关珠算最早的记载，见于公元1366年元末陶宗义所著的《南村辍耕录》，书中提到“算盘珠”一词，并说“拨之则动”。公元1450年，吴敬在所著的《九章算法比类大全》中，也谈到算盘。15世纪《鲁班木经》中曾详细记载有算盘的规格。但是，直到公元1578年在明朝柯尚迁所著的《数学通轨》中，才对珠算作了较系统地介绍。公元1592年明代程大位所编的《直指算法统宗》中，对珠算作了更为丰富和完整的介绍。1980年3月20日，中国珠算协会推出一种“电子算盘”。它集珠算和电子计算器的优点于一体，做加、减运算时发挥算盘的作用，做乘、除运算时，发挥电子计算器的长处。这是目前最新型的珠算工具。

素数 即质数。见质数。

振动量的振幅、周期、频率、相位、初相 当函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$），$x\in[0,+\infty)$表示一个振动量时，$A$就表示这个量振动时离开平衡位置的最大距离，通常把它叫做这个振动的振幅；往复振动一次所需要的时间，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，它叫做振动的周期；单位时间内往复振动的次数$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，它叫做振动的频率；$\omega x+\varphi$叫做相位，$\varphi$叫做初相（即当$x=0$时的相位）。

换元积分法 同复合函数的微分法相对应，在求不定积分运算中，也有对复合函数的积分法，这就是换元积分法。这种方法的特点是：对于积分变量进行适当的变换，把要计算的被积式化为基本积分公式表中的某一被积式，然后再利用公式求出结果。换元积分法对计算不定积分分为第一换元积分法和第二换元积分法。

（1）第一换元积分法，是指如果所求的不定积分可以先化成如下形式 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$，作变量替换$\varphi(x)=\mu$，得$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ $=\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]=\int f(\mu)d\mu$。如果$\int f(\mu)d\mu$可用基本积分公式求得，即$\int f(\mu)d\mu=F(\mu)+C$，用关系式$\mu=\varphi(x)$将变量$\mu$换回到原来的变量$x$，那么所求的不定积分就是$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$。这种求不定积分的方法叫做第一换元积分法。

（2）第二换元积分法，第一换元积分法是把积分公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(\mu)d\mu$$

左端的积分变成右端的积分。有时可以反过来用这个公式，即要计算右端的积分，适当地选择$\mu=\varphi(x)$（要求$\mu=\varphi(x)$为单值函数），使原积分变为$\int f(\mu)d\mu=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$的形式，使右端的积分比较容易计

算，并将结果用$\mu=\varphi(x)$的反函数$x=\varphi^{-1}(\mu)$代入即可。由于积分变量一般用x表示，中间变量用μ表示，因此，第二换元积分法可叙述为：在积分$\int f(x)dx$中，作变量替换$x=\varphi(\mu)$，则$dx=\varphi'(\mu)d\mu$，于是$\int f(x)dx=\int f[\varphi(\mu)]d[\varphi(\mu)]=\int f[\varphi(\mu)]\varphi'(\mu)d\mu$。若右端可用基本积分公式求得$\int f[\varphi(\mu)]\varphi'(\mu)d\mu=F[\varphi(\mu)]+C$。再换回原变量，由$x=\varphi(x)$解出$\mu=\varphi^{-1}(x)$，则所求的不定积分就是

$$\int f(x)dx=F[\varphi^{-1}(x)]+C。$$

真数 见对数。

真子集 如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$。当A不是B的真子集时，记作$A\not\subset B$或$B\not\supset A$。例如，

$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，

则$A\subset B$。

真分数 分子小于分母的分数。例如，$\frac{5}{7}$，$\frac{8}{9}$等。真分数小于1。

真命题 正确的命题叫做真命题（见命题）。

样本 是统计学中的一个名词，是从总体中抽取的一部分个体。

样本方差 样本中各数据与样本平均数的差的平方的平均数。

样本容量 样本中个体的数目。

样本平均数 样本中所有个体的平均数。

样本标准差 样本方差的算术平方根。

根号 在数学上表示方根的符号。1220年意大利人里纳昂多（又叫费波纳奇）第一次用符号“R̷”表示平方根。这个符号是从拉丁文Radix取它的头尾两个字母合并而成的。法国数学家笛卡儿在他的著作《几何学》中第一次用“$\sqrt{\quad}$”表示根号。符号“$\sqrt{\quad}$”包含两个意思：“$\surd$”是由拉丁字母“r”演变而来，它的原词为“root”，是方根的意思；上面的一条横线“——”是括线，相当于现在我们常用的括号，把“$\surd$”与“——”结合在一起，组成现在的根号“$\sqrt{\quad}$”，它既有结合符号的意思，又有运算符号的意思。1525年德国数学家鲁道夫首先用符号“﹏”表示三次方根。17世纪法国人首先使用符号“$\sqrt[3]{\ }$”表示三次方根。

根式的基本性质 一个根式的被开方数如果是一个非负数的幂，那么这个根式的根指数与被开方数的指数都乘以或者除以同一个正整数，根式的值不变，即

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\text{和}\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m$$

$(a\geqslant0)$，m是正整数，n和p都是大于1的整数。

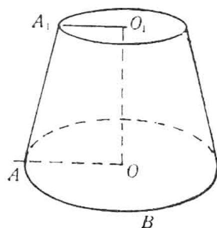
原函数 设$f(x)$是定义在区间I上的一个函数，如果存在函数$F(x)$，在区间I上任何一点x都有$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$为函数$f(x)$在区间I上的一个原函数。由此可以得到，

如果函数$f(x)$有一个原函数$F(x)$，则任何与$F(x)$只差一个常数C的函数都是$f(x)$的原函数，因此，函数$f(x)$的任一原函数都可以表示成$F(x)+C$的形成。

较复杂分数应用题　通过两步运算可解答的分数应用题。可分为四种基本类型：（1）求一个数比另一个数多（或少）几分之几？其基本数量关系是：（大数－小数）÷小数＝“多几分之几”；或（大数－小数）÷大数＝“少几分之几”。（2）求一个数与它的几分之几的和（或差）是多少？其基本数量关系是：这个数×（1＋多的几分之几）＝“和是多少”或这个数×（1－少的几分之几）＝“差是多少”。（3）已知一个数的（1＋几分之几）或（1＋几分之几）是多少，求这个数。其基本数量关系是：“是多少”÷（1＋几分之几）＝这个数或“是多少”÷（1－几分之几）＝这个数。（4）已知甲数的$\frac{a}{b}$等于乙数的$\frac{c}{d}$，求甲数（或乙数）是乙数（或甲数）的几分之几（a、b、c、d均不为零）。其基本数量关系是：若甲数的$\frac{a}{b}$＝乙数的$\frac{c}{d}$，则甲数是乙数的$\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$；乙数是甲数的$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$，且并由此可推出：若甲数是乙数的$\frac{m}{n}$，则乙数是甲数的$\frac{n}{m}$。

圆　在平面上，线段OA绕它的固定的一个端点O旋转一周，另一个端点A所经过的封闭曲线。固定的点O叫做圆心，线段OA叫做半径。以O为圆心的圆，记作“$\odot O$”，读作“圆O”。由上述定义可知：圆可以看做是到定点的距离等于定长的点的集合。圆还可以用轨迹来定义为：到定点的距离等于定长的点的轨迹。

圆台　圆锥的底面和平行于底面的一个截面之间的部分叫做圆锥台，简称圆台。圆台又可以看作是由一个直角梯形（如图中的$O_1\ O\ A_1\ A$）绕着垂直于底边的腰（$O\ O_1$）旋转一周而得到的。原来的圆锥的轴叫做圆台的轴；圆锥的母线和侧面夹在底面和截面之间的部分，分别叫做圆台的母线和圆台的侧面；圆锥的底面和截面叫做圆台的底面。圆台可以用它两个底面上而不在同一条母线上的两个点的字母来表示，如图中的圆台可记作圆台BA_1。



圆束　如果每两圆都有共同的等幂轴，这些圆的总体叫做圆束，这共同的等幂轴叫做圆束的等幂轴。如图1，圆束中的所有圆都通过其中一圆与等幂轴的两个交点，这样的圆束叫做椭圆型圆束。如图2，圆束中的所有圆都和等幂轴切于一点，这样的圆

束叫做抛物线型圆束。如图3，圆束中的所有圆都和等幂轴无公共点，这样的圆束叫做双曲线型圆束。

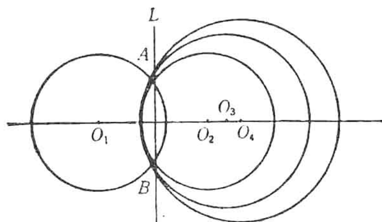


图 1

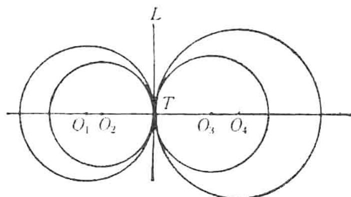


图 2

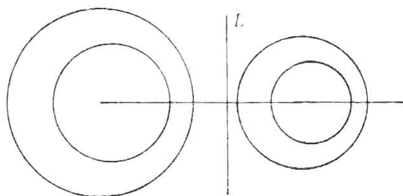


图 3

圆系 （1）圆心在原点，半径为r的圆的方程是$x^2+y^2=r^2$在这个方程中，r可看作是一个参数，当给r以不同的值时，如$r=1$，2，3，5，$4\frac{2}{7}$，……，就可以相应地得到一系列以原点为圆心的同心圆，这一系列的圆称为同心圆系。（2）圆心在x轴上的圆的方程可以写成

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

或$x^2+y^2+Dx+F=0$在这个两个方程中，a和r或D和F是两个参数，如给a和r或D和F以允许取的一系列的值，就可以相应地得到一系列圆心都在x轴上的圆。这一系列的圆也构成一个圆系。一般地，如果圆的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

中，含有一个(或几个)参数，给这些参数以一系列的允许的值，就可以相应地得到一系列的具有共同性质的圆，这一系列圆的全体就叫做圆系。

圆周 到定点的距离等于定长的点的轨迹。

圆弧 圆上任意两点间的部分。圆弧简称弧，用符号“⌒”表示，以A、B为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“弧AB”。大于半圆的弧叫优弧，小于半圆的弧叫做劣弧。弧的度数就是它所对的圆心角的度数。n^0的弧的弧长$l=\frac{n\pi R}{180}$。如圆心角为θ弧度$l=R\theta$。

圆柱 用垂直于轴的两个平面去截圆柱面，那么两个截面和圆柱面所围成的几何体叫做直圆柱，简称圆柱。圆柱又可以看作是由一个矩形绕着它的一边旋转一周而得到。原来圆柱面的轴叫做圆柱的轴，原来圆柱面的母线夹在两个截面之间的部分叫做圆柱的母线，原来的圆柱面夹在两个面之间的部分叫做圆柱的侧面。两个截面被圆柱面所截的部分叫做圆柱的底面。圆柱可用它的两个底面内不在同一条母线上的两个点的字母来表示。

圆锥 如果用不经过圆锥面的顶点而垂直于圆锥面的轴的一个平面去截圆

锥面，那么截面和圆锥面所围成的几何体叫做直圆锥，简称圆锥。圆锥又可以看作是由一个直角三角形绕着它的一条直角边旋转一周而得到的。原来圆锥面的顶点和轴分别叫做圆锥的顶点和圆锥的轴。圆锥面的母线夹在顶点和截面之间的部分叫做圆锥的母线。圆锥面夹在顶点和截面之间的部分叫做圆锥的侧面。截面夹在圆锥面之间的部分叫做圆锥的底面。圆锥可以用它的顶点以及它底面上的三个点的字母来表示。

圆簇　有公共等幂心的圆的集合叫做圆簇。这公共等幂心叫做该簇的中心；等幂心对于簇内每个圆的幂叫做圆簇的幂。如果圆簇的幂是正的，则该簇叫做双曲线型圆簇；如果是负的，则该簇叫做椭圆型圆簇；如果幂等于零，则该簇叫做抛物线型圆簇。图1表示双曲线型圆簇，圆簇的中心到簇内所有圆的切线都相等，即有一个以圆簇中心为圆心，幂的平方根为半径的圆，该圆与簇内所有圆都垂直相交，这个圆叫做双曲线型圆簇的基圆（如图1中的⊙O）。在双曲线型圆簇中包含着三种类型的圆束，即抛物线型圆束的等幂轴用OB表示，此圆束的连心线不与基圆相交；双曲线型圆束的等幂轴用OC表示，此圆束的连心线与基圆相交。图2表示椭圆型圆簇，如果圆簇中心O对于所有圆的幂都是负的，则以圆簇的中心为圆心，以幂的绝对值的平方根为半径作⊙O，于是椭圆型圆簇的一切圆都交⊙O的直径的两端，例如AB。因此圆O的每一直径AB都是某种椭圆型圆束的等幂轴，而直径的两端是该束中所有圆的交点。由此可知，椭圆型圆簇只包括椭圆型圆束，而⊙O是圆簇中最小的圆，也是簇内各圆束所共有的圆。图3表示抛物线型圆簇，在这种情况下，簇内所有圆都应该通过簇的中心O。因为点O对于簇内所有圆的幂都等于零，所以抛物线型圆簇内有抛物线及椭圆型的圆束，而没有双曲线型圆束。

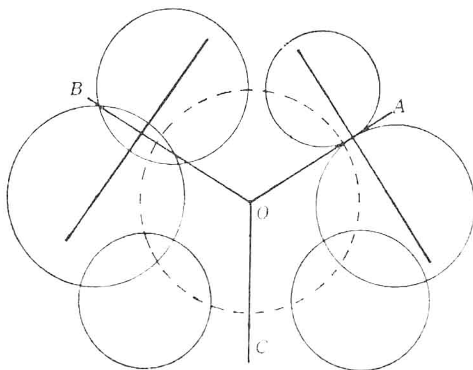


图 1

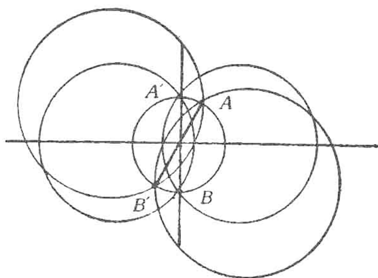


图 2

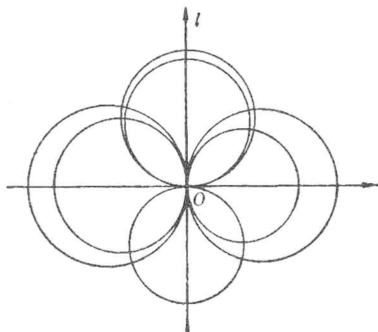


图 3

圆内角 顶点在圆内的角。圆内角的度数等于它和它的对顶角所对的两条弧度数之和的一半。

圆心角 顶点在圆心的角。圆心角的度数与它所对的弧的度数相等。

圆外角 顶点在圆外，两边和圆都相交的角。圆外角的度数，等于这个角的两边所夹的两条弧的度数之差的一半。

圆周角 顶点在圆上并且两边都和圆相交的角。一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半；圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半；同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等。

圆周率 圆的周长与直径的比叫做圆周率。用希腊字母π表示。圆周率是一个无限不循环的小数，即无理数。这是1767年由瑞士数学家兰伯特（Lambert, J. H. 1728—1777）首先证明的；π还是一个超越数，是1882年由德国数学家林德曼（Lindemann, C. L. F. 1852—1939）首先证明的。我国古代数学家对圆周率的研究有过许多重大贡献。东汉初年的《周髀算经》里，已有“周三径一”之说，称之为古率，即直径为1的圆，其周长为3，这时$\pi=3$。西汉末年，刘歆（约公元前50年—公元23年）定圆周率为3.1547，后人称之为歆率。东汉张衡（公元78年—139年）求得两个比，一为

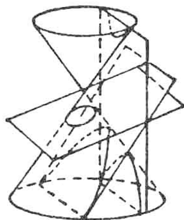
$\frac{92}{29}=3.17241\cdots$，一为$\sqrt{10}$，约等于

3.1622。三国时魏刘徽(公元263年)，始创“割圆求周”的方法，即用圆的内接正多边形逼近的方法求得。

圆面积 圆所包围的平面部分的大小。半径为R的圆的面积$S=\pi R^2$，π是圆周率。

圆锥曲线 椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线。如果用一个不过圆锥的顶点的平面去截圆锥，那么有以下几种情况：（1）如果截面与圆锥面的母线平行，则截面只与圆锥的一半相交，交线是抛物线。（2）如果截面与圆锥面的母线不平行，则有两种可能：一种是截面与圆锥面的一半相交，交线是一个椭圆，（当截面与圆

锥的轴垂直时，交线变成一个圆）；一种是截面与圆锥面的上、下两面都相交，交线是双曲线。因此，椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线可由一个平面截圆锥面得到，所以称为圆锥曲线。由于椭圆(包括圆)、双曲线都具有对称中心，所以椭圆（包括圆）和双曲线是有心圆锥曲线。由于抛物线不具有对称中心，所以抛物线是无心圆锥曲线。



圆台的体积 当一个圆台的内接正棱台的侧面数无限增加时，这棱台的体积的极限叫做圆台的体积。如果圆台上、下底面的面积分别是S_1和S，高是h，体积是V，则$V=\frac{1}{3}h\ (S+S_1+\sqrt{SS_1})$。如果用$R_1$、$R$、$h$和$V$表示圆台的上、下底面半径、高和体积，那么

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+R_1{}^2+RR_1)。$$

圆台的性质 （1）圆台的两个底面是两个圆，它们所在的平面平行。（2）圆台的轴经过两个底面的圆心，并且和底面垂直，连结两个底面圆心的线段的长等于圆台的高。（3）圆台的母线都相等，各条母线的延长线相交于一点。（4）圆台的上下底面圆心的连结线段、一条母线和经过这条母线的端点的上下底面的半径组成一个直角梯形。（5）平行于底面的截面是圆。（6）过轴的截面（轴截面）是等腰梯形。

圆柱的体积 当一个圆柱的内接正棱柱的侧面数无限增加时，这内接正棱柱的体积的极限叫做圆柱的体积。圆柱的体积等于它的底面面积和高的积。在圆柱中，设底面面积是S，高是h，体积是V，则$V=Sh$。如果圆柱底面半径是r，高是h，则它的体积是$V=\pi r^2h$。

圆柱的性质 （1）圆柱的两个底面是相等的圆，它们所在的平面平行。（2）圆柱的轴经过两个底面的圆心，并且垂直于两个底面；连结两个底面圆心的线段的长等于圆柱的高。（3）圆柱的母线平行且相等，并且垂直于两个底面，母线的长等于圆柱的高。

圆柱的截面 常见的圆柱的截面有：（1）用垂直于圆柱的轴的平面去截圆柱得到的截面；（2）用平行于圆柱的轴的平面去截圆柱，所得的截面。用垂直于圆柱的轴的平面去截圆柱，所得的截面是和底面相等的圆。用平行于圆柱的轴的平面去截圆柱，所得的截面是一个矩形。它的两条对边是圆柱的两条母线，另外两条对边分别是两个底面圆的弦。经过圆柱的轴的截面叫做圆柱的轴截面，它的一组对边是圆柱的两条母线，另外一组对边分别是两个底面圆的直径。

圆的切线长 在经过圆外一点的切线上，这一点和切点之间的线段长。从圆外一点引圆的两条切线，它们的切

线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。

圆的对称性 圆具有极特殊的对称性：（1）圆是轴对称图形，它的任一条直径所在的直线都是它的对称轴。（2）圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心；（3）圆旋转任意一个角度α，都能与原来的图形重合。圆在旋转变换下的不变性，在生产生活中有极广泛的应用。

圆的渐开线 把一条没有弹性的细绳绕在一个固定的圆盘的侧面上，将绳拉紧逐渐地展开（这时绳的拉直部分和圆保持相切），绳的外端的轨迹。这个圆叫做渐开线的基圆。

圆锥曲线系 如果在一个二元二次方程中含有一个任意常数，给这个常数以一个适当的值，就可以得到一条圆锥曲线。给这个常数以一系列的不同值，就可以得到一系列的具有某种共同性质的圆锥曲线，它们的全体叫做圆锥曲线系。

圆锥的体积 当一个圆锥的内接正棱锥的底面正多边形的边数无限增加时，这个棱锥的体积的极限叫做圆锥的体积。圆锥的体积等于它的底面面积和高的积的三分之一。在圆锥中，设底面积是S，高是h，体积是V，则$V=\frac{1}{3}Sh$。如果圆锥的底面半径是r，高是h，则$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$。

圆锥的顶角 在圆锥的一个轴截面内的两条母线间的夹角。

圆锥的性质 （1）圆锥的底面是一个圆，它所在的平面垂直于圆锥的轴。（2）圆锥的轴经过顶点和底面圆的圆心，顶点和底面圆心的连结线段的长等于圆锥的高。（3）圆锥的母线都经过顶点并且相等，各条母线和轴的夹角相等。（4）圆锥的高，母线、母线在底面内的射影（底面半径）组成一个直角三角形。（5）平行于底面的截面是圆。（6）过轴的截面（轴截面）是等腰三角形。

圆内接四边形 四个顶点都在同一个圆上的四边形。圆内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角。

圆台的中截面 过圆台的轴的中点且平行于底面的截面。

圆台的全面积 圆台的侧面积与底面面积的和。设R、R_1，l和$S_全$分别表示圆台的两底面半径、母线和全面积，则 $S_全=\pi(R^2+R_1^2+Rl+R_1l)$。

圆台的侧面积 当一个圆台的内接正棱台底面正多边形的边数无限增加时，这棱台的侧面积的极限叫做圆台的侧面积。圆台的侧面积等于它的两个底面周长的和与母线的长的积的一半。设R_1、R、l和$S_侧$分别表示圆台上底面的半径、下底面的半径、母线和侧面积，那么

$$S_侧=\frac{1}{2}(2\pi R_1+2\pi R)l,$$

即 $S_侧=\pi(R_1+R)l$。

圆柱的全面积 圆柱的侧面积与两底底面积的和叫做圆柱的全面积。设R、h、$S_全$分别表示圆柱的底面半径、高和全面积。则

$S_全=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R(h+R)$。

圆柱的侧面积 当一个圆柱的内接正棱柱底面正多边形的边数无限增加

时，也就是它的侧面数无限增加时，这棱柱侧面积的极限叫做圆柱的侧面积。圆柱的侧面积等于它的底面的周长和高的乘积。设R、h、$S_{侧}$分别表示圆柱的底面半径，高和侧面积，则$S_{侧}=2\pi Rh$。

圆的切线方程　（1）经过圆 $x^2+y^2=r^2$上一点$P_1(x_1, y_1)$的圆的切线方程是 $x_1x+y_1y=r^2$。（2）已知圆$x^2+y^2=r^2$的斜率为k的切线方程是$y=kx\pm r\sqrt{k^2+1}$。

圆的标准方程　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中点$C(a,b)$是这个圆的圆心，$r(>0)$是圆的半径。

圆锥的全面积　圆锥的侧面积与底面积的和。设R、l和$S_{全}$分别表示圆锥的底面半径、母线和全面积，则$S_{全}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(l+R)$。

圆锥的侧面积　当一个圆锥的内接正棱锥底面正多边形的边数无限增加时，这棱锥的侧面积的极限叫做圆锥的侧面积。圆锥的侧面积等于它的底面的周长和母线长乘积的一半。

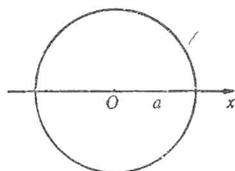
圆的一般式方程　$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$　$(D^2+E^2-4F>0)$，

点$\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$是它的圆心，

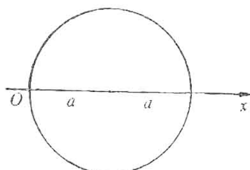
$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$ 是它的半径。

圆的外切多边形　如果一个圆和多边形的各边都相切，这个多边形叫做圆的外切多边形。圆的外切四边形的两组对边的和相等，反之，若四边形两组对边之和相等，该四边形必外切于圆。

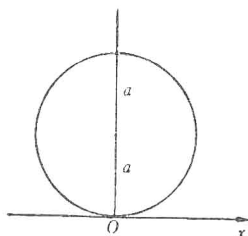
圆的极坐标方程　方程 $\rho=a$，$\rho=2a\cos\theta$和$\rho=2a\sin\theta$都是圆的极坐标方程，它们的图形如图所示。



圆$\rho=a$



圆$\rho=2\cos3\theta$



圆$\rho=2a\sin\theta$

圆锥曲线的直径　圆锥曲线的平行弦的中点的轨迹。

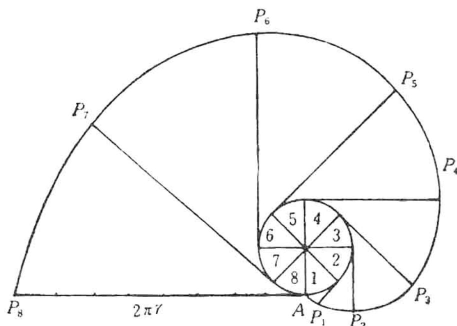
圆台的侧面展开图　沿着一条母线剪开并展平而得到的图形。

圆柱的内接正棱柱　在一个圆柱内，以它的底面的内接正多边形为底面，以它的高为高的正棱柱叫做圆柱的内接正棱柱。

圆柱的侧面展开图　把一个高为h，底面半径为r的圆柱侧面，沿着一条母线剪开并展平，就可以得到这个圆柱的侧面展开图，它是一个矩形，一边的

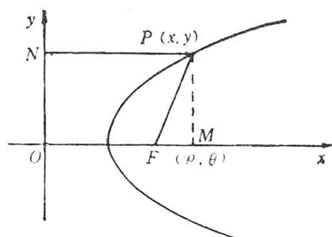
长是底面周长，即$2\pi r$另一边的长是圆柱的高h。

圆的渐伸线的作图 （1）把一圆分成8等份（也可分成其他等份，等分数越多越精确），得分点为A，1，2，3……8；（2）过A点画圆的切线，在切线上截取线段AP_8等于$2\pi r$（r为圆的半径），并将它也等分8等分），得分点1′，2′，3′……8′；（3）过圆上各分点按同一方向作基圆（即已知圆）的切线；（4）在各切线上分别截取$1P_1=A1'$，$1P_2=A2'$，……，$11P_8=A8'$，得到P_1，P_2，……，P_8各点；（5）把A，P_1，P_2，……，P_8各点用平滑的曲结连结起来就得到所要画的圆的渐开线。



圆锥的侧面展开图 把母线长为l，底面半径为r的圆锥侧面，沿着一条母线剪开，并把它展开；便得到圆锥的侧面展开图。由于圆锥母线的长相等，它们相交于圆锥的顶点，因此，它的侧面展开图是一个扇形。这扇形的半径就是圆锥的母线l，弧长是$2\pi r$。圆锥的侧面积就是这个扇形的面积，即$S_{扇形}=\pi rl$。设扇形的圆心角为α，则$\alpha=\frac{2\pi r}{l}\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{r}{l}\times 360°$。

圆锥曲线的统一定义 在平面上，如果一个动点p到一个定点F的距离和它到一条定直线l的距离的比是一个常数e，那么这个动点P的轨迹就叫做圆锥曲线。定点F叫做焦点，直线l叫做准线，常数e叫做离心率。



圆的渐开线的参数方程

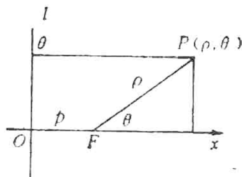
$$\begin{cases} x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi), \\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) \end{cases}$$

（φ为参数），其中r是基圆的半径。

圆锥曲线的极坐标方程 根据圆锥曲线的统一定义，可以求出圆锥曲线的极坐标方程。取焦点F为极点。经过F作准线l的垂线，和l相交于N，

设焦点F到准线l的距离是p，取FN的反向延长线Fx为极轴（如图）于是圆锥曲线的极坐标方程是。

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}。$$



圆锥曲线的直角坐标方程　设曲线的焦点为F，准线为l，点F到l的距离为P，离心率为e，则以l为y轴，以通过焦点F且垂直于l的直线为x轴建立直角坐标系。根据圆锥曲线的统一定义，得知圆锥曲线的直角坐标方程是$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$。

圆锥曲线的切线和法线的性质　（1）抛物线的切线和法线的性质：如果经过抛物线上的一点作一直线平行于抛物线的轴，那么经过这一点的法线平分这条直线和这一点的焦点半径的夹角。如图1，设$p(x_1,y_1)$是抛物线$y^2=2px$上任意一点，PT和PN分别是经过P点的切线和法线，PF是焦点半径，PE是平行于抛物线的轴，则法线PN是$\angle EPF$的平分线。抛物线的这个性质在生产上有广泛的应用。如，探照灯和汽车前灯的反光曲面，都作成抛物镜面，就是根据抛物线的这个性质设计的（如图2）。（2）椭圆的法线的性质：经过椭圆上一点的法线，平分这一点的两条焦点半径的夹角。（如图3），设$P(x_1,y_1)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任意一点，$PN$是经过$P$点的椭圆的法线，$PF_1$和$PF_2$是两条焦点半径，则$\angle F_1PN=\angle F_2PN$。这个性质的物理意义是，从椭圆的一个焦点发出的光线或声波，经过反射，都集中到另一个焦点上（如图4）。（3）双曲线的切线的性质：经过双曲线上一点的切线，平分这一点的两条焦点半径的夹角。如图5，设$P(x_1,y_1)$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上任意一点，$PT$是经过$P$点的切线，则$\angle F_1PT=\angle F_2PT$。这个性质的物理意义是，如果光源或者声源放在一个焦点F_2处，光线或者声波射到双曲线靠近F_2的一支上，经过反射后，就同从另一个焦点F_1射出来的一样（如图6）。

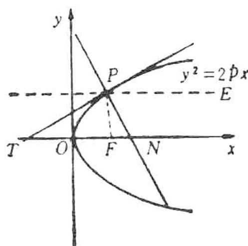


图 1

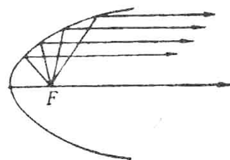


图 2

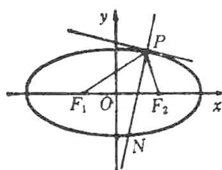


图 3

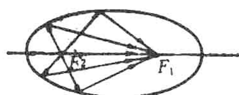


图 4

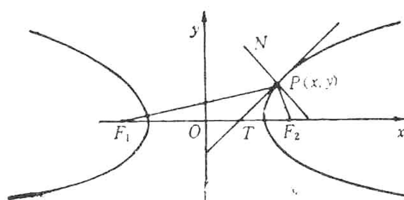


图 5

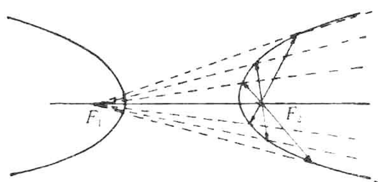
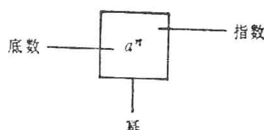


图 6

圆柱、圆锥、圆台的侧面积的统一公式 如果圆柱、圆锥、圆台的高是h，母线的垂直平分线在母线与旋转轴间的线段的长是m，那么这三种旋转体的侧面积$S_{侧}=2\pi mh$。

乘方 求几个相同因数的积的运算。乘方的结果叫做幂，相同的因数叫做底数，相同因数的个数叫做指数。它们之间的关系可表示为如下的形式：



乘号 表示乘法运算的符号。记作"×"。十八世纪美国数学家欧德莱最先使用乘号"×"。因为乘法是一种特殊加法，所以欧德莱就把加号斜着写以表示相乘。由于在书写时乘号"×"易与"X"相混，所以有的科学家主张用符号"·"作乘号。但又由于"·"易与数字中的小数点相混，所以符号"·"仅在字母相乘或代数式相乘时应用，而两数字相乘时一般不用。十七世纪，微积分的创始人莱布尼兹首先使用符号"·"作乘号。他还提出用符号"∩"表示乘号。这个符号现在主要运用在集合论中，表示两个集合的交集。

乘法 求两个数积的运算。记作"$a\times b=c$"，读"a乘以b等于c"，或"b乘a等于c"。其中，a叫做被乘数，b叫做乘数，c叫做a与b的积。a、b也叫做c的因数。乘法的实质是求若干个相同加数的和的简便算法。乘法有两种定义方法。一种是以集合为基础概念，另一种是以加法为基础概念。

定义1 设有b个没有公共元素的等价集A_1、A_2、A_3……A_n，它们的基数均是a，它们的并集C的基数为c，那么c叫做a与b的积。求两个

数的积的运算叫做乘法。

定义 2　b个相同加数a的和c叫做a与b的积。求两个数的积的运算叫做乘法。如果乘数是 1 或 0，不能说求 1 个或 0 个加数的和，所以作如下补充定义：$a\times1=a$，$a\times0=0$，

$0\times0=0$。

通用小学数学课本是以定义（2）为理论基础，分两次逐步给出完整定义的。第一次先给出描述解释：求几个相同加数的和，用乘法计算比较简便。第二次给出完整定义：求几个相同加数和的简便运算，叫做乘法。

乘数　见乘法。

乘法表　把1、2、3、4、5、6、7、8、9这九个数中的任何两个数相乘的结果而编成的口诀表。这个表也叫九九表。乘法表起源很早，敦煌汉简和居延汉简中，均有九九表的残简。元代朱世杰所著《算学启蒙》中，有释九数法。我们现在所用的乘法口诀有两种：一种是"小九九"，只有45句口诀；一种是"大九九"，有81句口诀。

乘　法　表

积 / 因数（上） / 因数（左）	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

乘法原理　做一件事，完成它有n个步骤，如果做第一步有m_1种方法，做第二步有m_2种方法，…，做第n步有m_n种方法。依次完成了这n个步骤，这件事才能完成，那么完成这件事共有$N=m_1\cdot m_2\cdots m_n$种方法。例如，从A地到B地有两条路可走，从B地到C地有三条路可走，若从A地经B地再到C地，则总共有$N=2\times3=6$种不同的走法。

乘法交换律　两数相乘，交换因数（被乘数和乘数）的位置，其积不

变。设a、b为任意二数，乘法交换律可表示为：$ab=ba$。利用乘法交换律，可以验算乘法和使某些乘法变得简便。对于多个因数相乘，乘法交换律仍然成立。

乘法运算律 乘法交换律、结合律、乘法对加法的分配律的统称。

乘法结合律 三个或三个以上的数相乘，先把其中的任何两个或几个数结合成一组相乘，再将其积和其他的因数相乘，其积不变。设a、b、c为任意三数，乘法结合律可表示为$(ab)c=a(bc)$。利用乘法结合律可使某些乘法变得简便。

乘法的验算方法 （1）用乘法验算：把被乘数和乘数交换位置，看所结果是否与原结果相同。（2）用除法验算：把积除以被乘数(或乘数)，看商是否等于乘数（或被乘数）。

乘法简单应用题 用乘法解答的简单应用题。有两种基本类型：（1）求相同数的和的乘法应用题；（2）求一个数的几倍是多少的乘法应用题。

乘法对加法的分配律 用一个数乘以几个数的和，可以先用这个数分别乘以这个和里的各个加数，然后再将所得的积加起来。设a、b、c为任意三数，则分配律可表示为$a(b+c)=ab+ac$。利用分配律，可以使某些乘法运算变得简便。

积 见乘法。

积的整除性 （1）若自然数a能被自然数b整除，则a的倍数c也能被b整除。通常把这一整除性称为整除的传递性。（2）若干个数相乘，如果其中的一个因数能被某一自然数整除，则它们的积也能被这个自然数整除。

积的乘方法则 积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即$(ab)^n=a^nb^n$。

值域 见函数。

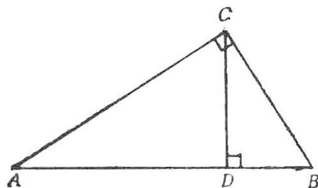
倒数 一个分数的分子和分母交换位置后所得到的新的分数是原分数的倒数。例如，$\frac{3}{5}$是$\frac{5}{3}$的倒数，$\frac{b}{a}$是$\frac{a}{b}$的倒数。

俯视图 见三视图。

倍数 若a、b均为自然数，且满足$a\vdots b$，则a叫做b的倍数。例如，$24\div6=4$，则24就是6的倍数。

射线 在直线上某一点一旁的部分。射线用表示它的端点和射线上任一点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面。

射影定理 即直角三角形中成比例线段的定理。直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项；每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。如图，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，则$CD^2=AD\cdot DB$，$AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$。



射影长定理 从平面外一点向这平面引一条垂线和若干条斜线：（1）相等斜线的射影相等；（2）较长斜线的射影较长。

高位 一个数左边的数位相对于右边

的数位叫做高位。左边第一位是这个数的最低位。例如，7590这个数，左边的数位9相对于右边的数位0是高位；左边的数位5相对于右边的数9是高位；7是这个数的最高位。

高阶等差数列　设有一数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots \qquad (1)$$

如果接连地从它的后一项减去前一项，那么就得到原数列(1)的第一次差构成的数列

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \cdots,$$
$$a_n - a_{n-1} \cdots \qquad (2)$$

再接连地将(2)的后一项减去前一项，又得到数列(1)的第二次差构成的数列，依次类推：

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$$

第一次差d_1：$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3 \quad \cdots$

第二次差d_2：$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \quad \cdots$

第三次差d_3：$\Delta^3 a_3 \quad \cdots$

$\cdots$

式中 $\Delta^k a_i$：$\Delta^{k-1} a_{i+1} - \Delta^{k-1} a_i$。如果做$3^r$次，数列(1)的每个第$r$次差都相等，那么以后各次差都等于零，则称数列(1)为r阶等差数列。

准确商　被除数能被除数除尽时所得的商。

准确数　能确切表示某一个量的真正值的数。例如，数出某班少先队员数为47人，这个47确切地表示了这个班少先队员的人数，是这个班少先队员人数的真正值，所以，47是这个班少先队员数的准确值。

离散型随机变量和非离散型随机变量

"任何运动形式，其内部都包含着本身特殊的矛盾。这种特殊的矛盾，就构成一事物区别于他事物的特殊的本质。"有许多随机变量，由于所描述的对象本身具有的特点，随机变量的取值是可以按照一定次序一一列举的。如，种子发芽与否，是0（代表发芽）、1（代表不发芽）；不合格品的件数是0，1，2，…等等。一切可能的取值能按一定次序一一列举，这样的随机变量，叫做离散性随机变量。

但有些随机现象就无法用离散型随机变量来描述。如某一零件的尺寸误差，每亩花生产量等等。这些随机现象的结果虽都表现为数量，但其数量取值充满了一个区间，是无法按一次次序一一列举的，这种随机变量叫做非离散型随机变量。

以上所说，都是只用一个随机变量来描述的随机现象。在工农业生产中，还有许多随机现象，需用多个随机变量才能描述。如农作物播种需要有连续四天高于12°C的地温，若把每天地温作为一个随机变量，则连续四天的地温情况便是一个依赖于4个随机变量的随机现象。

效率　泛指工作中所获得的劳动效果与所消耗的劳动量之百分比。常表示为

$$\text{效率} = \frac{\text{劳动效果}}{\text{劳动量}} \times 100\%。$$

部分积　在乘法中，乘数各位的数乘被乘数所得的积。例如，136×15中，乘数中的个位数5乘被乘数136所得的积680，十位数1乘136所得的积136，都是136×15的部分积。

部分商　在除法中，商的各位的数字所表示的数。例如，39÷3＝13，商13中的10和3都是商13的部分商。

部分分式　把x的一个实数系数的真

分式分解成几个分式的和，使各分式具有$\frac{a}{(x+A)^k}$或$\frac{ax+b}{(x^2+Ax+B)^k}$的形式，其中$x^2+Ax+B$是实数范围内的不可约多项式，而且$k$是正整数。这时，称各分式为原分式的部分分式。例如

$$\frac{x^4-8x^3+5x^2+6x+2}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$$

$$=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$-\frac{2}{x-1}+\frac{x-3}{x^2+1},$$

等式右边各分式均是左边分式的部分分式。

递减数列 如果一个数列从第二项起每一项都不大于它前面的一项，那么这个数列就叫做递减数列。如果一个数列从第二项起每一项都小于它前面的一项，那么这个数列就叫做严格递减数列。

递增数列 如果一个数列从第二项起每一项都不小于它前面的一项，那么这个数列就叫做递增数列。如果一个数列从第二项起每一项都大于它前面的一项，那么这个数列就叫做严格递增数列。

容积 容器所能容纳的物体的体积。

容量 容积的大小

容量单位 用来度量物体容量多少的单位。常用的公制容量单位有：公升、毫升等。它们之间的进率关系是：1000毫升＝1公升。常用的市制容量单位有：石、斗、升。它们之间的进率关系是：10斗＝1石，10升＝1斗。英制容量单位有：蒲式耳（英文 bushel 的译音）、加仑（英文 gallon 的译音）、夸特（英文 guart 的译音）、品脱（英文 pint 的译音）。它们之间的进率关系是：1蒲式耳＝8加仑，1加仑＝4夸特，1夸特＝2品脱。

扇形 一条圆弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形。设扇形的圆心角为$n°$或θ弧度，扇形弧长为l，则扇形的面积为

$$S=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$$

$$=\frac{1}{2}R^2\theta,$$

扇形的弧长$l=\frac{n\pi R}{180}=R\theta$。

被除数 见除法。

被乘数 见乘法。

被减数 见减法。

调合中项 若在a与b中间插入一个数h，使a，h，b成调合数列，那么h叫做a与b的调合中项

$$h=\frac{2ab}{a+b}。$$

调合数列 等差数列的各项的倒数构成的数列。

通分 把几个异分母的分数化成与原来分数相等的同分母分数的过程。例如，把$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$化为$\frac{8}{12}$和$\frac{9}{12}$的过程，就叫做通分。

通分的方法 先求出所给各分数分母的最小公倍数，用它作新分母，然后把各分数分别化成用新分母作分母，

但大小和原来分数相等的分数。例如，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$这三个分数的分母的最小公倍数是30，通分后是$\frac{15}{30}$，$\frac{20}{30}$，$\frac{18}{30}$。

能被6整除的数 若一个整数既能被2整除，又能被3整除，则可被6整除。例如，2514能被2整除，也能被3整除，则它必被2×3＝6整除。

能被3、9整除的整数 若一个整数的各位数字之和能被3或9整除，则这个数可被3或9整除。例如，3012，因3＋0＋1＋2＝6，又3|6，所以3|3012；3672018，因3＋6＋7＋2＋0＋1＋8＝27，又9|27，所以9|3672018。

能被2、4、8整除的整数 （1）若一个整数的末位数字是偶数，则这个数能被2整除。例如，6，8，24等。（2）若一个整数的末二位数字能被4整除，则这个数能被4整除。例如，124，1004等。（3）若一个整数的末三位数字能被8整除，则这个数能被8整除。例如，7168、20088等。

能被5、25、125整除的整数 （1）若一个整数的末位数字是0或5，则这个数能被5整除。例如，120、3025等。（2）若一个整数的末两位数能被25整除，则这个数能被25整除。例如，125、5350等。（3）若一个整数的末三位数能被125整除，则这个数能被125整除。例如，8125、5023250等。

能被7、11、13整除的数 （1）将一个整数A从末位数字开始向左角三位一小节分开，依次称为第1节、第2节、……第k节。每一小节的三位数（最左边一小节也可能是两位数，或一位数）分别记为n_1、n_2、……n_k。设 $N=n_1-n_2+n_3-n_4+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}n_k$。若$N$能被7或11或13整除，则整数$A$可被7或11或13整除。例如，$A=6351674$，$N=674-351+6=329$，而7|329，所以有7|6351674。又如，$A=11795966$，$N=966-795+11=182$，而13|182，所以有13|11795966。再如，$A=728453$，$N=453-728=-275$，而11|(−275)，所以有11|728453。

（2）若一个整数的偶位数上的数字和与奇位数上的数字和之差能被11整除，则这个数能被11整除。例如，728453，偶位数上的数字之和为20，奇位数上的数字之和为9，20－9＝11，而11|11，所以有11|728453。又如，4792920，(2＋2＋7)－(0＋9＋9＋4)＝11－22＝－11，而11|(－11)，所以有11|4792920。

验算 按照一定方法对式题计算结果或应用题解答结果正确与否的核对过程。

球 半圆绕着它的直径旋转一周所成的图形叫做球面。球面所围成的立体叫做球体，简称球。半圆的圆心叫做球心。一个球可以用表示它的球心的字母来表示，例如“球O”。

球台 球带和截得它的两个截面所围成的几何体。球带的高叫做球台的高；两个截面叫做球台的底面。

球带 球面在两个平行截面之间的部

分。截得的两个圆叫做球带的底。平行平面间的距离叫做球带的高。

球冠 球面被一个平面截得的一部分。这个平面截球面所得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的球的直径在截面和球冠之间的一段的长叫做球冠的高。

球缺 球冠和截得它的截面所围成的几何体。球冠的高叫做球缺的高。截面叫做球缺的底面。

球大圆 球面被经过球心的平面截得的圆。

球小圆 球面被不通过球心的截面截得的圆。

球的切线 和球只有一个公共点的直线。

球的切面 和球面只有一个公共点的平面叫做球的切面。球的切面和球面的公共点叫做切点。

球的截面 一个平面截一个球所得的截面是一个圆。

球底圆锥 以球心为顶点，球冠的底为底的圆锥和球冠合成一个几何体。球底圆锥的体积和球冠的面积有如下的关系：$V_{球底圆锥}=\frac{1}{3}RS_{球冠}$。

球台的体积 是通过计算两个球缺体积后得其差而得之。

球缺的体积 如果球的半径是 R，球缺的底面半径是r，球缺的高是h，那么球缺的体积

$$V_{球缺}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$$

或 $V_{球缺}=\frac{\pi h}{6}(h^2+3r^2)$。

球的体积公式 如果球的半径是R，球面积是$S_{球}$，那么球体积

$$V_{球}=\frac{1}{3}RS_{球};$$

如果球的半径是R，那么球的体积

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

球的面积公式 如果球的中径是 R，球的面积是$S_{球}$，那么 $S_{球}=4\pi R^2$。

球的截面性质 （1）球心和截面圆心的连线和截面垂直。（2）如果用 R 和r分别表示球的半径和截面圆的半径，用d 表示由球心到截面的距离，那么$r=\sqrt{R^2-d^2}$。（3）与球心的距离相等的截面的圆相等。（4）与球心的距离不等的两个截面圆不等，距球心较近的截面的圆较大。

球的外切圆锥面 从球外的任意一点引这球面所有的切线，这些切线构成的圆锥面。

球带的面积公式 球带的面积等于它的高和球的大圆周长的积。设球的半径是R，球带的高是h，球带的面积是$S_{球带}$，那么$S_{球带}=2\pi Rh$。

球冠的面积公式 球冠的面积等于它的高和球的大圆周长的积。设球的半径是R，球冠的高是h，球冠的面积是$S_{球冠}$，那么$S_{球冠}=2\pi Rh$。

球面上两点间的距离 球面上两点间大圆劣弧的长。在球面上连接 A、B 两点的所有曲线（弧）的长，以球面上两点间的距离为最短。

排列 从n个不同元素中，任意取出m个$(1\leqslant m\leqslant n)$不同的元素，然后按照任一顺序排成一列，叫做从$n$ 个不同元素中取出m个不同元素的一个排列。例如，ab是从a，b，c 这3个不

同元素中取出2个不同的元素的一个排列。

排列数　从n个不同元素中每次选取$m(1\leqslant m\leqslant n)$个不同元素的所有排列的个数，叫做排列数，记为$P_n^m$或$A_n^m$。

排序不等式　设有数组$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$
$$\leqslant a_1bj_1+a_2bj_2+\cdots+a_nbj_n$$
$$\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n。$$

这里j_1，$j_2\cdots$，j_n是1，2，…，n的任意一个排列，等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时成立。

排列数计算公式

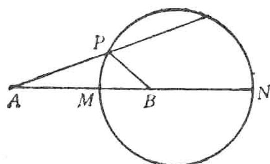
$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

或　$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

$(1\leqslant m\leqslant n,\ m,n\in N)$。

基数　用来表示有限集合中元素多少的数。例如，一个班有40名同学作为一个集合，这个40就是基数。

基本轨迹　（1）到定点的距离等于定长的点的轨迹，是以定点为圆心，定长为半径的圆。（2）和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹，是这条线段的垂直平分线。（3）到已知角两边的距离相等的点的轨迹，是这个角的平分线。（4）到两相交直线等距离的点的轨迹，是这两定直线交角的两条平分线。（5）到一条已知直线距离等于定长的点的轨迹，是平行于这条直线，并且到这条直线的距离等于定长的两条直线（双轨平行线）。（6）到两条平行线距离相等的点的轨迹，是和这两条平行线距离相等的一条平行线。（7）和已知线段两个端点连线的夹角等于已知角的点的轨迹，是以已知线段为弦，所含圆周角等于已知角的两段弧（端点除外）。（8）与两定点A、B的距离之比为一常数（不等于1）的点的轨迹是一圆周。如图，A、B是两定点，P是动点，且$\frac{PA}{PB}=k(k\neq1)$，设M点内分AB，且$\frac{AM}{MB}=k$，N点外分AB，且$\frac{AN}{NB}=k$，则P点的轨迹是以MN为直径的圆。



基本作图　在初等几何中，几种最简单、最常用的尺规作图。其他较复杂的作图都是由基本作图组成的。基本作图一般包括：（1）作一线段等于已知线段；（2）作一个角等于已知角；（3）作已知角的平分线；（4）经过一点作已知直线的垂线；（5）作已知线段的垂直平分线；（6）经过已知直线外的一点作这条直线的平行线。利用基本作图，可以进行其他作图。即解较复杂的作图题，在写“作法”时，如果用到上述基本作图，不必一一写出其具体步骤。

基本积分公式　求不定积分是求导数

的逆运算。因此，可以从导数公式得到相应的不定积分公式。如

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \ (n \neq -1),$$

所以有不定积分公式

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$(n\neq -1)$。用同样的方法可以得到其它的不定积分公式。下面是基本积分公式表：

（1）$\int 0dx = C$；　　（2）$\int 1dx = x + C$；

（3）$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C(n\neq -1)$；

（4）$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$；

（5）$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$（其中$a>0$，且$a\neq 1$）；

（6）$\int e^x dx = e^x + C$；　　（7）$\int \sin x dx = -\cos x + C$；

（8）$\int \cos x dx = \sin x + C$；

（9）$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$；

（10）$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$；

（11）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$；

（12）$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$。

表中C为积分常数。

基本事件和复杂事件　在事件中，有的事件很复杂，有的事件很简单。一般地说，复杂事件往往可以“分解”成同一随机现象下的较简单的事件。例如，三粒油菜籽的发芽情况是一个随机现象，“至少有一粒发芽”就是一个事件。但这个事件比较复杂，它包括了“有一粒发芽”、“有二粒发芽”，“有三粒发芽”这三个事件所描述的情况，这三个事件就比较简单。在一定研究范围中，不能再“分解”的事件叫做基本事件；可以由基本事件“复合”而成的事件叫做复杂事

件。

菱形　有一组邻边相等的平行四边形。菱形具有平行四边形的所性质，并且四条边都相等，对角线互相垂直（且平分），对角线平分一组对角。

黄金分割　把一条线段（AB）分成两条线段，使其中较大的线段(AC)是原线段（AB）与较小线段（BC）的比例中项，则叫做把这条线段黄金分割。设原线段长为l，则较长线段

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx 0.618l,$$

C点分线段AB成黄金分割，也叫做C点分线段AB成中外比。分线段成黄金分割的几何作图方法，在古希腊是由数学家攸多克萨斯（Eudoxus，公元前408～前355）首先发现的。从古希腊到十九世纪，人们一直认为这种比例在造型艺术中有美学价值。五角星（及正十边形）的几何作图要用到黄金分割；矩形两直角边之比为中外比时，显然格外协调；在现代，优选法中的0.618法，就是选用的黄金分割。

梯形　一组对边平行而另一组对边不平行的平行四边形。梯形中，平行的两边叫做梯形的底，不平行的两边叫做梯形的腰，两底的距离叫做梯形的高。直角梯形、等腰梯形都是特殊的梯形；梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半；梯形的面积等于它的两底之和与高的乘积的一半。

梯形的底　梯形中，平行的两边叫做梯形的底。通常把较短的底叫做上底，较长的叫做下底。

梯形的高　见梯形。

辅助线　在几何证明中，常常为了证明的需要，在原来图形上添画适当的线，藉以沟通已知与结论的关系，另外添加的线就叫辅助线。辅助线通常画成虚线。添辅助线往往是证明某些几何题的关键，辅助线的产生来自正确的分析。在几何教学中，应该结合具体的题目，分析添加辅助线的规律。

虚数　见复数。

虚数单位i的幂的周期性　对任何$n\in z$，都有

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,$$
$$i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i。$$

常量　在某一过程中保持同一数值的量或数，称作常数。例如，圆的面积A（厘米^2）与它的半径r（厘米）之间的关系$A=\pi r^2$中，π是常量。

常数　见常量。

常数列　每一项都相等的数列。

常用对数　以10为底的对数。记作$\lg a(a>0)$。1615年英国人布里格斯（Henry Briggs，1561—1631年）发明常用对数。他与荷兰人佛拉哥经过10年艰苦奋斗，于1626年发表了1—100000的14位常用对数表。

常用对数的首数　所有正数的常用对数都可以写成一个整数（正整数、零或负整数）加上一个正的纯小数（或者零）的形式，其中整数部分称做常用对数的首数，正的纯小数（或者零）部分称做常用对数的尾数。

常用对数的尾数　是以10为底的对数的正的纯小数部分。

累积频率　数据小于某一数值的频率叫做该数值的累积频率。

第一级运算 见三级运算。

第二级运算 见三级运算。

第三级运算 见三级运算。

第四比例项 见比例。

偶数 能被2整除的整数。例如，0、+2、-2、+4、-4、……。在小学数学中，只把自然数中的2、4、6、……作为偶数。

偶函数 见函数的奇偶性。

假分数 分子大于或等于分母的分数。例如，$\frac{4}{3}$，$\frac{9}{8}$，$\frac{13}{7}$，$\frac{5}{5}$等。假分数大于或等于1。

假命题 错误的命题叫做假命题（见命题）。

假分数化整数 用假分数的分子除以它的分母，若能整除，则所得的商即为假分数化成的整数。即由$\frac{a}{b}$，若$b|a$，则$a=bq$，q即为$\frac{a}{b}$化成的整数。例如，$\frac{18}{3}$，$3|18$，$18=3\times6$，6即是$\frac{18}{3}$所化成的整数。

假分数化带分数 用假分数的分子除以它的分母，当不能整除时，所得的不完全商，就是带分数的整数部分，所得的余数是带分数的分子，原分母不变。即若$a=bq+r$（$0<r<b$），则$\frac{a}{b}=q\frac{r}{b}$。例如。$\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$。

斜足 两条直线相交不成直角时，它们的交点称为斜足。

斜线 两条直线相交不成直角时，其中的一条叫做另一条的斜线。如AB是CD的斜线，CD也是AB的斜线。

斜率 见一次函数的图象

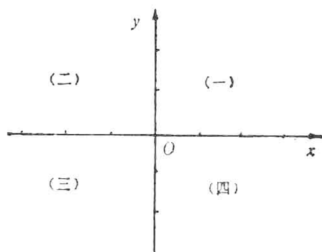
斜线段 经过直线外一点到已知直线的斜线上，这一点与斜足之间的线段叫做斜线段。

斜棱柱 侧棱和底面不垂直的棱柱。

斜三角形 锐角三角形与钝角三角形的统称。“斜”系对“直”而言（见锐角三角形）。

斜线长定理 从平面外一点向这平面引一条垂线和若干条斜线：（1）射影相等的两条斜线相等；（2）射影较长的斜线较长。

象限 两条坐标轴将坐标平面分成四部分，其中的任何一部分都称为一个象限。坐标平面内共有四个象限，且分别叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限（如图示）。



象限角 在平面直角坐标系中，使角的顶点与坐标系原点重合，角的始边在x轴的正半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角。如30°，390°，-330°，的角都是第一象限的角；而300°，650°，-60°的角都是第四象限的角；585°的角是第三象限的角。如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限。

减号 表示减法运算的符号。记作“－”。德国数学家魏德曼于1489年在

他的著作中首先使用了这个符号。他认为从加号中去掉一竖就表示减少的意思。但是直到1514年以后才被公认为是减法的运算符号。

减法　已知两个数a和b，求一个数c，使c与b的和等于a的运算。记作"$a-b=c$"，读作"a减b等于c"。其中，a叫做被减数，b叫做减数，c叫做a与b的差。

减数　见减法。

减法的运算性质　主要有以下三种：（1）从一个数减去几个数的和，可以从这个数里依次减去和里的每一个加数；（2）一个数减去两个数的差，等于这个数加上差里的减数，再减去差里的被减数，或者这个数先减去差里的被减数，再加上差里的减数；（3）几个数的和减去几个数的和，等于从第一个和中的各个加数，分别减去第二个和中不比它大的一个加数，然后再把所得的差相加。

减法的验算方法　（1）用减法验算：从被减数中减去差，看结果是否等于减数。（2）用加法验算：把减数与差相加，看结果是否等于被减数。

减法简单应用题　用减法解答的简单应用题。有三种基本类型：（1）求剩余的减法应用题；（2）求两数相差多少的减法应用题；（3）求比一个数少几的数是多少的减法应用题。

商　见除法。

旋转体　是一平面图形绕这平面内的一条直线旋转一周而成的几何体。在中学《立体几何》中的"圆柱"、"圆锥"、"圆台"和"球"等几何体都是简单的旋转体。旋转体的体积可利用计算定积分的方法而求得。

旋转面　一条平面曲线（包组直线）绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做旋转面这条定直线叫做旋转轴。无论旋转到什么位置，这条曲线都叫做旋转面的母线。

旋轮线　沿一条直线无滑动地滚动的圆周上一点P的轨迹。

旋转体的体积　一个平面图形绕着一条直线旋转所成的立体叫做旋转体，直线叫做旋转轴。

设函数$y=f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，如果$f(x)$是常数C，则旋转体是圆柱体（如图2），它的体积为$\pi r^2(b-a)$。如果$y=f(x)$不是常数，则旋转体如图1所示，为了求出旋转体的体积，可以依照计算曲边梯形面积的方法，即用分割、求和、取极限的方法得到旋转体的体积公式

$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$。利用这个公式就可求得旋转体的体积。

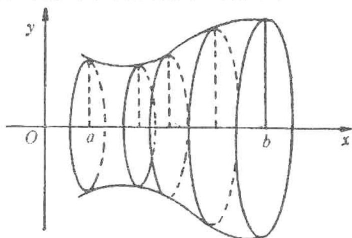


图1

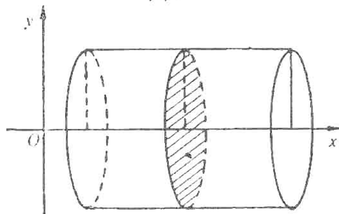


图2

旋转体的侧面积 如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$及x轴所围的曲边梯形绕x轴旋转而成，那么运用分割、求和、取极限的方法，可以得到旋转体的侧面积的计算公式

$$S_{侧}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

旋轮线的参数方程

$$\begin{cases}x=a(\varphi-\sin\varphi),\\ y=a(1-\cos\varphi)\end{cases}\quad(\varphi为参数)，$$

其中a为圆的半径。

添括号法则 括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不变号；括号前面是“-”号，括到括号里的各项都变号。如$a+b+c-d=a+(b+c-d)$，$a-b+c-d=a-(b-c+d)$。

渐近线 当曲线上一点M沿曲线无限远离原点时，如果M点到一直线的距离无限趋近于零，那么，这条直线就叫做这个曲线的渐近线。例如，直线$y=\frac{b}{a}x$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线。因为双曲线上的点$M$到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离$MQ<MN$，当$MN$无限趋近于零时，$MQ$也无限趋近于零。所以由上述定义，直线$y=\frac{b}{a}x$是双曲线的渐近线。同样，另一条直线$y=-\frac{b}{a}x$也是双曲线的渐近线。

对于$F(x,y)=0$来说，如果当$x\to a$时，有$y\to\infty$，就把$x=a$叫做$F(x,y)=0$的垂直渐近线；如果当$x\to\infty$时，有$y\to b$，就把$y=b$叫做$F(x,y)=0$的水平渐近线。

渐近线的求法 求渐近线可根据以下结论：如果极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$存在，且极限$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$也存在，那么曲线$y=f(x)$具有渐近线，它的方程是$y=ax+b$。

混循环小数 循环节从小数点右第一位数字后开始的循环小数。例如，0.5666……，7.38105105……等。

随机事件和随机事件的概率 有一些事件，它们在一定的条件下可能发生也可能不发生。例如，某战士射击一次，可能中靶，也可能不中靶；掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面；检查某件产品，可能合格，也可能不合格等事件，在一定条件下是否发生，不能事先确定。这种在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件，叫做随机事件。

随机事件在一次试验中（一次试验就是将事件的条件实现一次）是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性。一般地，在大量重复进行同一试验时，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$总是接近于某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件A的概率，记作$P(A)$。

隐函数 如果x和y的对应关系是由一个方程$F(x,y)=0$给出的，那么

称y是x的隐函数。隐函数的特点是，y和x的函数关系不是用一个仅含有自变量x的解析式$y=f(x)$给出的，而是包含于方程$F(x,y)=0$之中。我们把用包含x的解析式直接表示出来的函数$y=f(x)$称为显函数。隐函数是对显函数而言的。值得注意的是：（1）有些隐函数是可转化为显函数的。如隐函数$x^2+y^2=a^2$转化为显函数为$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$。从这里还可看到，将隐函数转化为显函数时，所得到的显函数有时不止一个。（2）不是任意一个隐函数都可以转化为显函数。如$xy-e^x+e^y=0$就无法变成显函数。（3）不是任意一个方程$F(x,y)=0$都能确定一个隐函数的。至于符合什么条件的方程才能确定y为x的隐函数，已超出中学数学范围。在中学数学范围内，一般所给出的方程$F(x, y)=0$都是能够确定y是x的隐函数的。

隐函数的导数　对隐函数求导，只要把方程$F(x,y)=0$的两边对x求导，注意y是x的函数，在对y或y的函数（如y^3是y的函数）求导时，利用复合函数的求导法则即可。例如

$(y^2)'_x=(y^2)'_x y'_x=2y\cdot y'_x$。

综合算式　在解答复合应用题时，根据题意，综合分步算式，最后所列出的整体算式。从分步算式过渡到综合算式常用“代入法”，即从分步算式最后一项运算出发，把不是题目中已知条件的数，一律用前面已求出的表示这个数的式子代换。直到整个式中的数值都是题目中所给的已知数为止。

超越数　不满足任何整系数代数方程的实数。例如，$\pi=3.141592\cdots\cdots$、自然对数的底$e=2.7182\cdots$。

超越方程　具有未知量的对数函数，指数函数、三角函数、反三角函数等的方程。例如$2^x=3x+1$，

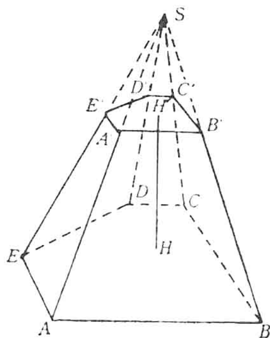
$\sin x+5x=0$。

提公因式法　多项式分解因式的一种方法。具体步骤：（1）把多项式的各项含有的公因式作为多项式的一个因式；（2）用这个因式去除多项式所得的商式就是另一个多项式；（3）把多项式写成这两个因式的积的形式。

联立方程　见方程组

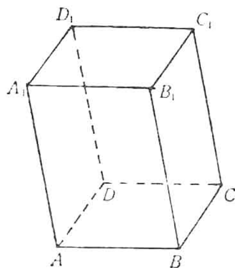
植树问题　与植树有关的一类应用题。有三种基本类型：（1）非封闭单线植树。其基数量关系为：株数＝距离÷间隔＋1；间隔＝距离÷（株数－1）；距离＝间隔×（株数－1）。（2）封闭单线植树：其基本数量关系为：株数＝距离÷间隔。（3）平面植树，其基本数量关系为：株数＝面积÷（行距×株距）。

棱台　用一个与棱锥的底面平行的平面去截棱锥，所得的截面与底面之间的部分。如图中的$ABCDE$和



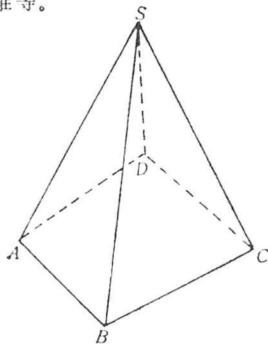
$A_1B_1C_1D_1E_1$之间的部分。这两个平行的面叫做棱台的底面；原棱锥的底面叫做下底面，原棱锥的截面叫做上底面。其他各面叫做棱台的侧面；两个相邻侧面的公共边叫做棱台的侧棱；两个底面之间的距离(如H_1H)叫做棱台的高。棱台的表示法和棱柱的表示法相同，如图中的棱台可记作棱台 $ABCDE—A_1B_1C_1D_1E_1$，或者简单记作棱台AC_1。

棱柱　有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体。棱柱的互相平行的两个面叫做棱柱的底面；其余各面叫做棱柱的侧面；相邻的两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱。两个底面的距离叫做棱柱的高。如图 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$是底面，$ABBA_1$，BCC_1B_1等是侧面，A_1A，B_1B等是侧棱，H_1H是高。棱柱的表示法，是写出两个底面的各个顶点的字母，用一条短横线隔开，如图的棱柱记作棱柱 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，也可以只用一条对角线端点的两个字母表示，例如



棱柱AD_1。棱柱通常用它的底面的边数来命名，如底面是三角形，四边形的棱柱分别叫做三棱柱，四棱柱等。

棱锥　有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体。在棱锥里，多边形叫做棱锥的底面。有公共顶点的各个三角形叫做棱锥的侧面；两个相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱；各侧面的公共点叫做棱锥的顶点。棱锥的表示法是先写出表示它的顶点的字母，再在字母后面画一条短横线，然后写出表示底面各顶点的字母。如图中的棱锥，可以记作棱锥$S—ABCD$；也可以只用表示顶点的一个字母来表示，记作棱锥S。棱锥的底面有三角形、四边形等，分别叫做三棱锥、四棱锥等。



棱台的体积　设棱台的上、下两底面积分别是S_1与S，高为h，体积是V，

那么$V=\frac{1}{3}h(S_1+S+\sqrt{S_1S})$。

棱台的性质　(1)棱台的两个底面是相似多边形；(2)棱台的各个侧面都是梯形；(3)棱台的各条侧棱延长后相交于一点。

棱台的截面 常见的棱台的截面有棱台的对角面以及和棱台的底面平行的截面。和棱台的底面平行的截面是和底面相似的多边形。

棱柱的体积 等于它的底面积和高的乘积。

棱柱的截面 用一个平面去截棱柱所得到的面，因为棱柱的各面都是平面，所以截面是一个多边形。

棱锥的体积 等于它的底面面积和高的乘积的三分之一。设棱锥的高为h，底面面积为S，体积为V，那么

$$V=\frac{1}{3}Sh。$$

棱锥的截面 常见的有棱锥的对角面以及和棱锥底面平行的截面。如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么截面和底面相似，并且它们的面积比等于截得的棱锥的高与已知棱锥的高的平方比。

棱台的对角面 经过棱台不相邻的两条侧棱的截面。棱台的对角面是梯形，正棱台的对角面是等腰梯形。

棱台的全面积 棱台的侧面积与上、下底面面积的和。

棱台的侧面积 棱台的所有侧面面积的和。正棱台的侧面积等于两个底面周长的和与斜高乘积的一半。设正棱台A_1D的上、下底面的周长分别为p_1和p，斜高为l，并设侧面积为$S_侧$，则$S_侧=\frac{1}{2}(p_1+p)l$。正棱台的侧面积公式不适合于一般棱台。求一般棱台的侧面积，需要把所有侧面的面积分别求出，然后相加。

棱柱的对角面 经过棱柱的不相邻的两条侧棱的截面。斜棱柱的对角面都是平行四边形，直棱柱的对角面都是矩形。

棱柱的全面积 棱柱的侧面积与两底面面积的和。

棱柱的侧面积 棱柱的所有侧面面积的和。棱柱的侧面积等于它的侧棱长与直截面周长的乘积。如果是直棱柱，它的底面就是直截面，所以直棱柱的侧面积等于它的侧棱长与底面周长的乘积。

棱柱的直截面 和棱柱的各侧棱垂直的截面。

棱锥的对角面 经过棱锥不相邻的两条侧棱的截面。

棱锥的全面积 棱锥的侧面积与底面面积的和。

棱锥的侧面积 棱锥的所有侧面面积的和。正棱锥的侧面积等于它的底面的周长与斜高乘积的一半。如果正棱锥V的斜高为l，底面的周长为p，侧面积为$S_侧$，那么$S_侧=\frac{1}{2}lp$。正棱锥的侧面积公式不适用一般棱锥。求一般棱锥的侧面积，需要把所有的侧面三角形的面积分别求出，然后相加。

棣莫佛定理 复数的$n(n\in N)$次幂的模等于这个复数的模的n次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的n倍。即

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$(n\in N)$。由于这个定理是法国数学家棣莫佛（Abraham de Moivre，1667—1754年）首先于1722年给出的，所以叫做棣莫佛定理。1748年数

学家欧拉又利用了他于1743年发现的结果：

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}},$$

其中$\sqrt{-1} = i$，证明了棣莫佛定理对于n是实数时也成立。

椭圆 平面内与两个定点F_1、F_2的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹。这两个定点叫做椭圆的焦点，两个焦点间的距离叫做椭圆的焦距。

椭圆规 根据椭圆的定义设计的一种画椭圆的器械。常用的一种椭圆规，它的构造是在一个十字形的金属板上有两条互相垂直的槽，在直尺上有两只固定的钉A，B，它们分别可以在纵槽和横槽上滑动，在直尺上的P处用套管装上铅笔，当A和B在槽上连续移动时，P处的铅笔就画出一个椭圆。

椭圆的弦 连结椭圆上任意两点的线段。

椭圆的直径 在椭圆中平行弦的中点的轨迹。如果AB和CD是同一椭圆的两条直径，并且AB平分平行于CD的弦，CD平分平行于AB的弦，则它们互为共轭直径。

椭圆的面积 设椭圆的长半轴长为a，短半轴长为b，面积为S，则有

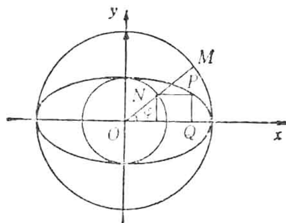
$S = \pi ab$。

椭圆的切线方程 （1）经过椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$上一点$P(x_1, y_1)$的切线方程是$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$。 （2）椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$的斜率为$k$的切线方程是$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$。

椭圆的主要直径 如果椭圆对称于坐标轴（其中心在坐标原点），那么两条坐标轴（介于椭圆之间的线段）是椭圆的直径，这两条直径不仅是共轭直径，而且互相垂直，这样的直径叫做椭圆的主要直径。

椭圆的参数方程 如图，设$P(x, y)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>b)$上的任意一点，以O为圆心，以b为半径作圆，经过P点作直线PQ垂直于x轴于Q，交以O为圆心，以a为半径的圆于M，连结OM，设$\angle MOx = \varphi$，那么$x = OQ = a\cos\varphi$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，得$y = QP = b\cdot\sin\varphi$，

因此$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi。\end{cases}$ 这个方程就是长轴在x轴上，短轴在y轴上，长轴的长是$2a$，短轴的长是$2b$的椭圆的参数方程。



椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

或 $$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)。$$

椭圆周长近似计算公式　设椭圆的长轴为a，短轴为b，周长为l，则有$l=fa$，式中的f是一个随短轴与长轴之比$\frac{b}{a}$而变化的函数，由$\frac{b}{a}$可在下表中查得f的值。

$\frac{b}{a}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f	2.032	2.101	2.193	2.3013	2.4221	2.5527	2.6912	2.8362	2.9862	3.1416

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的性质

（1）位于直线$x=\pm a$和$y=\pm b$所围成的矩形里。（2）关于每一条坐标轴和原点都是对称的。（3）以$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$、$B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$为顶点。（4）离心率

$$e=\frac{c}{a}。$$

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的长轴和短轴　连结长轴两端点$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$的线段$A_1A_2$叫做椭圆的长轴，它的长等于$2a$。连结短轴两端点$B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$的线段$B_1B_2$叫椭圆的短轴，它的长等于$2b$。

确定平面的条件　（1）不在一条直线上的三个点可以确定一个平面。（2）一条直线和这条直线外的一个点，可以确定一个平面。（3）两条相交直线可以确定一个平面。（4）两条平行直线可以确定一个平面。

最简比　前项和后项是互质数的比。

最简分式　分子与分母没有公因式（除1以外）的分式。

最简分数　见既约分数。

最简根式　被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；被开方数不含分母，被开方数的指数和根指数是互质数的根式。例如，$\sqrt[3]{a^2b}$。

最大公约数　几个整数的公约数中最大的一个数，即若d是整数a_1，a_2，a_3，……，a_n（$n\geqslant 2$）的公约数中最大的一个数，则称d为a_1，a_2，a_3，……，a_n的最大公约数。记为$(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n)=d$。例如，$(18, 30, 48)=6$。

最小公倍数　在整数a_1，a_2，a_3，……，a_n（$n\geqslant 2$）的公倍数中，最小的那个公倍数。记作$[a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n]$。例如，$[4,6]=12$。

最小正周期　对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中存在着一个最小的正数，就把这个最小的正数叫做最小正周期。例如2π是$y=\sin x$，$x\in R$这个函数的最小正周期。今后对于三角函数来说，它们的周期一般指的是三角函数的最小正周期。

最低公倍式　几个多项式的公倍式中次数最低的一个。

最高公因式　如果几个多项式同时能被一个多项式整除，那么这个多项式就叫做这几个多项式的公因式。几个多项式的公因式有时不止一个，其中次数最高的一个公因式叫做这几个多项式的最高公因式。如果在一个多项式各项的所有公因式中次数最高的一个公因式，叫做这个多项式各项的最高公因式。

最简二次根式　符合下列条件的二次根式：（1）被开方数的每一个因式的指数都小于根指数2；（2）被开方数不含分母。例如

$$4\sqrt{5a},\quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}.$$

最大公约数的求法　在中小学一般用短除分解质因数法，即先把所给各数分别分解质因数，然后把各数公有的所有质因数连乘，其连乘积即是所给各数的最大公约数。分解质因数常用短除法。例如，求546，234，702的最大公约数。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 546 & 234 & 702 \\ \hline 3 & 273 & 117 & 351 \\ \hline 13 & 91 & 39 & 117 \\ \hline & 7 & 3 & 9 \end{array}$$

$$\therefore (546,234,702)=2\times3\times13=78。$$

最大公约数的性质　（1）两个数分别除以它们的最大公约数，所得的商互质。例如，22和33分别除以它们的最大公约数11，所得的商2和3，2和3互质。（2）两个数的最大公约数的约数，都是这两个数的公约数。例如，24和36的最大公约数12的约数2，3，4，6，12都是24和36的公约数。

最小公倍数的求法　（1）分解质因数法，即先把所给各数分解质因数，并取出它们全部公有的质因数，再取出其中几个数公有的质因数，然后把它们与每个数独有的因数连乘，其积即是它们的最小公倍数。例如，求〔12，16，18〕。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 16 & 18 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 9 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

〔12，16，18〕$=2\times2\times3\times4\times3=144$。（2）利用最大公约数求最小公倍数。即由$[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$，

可知，$[a,b]=\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}$。例如，求

$[12,16]$。因为$12\times16=192$，$(12,16)=4$，所以

$$[12,16]=\frac{12\times16}{(12,16)}=\frac{192}{4}=48。$$

最小公倍数的性质　两个数的任意一个公倍数都是它们的最小公倍数的倍数。例如，5和8的公倍数80，是它们的最小公倍数40的2倍。

最简单的三角方程　形如 $\sin x=a$，$\cos x=a$，$\operatorname{tg}x=a$，$\operatorname{ctg}x=a$ 的三角方程，叫做最简单的三角方程。

最简单的三角方程的解集

a的取值范围	方程 $\sin x=a$ 的解集
$\|a\|>1$	ϕ
$\|a\|=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\text{arc}\sin a,\ k\in Z\}$
$\|a\|<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\text{arc}\sin a, k\in Z\}$
方程 $\text{tg}x=a$ 的解集	
$\{x\mid x=k\pi+\text{arc tg}a,\ k\in Z\}$	

a的取值范围	方程 $\cos x=a$ 的解集
$\|a\|>1$	ϕ
$\|a\|=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\text{arc}\cos a,\ k\in Z\}$
$\|a\|<1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\text{arc}\cos a,\ k\in Z\}$
方程 $\text{ctg}x=a$ 的解集	
$\{x\mid =k\pi+\text{arc ctg}a,\ k\in Z\}$	

最大公约数与最小公倍数的关系　两个数的最大公约数与最小公倍数的乘积，等于这两个数的乘积，即 $a\cdot b=[a,b]\cdot(a,b)$。例如，$[4,6]=12$，$(4,6)=2$，$[4,6]\cdot(4,6)=12\times2=4\times6=24$。

量　事物所具有的可以比较其程度属性。事物的多少、大小、长短、轻重、高低、快慢等属性，都叫做量。它与数不同，数是示表量的符号。

锐角　小于直角的（正）角。若角α是锐角，则$0^\circ<\alpha<90^\circ$；反之，若$0^\circ<\alpha<90^\circ$，则角α是锐角。

锐角三角形　三个角都是锐角的三角形。将三角形按角来分类，可分为锐角三角形、钝角三角形和直角三角形。由于锐角三角形与钝角三角形合称为斜三角形，故其分类系统如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形，}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形，}\\ \text{钝角三角形。}\end{cases}\end{cases}$$

短除法　借助于口算，只写被除数、除数和商，而不写计算过程的竖式除法。这种除法一般只用在质因数分解时。例如

$$\begin{array}{r|l} 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

等号　表示两个数量相等的符号。记作“=”，读作“等于”。

等圆　能够重合的两个圆。半径相等的圆都是等圆。

等分除　用除法运算解决把一个数平均分成几份，求一份是多少的数学问题。

等比中项　如果在a与b中间插入一个

数g，使a，g，b成等比数列，那么g叫做a与b的等比中项，如果g是a与b的等比中项，那么。

$$g=\pm\sqrt{ab}$$

等比定理 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$ $(b+d+\cdots+n\neq0)$，则有$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$，称为等比定理，亦称为比例的等比性质。本定理的证明中，采用了令原式的比值为k，即令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$，则$a=bk$，$c=dk$，…，$m=nk$，代入而证明的。此证明方法，在许多有关比例的证明中经常采用。例如，证明合分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

可以用此方法，即$\because\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，令其比值为$k$，即令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则$a=bk$，$c=dk$，分别代入$\frac{a+b}{a-b}$与$\frac{c+d}{c-d}$，结果相同，得证。

等比数列 从第二项起每一项与它相邻的前一项的比等于同一个常数的数列。这个常数叫做等比数列的公比。

等边圆柱 高和底面直径相等的圆柱。

等边圆锥 轴截面是等边三角形的圆锥。

等价命题 如果有两个命题在同一体系下，从第一个命题正确（或错误）可以得出第二个命题正确(或错误)，从第二个命题正确（或错误）也可以得出第一个命题正确（或错误），那么这样的两个命题叫做等价命题。等价命题也称等效命题。如，一个命题的原命题和它的逆否命题是等价命题；一个命题的逆命题和否命题也是等价命题。

等速螺线 从点O出发的射线l，绕点O作等角速度的转动，同时点M沿l作等速直线运动，点M的轨迹叫等速螺线或阿基米德螺线。

等差中项 如果在a与b中间插入一个数A，使a，A，b成等差数列，那么A叫做a与b的等差中项。如果A是a与b的等差中项，那么

$$A=\frac{a+b}{2}。$$

等差数列 从第二项起，每一项与它相邻的前一项的差等于同一个常数的数列。这个常数叫做等差数列的公差。

等量代换 在推理的过程中，将一个量用和它相等的量代替，这种等式或不等式的变形叫做等量代换。等量代换属等量公理中的一条。在中学数学教学中，等量公理不单独提出，而将其分别放在等式的性质、不等式的性质、全等形的定义和平面几何中指出的等量代换等处分散提出。

等边三角形　三边都相等的三角形。等边三角形亦称正三角形。等边三角形的三个内角均为60°。等边三角形是特殊的等腰三角形（见等腰三角形）。

等式的性质　（1）等式的两边都加上或都减去同一个数，所得到的仍是等式；（2）等式的两边都乘以或都除以（除数不能为零）同一个数，所得到的仍是等式。

等轴双曲线　实轴和虚轴等长的双曲线。

等腰三角形　三边中有两边相等的三角形。在等腰三角形中，相等的两边都叫做腰，另外一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角。等腰三角形的两底角相等。等腰三角形顶角的平分线、底边上的高和底边上的中线互相重合。按此等腰三角形的定义，三角形按边来分类，可分为不等边三角形与等腰三角形两类，等边三角形是特殊的等腰三角形，即

三角形 { 不等边三角形，
等腰三角形 { 底边和腰不相等的等腰三角形，
等边三角形。 } }

等比数列的公比　见等比数列。

等差数列的公差　见等差数列。

等腰直角三角形　两条直角边相等的直角三角形。等腰直角三角形的每一锐角都是45°。等腰直角三角形斜边的长是直角边长的$\sqrt{2}$倍。等腰直角三角形斜边上的高平分斜边并且等于斜边的一半。

等轴双曲线的性质　等边双曲线的渐近线方程是$x \pm y = 0$，这两条渐近线是互相垂直的，并且平分等边双曲线实轴和虚轴的交角，四条直线$x = \pm a$，$y = \pm a$围成一个正方形。

等比数列的通项公式　若等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则这等比数列的通项公式为

$$a_n = a_1 q^{n-1}\text{。}$$

等可能性事件的概率　随机事件的概率一般可以通过大量重复试验求得其近似值。但对于某些随机事件，也可以不通过重复试验，而只通过对一次试验中可能出现的结果的分析计算其概率。如掷一枚均匀硬币，要么出现正面，要么出现反面，出现这两种结果的可能性是相等的。因此，可以认为出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，出现反面的概率也是$\frac{1}{2}$，这和大量重复试验的结果是一致的。有人做过掷一枚均匀硬币的大量重复实验，结果出现正面的频率总是接近于$\frac{1}{2}$，在它附近摆动。其中当硬币掷至24000次时，出现正面12012次，其频率为0.5005。

一般地，如果一次试验中共有n种等可能出现的结果，其中事件A包含的结果有m种，那么事件A的概率$P(A)$是$\frac{m}{n}$。

等差数列的通项公式　若等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则这等差数列的通项

公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$。

等速螺线的极坐标方程

$$\rho=\rho_0+a\theta。$$

等比数列前n项和的公式 等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则它的前n项和为

$$当\ q\neq1\ 时，\quad S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$或\qquad S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}。$$

$$当q=1时\quad S_n=na_1。$$

等差数列前n项和的公式 等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则它的前n项和为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$或\qquad S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d。$$

集合 集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以也把它叫做不定义的概念或原始概念。集合理论的创始人康托尔称集合为一些确定的、不同的东西的总体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体。课本讲的可以理解为具有某种属性的一些确定的对象所组成的全体。集合简称集。例如实数的全体组成一个集合，直角三角形的全体组成一个集合，一年中有31天的月份组成一个集合等等。集合一般用大写英文字母A、B、C、… 来表示。

集合的元素 组成集合的每一个对象叫集合的元素，简称元。例如每一个实数都是实数集的一个元素。元素一般用小写英文字母a、b、c、…来表示。如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于集合A，记作$a\notin A$或$a\overline{\in}A$。

集合的相等 对于两个集合A与B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等，记作$A=B$，读作A等于B。例如，

$$A=\{x\,|\,x^2+3x+2=0\},$$

$$B=\{-1,-2\}，则A=B。$$

集合的运算律 （1）等幂律：

$$A\cap A=A，\ A\cup A=A；$$

（2）同一律：$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$；（3）互补律：$A\cap\overline{A}=\phi$，$A\cup\overline{A}=I$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{I}=\phi$，$\overline{\phi}=I$；（4）交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；（5）结合律：

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（6）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；（7）吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$，

$A\cup(A\cap B)=A$，

（8）反演律（摩根律）：

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

集合的表示法 （1）列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法。例如，由数1，2，3，4，5组成的集合，可以表示为$\{1,2,3,4,5\}$。（2）描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法。例如，由不等式

$x-3>2$ 的解组成的集合，可以表示为 $\{x|x-3>2\}$、$\{x: x-3>2\}$ 或 $\{x; x-3>2\}$。

集合元素的性质　（1）确定性。设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立，例如，"著名的科学家"，"好心的人"这类对象，一般不能构成数学意义上的集合，因为找不到用以判别每一具体对象是否属于集合的明确标准。而某学校全体学生组成的集合，便具有集合概念的确定性，因为可以准确地判断一个学生是否属于这个集合。（2）互异性。一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体（或对象）。因此，同一集合中不应该重复出现同一元素。例如集合 $\{1,1,2\}$，由于其中出现了重复的元素，所以不能作为集合的正确表示，应把它写成集合 $\{1,2\}$。（3）无序性。在一个给定的集合中的元素不考虑其顺序。对元素相同而仅是元素排列顺序不同的集合，认为是相同的集合。例如，$A=\{1,3,2\}=\{2,1,3\}$。

集合包含关系的性质　（1）对于任何集合 A，都有 $A\subseteq A$。（2）对于任何集合 A，都有 $\phi\subseteq A$　（3）

$$A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C,$$
$$A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C。$$

焦点半径　圆锥曲线上一点和焦点连成的线段。焦点半径，也叫做焦半径。

循环节　循环小数中依次重复出现的一个或几个数字。例如，在5.4666中的6，以及0.8103103103……中的103等都是循环节。

循环点　循环小数简写的标记。为了书写方便，一个循环小数只写出不循环部分和循环部分的第一个循环节，并在这个循环节的最左和最右的数字上方各记一个点，这个点称作循环点。例如，$1.333\cdots\cdots=1.\dot{3}$；$25.6209209\cdots\cdots=25.6\dot{2}0\dot{9}$ 等。

循环小数　小数部分从某位起，都是由一个或几个数字依一定顺序重复出现的无限小数。例如，1.333……；23.108108108……；47.238585……等等。

循环周期　循环小数的循环周期的位数。例如，0.666……的循环周期是1；8.203203……的循环节是3。

普通方程　见参数方程。

割线　直线与圆有两个公共点时，该直线叫做圆的割线。该定义对其他曲线也适用，即和曲线有两个（或两个以上）公共点的直线叫做曲线的割线。

幂　n 个 a 相乘的积称做"a 的 n 次幂"，或"a 的 n 次乘方"，记作 a^n。a 是底数，n 是指数。中学课本分别讲述了 n 是分数、负数、零的情况。n 也可以是任意实数和复数。幂早为古人所知，并已应用于几何计算及出现在二次和高次方程中。巴比伦人已经有了平方和幂的表。他们已经知道如何用2的幂来解实际问题。在亚力山大的欧几里得《原本》（公元前四世纪）中人们发现有 $(a+b)^2$ 的公式。幂的概念可以追溯到希腊数学家希波克拉底（Hippocrates，公元前五世

纪）。后来幂的运用更加频繁，例如，柏拉图(Plato, 公元前427～347年）就用得很多。开始时只想到二次幂。据信波伦亚（意大利城市）的邦别利（Bombell）是第一个使用Potenza（拉丁文 Potentia,幂,能力,才能的意思）这个词的人。他还用这个词表示过未知数的平方；现在用的幂概念的一般意义是近代才有的。我们用的幂的表示法差不多要回溯到笛卡尔时代。但是他只用来表示大于2的整数指数，他仍然将a的平方写成$a\times a$。在尼古拉·奥莱斯姆(Nicole Oresme, 1323～1382年）的著作中可以找到分数幂的计算的一些定理。

幂函数 函数$y=x^n$叫做幂函数，其中x是自变量，n是常数。例如，$y=x^2$，$y=x^{-3}$，$y=x^{\sqrt{2}}$都是幂函数。当n为有理数时，函数$y=x^n$称为有理指数幂函数。在中学阶段，只研究有理指数幂函数。

幂的乘方法则 底数不变，指数相乘，即$(a^m)^n=a^{mn}(a>0, m、n\in R)$。

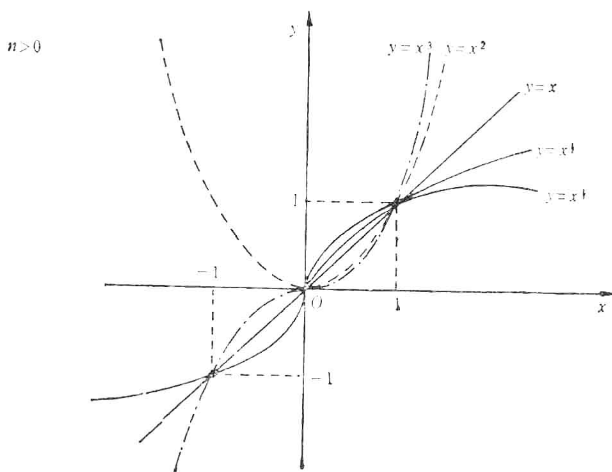
幂函数的导数 一般地当α为任意实数时，$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$。其证明过程是：

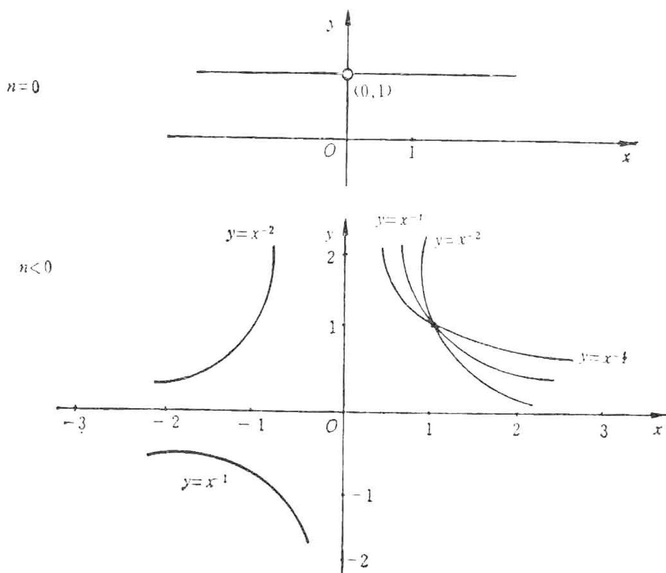
当α为任意实数时，只考虑$x>0$，这时，$x^\alpha=(e^{\ln x})^\alpha=e^{\alpha\ln x}$，

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'$$

$$=e^{\alpha\ln x}\alpha\frac{1}{x}=x^\alpha\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$。这就是幂函数的导数公式。

幂函数的图象和性质 幂函数$y=x^n$（n为有理数）的图象如图所示。





摆动数列　如果一个数列从第二项起每一项有时比前面一项大，有时比前面一项小，那么这个数列叫做摆动数列。

概率独立的性质　(1) 如果 $P(A)=P(A|B)$ 和 $P(B)=P(B|A)$ 中有一式成立，则另一式也成立。(2) 如果事件 A 和 B 相互独立，则事件 A 和 $\overline{B}$ 也相互独立。

概率的意义及性质　随机事件 A 有确定的概率 P，就用式子 $P(A)=P$ 来表示它，其中记号 $P(A)$ 表示"随机事件 A 的概率"，这里 P 是一个数值。如果 A 表示"一粒种籽发芽"这一事件，那么发芽率为0.9就可写成 $P\{A\}=0.9$。但须注意，这是从"大量次数的试验"的角度来解释这个式子的。实际上，一粒种籽试验下来，不是"发芽"就是"不发芽"，这粒种籽不会是有90%发芽，10%不发芽，而是通过大量次数的试验，认识这批种籽的总体有90%能发芽。因此，对一粒种子发芽可能性的认识，是通过对一批种籽进行考察获得的。如一粒种籽发芽的概率是0.9，实际上既反映了这一批种籽的情况，也为认识其中每一粒种子的发芽可能性提供了基础。

在大量重复试验下，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 是稳定的，它总是在某一个常数 P 附近摆动，而与 P 有显著差异的情况是罕见的（这里 n 是总的试验次数，它必须相当大；m 是在 n 次试验中事件 A 发生的次数）。这个数 P 称为事件 A 的概率。概率这个概念是客观存在的统计规律在人们头脑中的反映，且能够在人们认识世界和改造世界的活动中发挥作用。

从概率的统计定义中，可以归纳出概率的几个性质：（1）由于把概率理解为频率$\frac{m}{n}$（这里n很大，$0\leqslant m\leqslant n$）的稳定值，所以任何事件A的概率$P(A)$总是介于0与1之间，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。（2）必然事件$v$的概率等于1，即$P(v)=1$；不可能事件$V$的概率等于零，即$P(V)=0$。应当注意的是：当某一事件的概率和0非常接近时，这个事件在大量次数的试验中出现的频率非常小。这样的事件称为小概率事件。小概率事件虽不是不可能，但在一次试验中出现的可能性很小，通常认为在一次试验中，小概率事件几乎不会发生。

零　整数的重要成员。它在计量单位中一般表示"没有"。此外，它还表示某些数量的界限、数位、精确度等等。例如，在数轴上，它是正数和负数的分界；在摄氏温度计上，它是零上温度和零下温度的分界。零度不是没有温度，而是水结冰的温度。在中国数字中零记为"〇"，在阿拉伯数字中零记为"0"。符号"0"起源于印度，后来传入阿拉伯，又从阿拉伯传入欧洲。中国古时本没有"0"这个数码，而用"不写"或"空位"的办法解决。例如，南宋（公元1127—1279年）蔡沈所著的《律吕新书》中把118098记作"十一万八千□九十八"，而把104976记作"十□万四千九百七十六"。可见，当时是用"□"来表示空位的。后来，为了书写方便，将□顺笔改作0形；而成为表示"零"的数码。十三世纪四十年代，南宋数学家李冶在河北，秦九韶在浙江，在他们的著作中不约而同地使用"0"表示数字的空位。这说明"0"作为一个数码被采用，是公元1240年以前的事。

零向量　模为零的向量（它的方向是任意的）。规定所有的零向量都相等。

零指数　任何不等于零的实数的零次幂都等于1，即$a^0=1\ (a\neq 0)$。

频率　（1）对400粒油菜籽进行发芽试验，结果有391粒发芽，这批种子中，发芽种籽占的比例（通常称为这批种籽的发芽率）为

$$\frac{\text{发芽粒数}}{\text{试验种籽总粒数}}=\frac{391}{400}\approx 0.98。$$

（2）200只集成电路使用2000小时后，有5只不能继续使用，能继续工作的集成电路占的比例，可看成是这批集成电路使用2000小时的可靠程度。这个比例为

$$\frac{\text{能继续工作的只数}2000-5}{\text{总只数}2000}$$

$$=\frac{1995}{2000}\approx 0.98。$$

从这两例可以抽象出概率统计中的频率概念：在n次试验结果中，产生某种结果有m次，那么出现这种结果的频率是

$$\text{频率}=\frac{m}{n}。$$

根据频率的含义，频率总不会大于1，也不会小于零，即

$$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1。$$

频数　在对统计数据进行分组处理时，对于每个小组内的数据进行累计，

在各个小组内数据的个数称做每个小组的频数。每一小组的频数与样本容量的比值称做这个小组的频率。由分组、频率累计、频数、频率组成的数表称做频率分布表。

频率分布表　见频数

频率的稳定性　频率的稳定性是随机事件的一个极重要的特性。在少数次的试验中，事件发生的频率有较大的波动，但在多数次试验中，事件发生的频率虽然仍有微小的波动，却总是稳定在某一固定常数附近。随机事件具有"既可发生又可能不发生"的情形，人们却能够而且必须认识一个随机事件发生的可能性有多大程度。若我们仅停留在"随机事件可能发生也可能不发生"这一点上，就无法达到认识世界和改造世界的目的。因此，揭示某一随机事件发生的可能性有多大，是概率统计的基本问题。一个随机事件发生的可能性大小，是随机事件本身所固有的。但这个可能性的大小，又是可以根据人们的实践加以认识的。正是频率的稳定性，对事件发生的可能性大小提供了可以比较的依据。在大数次的试验中，一种结果发生的频率高，就自然地以这种结果为内容的事件发生的可能性就大些。如果油菜籽发芽的频率为0.9，就是说，任取一粒油菜籽"发芽"就有90%的可能性。因此，就拿频率所靠近的那个固定常数作为衡量事件发生的可能性大小的尺度，这个数称为概率。

频率分布直方图　用样本分组界值做为横坐标，以频率与组距的比值做为纵坐标，做出的统计图表。

置换问题　在解题过程中，需要将两个未知数中的一个暂时看作另一个，然后再根据题中的条件进行调整而最后求出结果的一类应用题。例如，购买4分、8分邮票共100张，价值6.8元。问4分、8分邮票各多少张？解题过程中，可假设买的邮票全是8分的，于是总值应是 $0.08\times100=8$（元）。但实际花6.8元，$8-6.8=1.2$（元）是多算的。这是由于把4分邮票当8分邮票而产生的。于是可求出4分邮票的张数 $(0.08\times100-6.8)\div(0.08-0.04)=30$（张）。$100-30=70$（张），即为8分邮票张数。显然，也可假设所买邮票全为4分的，由此可得8分邮票张数为
$(6.8-0.04\times100)\div(0.08-0.04)=70$（张）。

简单连分数　形如

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

的连分数。其中 a_0 是整数，a_1，a_2，a_3，……是正整数。

简单应用题　能用一步运算解答的应用题。如加法简单应用题，减法简单应用题，乘法简单应用题，除法简单应用题等。

简化二次方程　见一元二次方程

简单分数应用题　通过一步运算可解决的分数应用题。有三种基本类型：（1）求一个数是另一个数的几分之几？其基本数量关系是：一个数÷另一个数=几分之几。（2）求一个数的几分之几是多少？其基本数量关系

是：一个数×几分之几＝“是多少”。

（3）已知一个数的几分之几是多少，求这个数。其基本数量关系是：“是多少”÷几分之几＝这个数。

微积分 数学的一门分科。它是微分学和积分学的总称，是研究函数的微分和积分的性质及应用的一门学科。

微积分成为一门学科是十七世纪的事，但是微分和积分的思想古代就已经产生了。例如，我国的庄周（约公元前369—公元前286年）所著的《庄子》一书的“天下篇中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”三国时代的刘徽，在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这些都典型的极限思想。又如，公元前三世纪希腊的阿基米得（公元前287—公元前212年）在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠的面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积时，已隐含着积分学的思想。

十六、十七世纪，由于航海、天文学、力学等发展的需要，有四类科学问题需要解决：第一类，求即时速度问题；第二类，求曲线的切线问题；第三类，求函数的最大值和最小值问题；第四类，求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力。十七世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国的牛顿和德国的莱布尼茨分别从力学和几何学出发研究和完成了微积分学的创立工作。

微积分研究的对象和特点 微积分是由微分学积分学两大部分组成的。微分学主要包括导数、微分以及它们的应用。积分学主要包括不定积分、定积分及其应用。微积分属于高等数学的范畴，它与以前所学过的代数、几何、三角等初等数学不同，初等数学研究的对象主要是不变的量(即常量)和不变的图形，而微积分研究的对象则是变化的量和变化的图形。微积分的理论基础和研究工具是极限，它是在代数法、解析法和几何法密切结合的基础上发展起来的。微积分的应用是极为广泛的，它是进一步学习自然科学和社会科学，以及掌握现代生产技术所必备的基础知识。

微积分基本公式——牛顿，莱布尼兹公式 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，$F(x)$是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

或 $$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

这就是微积分的基本公式或称牛顿——莱布尼兹公式。

解比例 在有关比例的问题中，已知它的三个项，求另一个未知项的过程。

解方程 求方程的解的过程。

解三角形 由三角形中已知的边和角，计算未知的边或角的过程。

解不等式 求不等式解集的过程。

解方程组 见方程组。

解析几何 解析几何是用代数方法研究几何问题的一门数学学科。它是在

坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线，通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质。平面解析几何研究的主要问题是：（1）根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；（2）通过方程，研究平面曲线的性质。1637年著名的法国数学家笛卡尔发表了著作《几何学》，在这本书里奠定了解析几何的基础，从此变量引入了数学，对数学的发展，特别是对微积分的出现起了促进作用。恩格斯对笛卡尔的这一发现给予了高度的评价。解析几何的研究方法在进一步学习数学、物理和其他科学技术中都有广泛的应用。

解三角方程　求出三角方程的解集的过程叫做解三角方程。

解应用题的一般步骤　（1）理解题意，弄清条件和问题。（2）分析条件与问题之间的数量关系，找出解题途径。（3）拟定解题计划，列出算式，并算出结果。（4）检查解题过程是否合理，计算结果是否正确，结果与题意是否相符，并写出答案。

数　数学上最基本的概念之一。数的概念是人类在生产和生活实践中逐渐形成和发展起来的。最初，由于计量的需要，形成了自然数，即正整数的概念。以后，随着生产的发展，引入了正分数；为了表示具有相反意义的量，引入了负数概念（包括负整数和负分数）；为了给出量与量比值的精确表示，例如，正方形对角线与边长之比，引入了无理数概念；由于解二次和三次方程的需要，引入了虚数概念。在数学中，正数、负数和零统称有理数；无理数和有理数统称实数；实数和虚数统称复数。

我国古代《九章算术》中，已出负数概念，并有了正负数的加减运算法则，十三世纪中，又有了正负数相乘的法则。欧洲古代解方程时也遇到了负数，但到十七世纪才正式建立负数的四则运算。

数列　按一定次序排列的一列数。数列中的每一个数都叫做数列的项，各项依次叫做这个数列的第1项（或首项），第2项，…，第n项，…。数列又可以看作一个定义域为自然数集N（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$）的函数（当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值）。

数位　一个数的每一个数字所占的位置。如个位、十位、百位……都是数位。例如，3587这个数中，7在个位，8在十位，5在百位，3在千位。

数字　用来记数的符号，数字也叫数码。常见的有中国数字，阿拉伯数字，罗马数字等。

数学　研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。早在人类文化的初期，由于生产和生活实践的需要，人类就获得了数和一些简单几何形体的概念，并逐步积累了一些数学知识。到十六世纪，包括算术、初等代数、初等几何和三角的初等数学已大体上完备了。十七世纪，随着生产力的不断发展，数学从常量数学发展到变量数学。由于生产力的进一步发展和数学科学自身的发展，使得数学研究的范围不断扩大，内容日益丰富。从内容上说，现代的数学习惯上分为数理逻辑、数论、代数学、几何学、拓扑学、

函数论、泛函分析、微分方程、概率论和数理统计、计算数学等分支，同时，也产生了一些边缘性学科，如运筹学、控制论等。数学科学具有高度的抽象性、广泛的应用性和严谨的逻辑性。它是学习现代科学技术和生产实践的重要基础和必要工具。

中小学数学是中小学生学习的主要学科之一。小学数学主要包括传统的算术知识、代数初步知识、几何初步知识，并适当渗透集合、函数、统计等一些现代数学思想。中学数学主要包括初等代数、平面初等几何、立体几何、三角、平面解析几何、集合论初步、微积分初步和概率统计初步等。

数轴　规定了原点、正方向和单位长度的直线。数轴上的点和实数一一对应。数轴的引进是数形结合的基础，同时为引进直角坐标系作好了准备。

数集　元素为数的集合叫做数集。例如，{奇数}，$\{x|-1<x<3\}$ 都是数集。

数字值　数字本身所表示的值。例如，数字3，不论它在哪个数位上，其本身的值都是3。

数列的项　见数列

数的分布　按照国际习惯，在书写多位数时，从个位起，每三位作为一节，并用分节号“，”把它们隔开。例如，83,579,210,000就是一个用分节号书写的多位数。分节书写后会给读数带来些方便，其口诀是：“十亿、百万、千，都在节号前“或”二节万在中，三节亿当头。”

数的分级　根据我国的读数和记数习惯，在数位顺序表中，从右到左每四位分一级。个位、十位、百位、千位组成个级，表示多少个一；万位、十万位、百万位、千万位组成万级，表示多少个万；亿位、十亿位、百亿位、千亿位组成亿级，表示多少个亿；从第十三位起，兆位、十兆位、百兆位、千兆位组成兆级，表示多少个兆。但有些国家，把计数单位每三位分为一级。个位、十位、百位为第一级，千位、十千位、百千位为第二级，密、十密、百密为第三级，别、十别、百别为第四级等。

数目恒等式　不含字母的等式。例如，$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$。

数位顺序表　按照从右至左的顺序排列成的数位表。整数的数位顺序表为

……	千亿位	百亿位	十亿位	亿位	千万位	百万位	十万位	万位	千位	百位	十位	个位
……	亿级				万级				个级			

数列极限定义　对于数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数A，无论予先指定多么小的正数ε，都能在数列中找到一项a_N，使得这一项后面的所有项与A的差的绝对值都小于ε，就把常数A称作数列$\{a_n\}$的极限，并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。这个定义还可用精确的数学语言

定义为：对于任意小的正数 ε，如果总存在正整数N，当$n>N$时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 总能成立，则数列$\{a_n\}$的极限为A，并记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

数列的通项公式　如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间的函数关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式。

数列极限的运算法则　如果两个数列都有极限，那么，这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商（各项作为除数的数列的极限不能为零）。即

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，

那么，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$；

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0).$$

特别地，如果C是常数，那么，

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}C\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=C\cdot A$$

数列前n项和的公式　数列前n项和的表示式。常见的一些数列的前n项和的公式有：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}.$$

$$1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

$$1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n=\begin{cases}\frac{1}{2}(n+1),n\text{为奇数},\\-\frac{n}{2},n\text{为偶数}.\end{cases}$$

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}。$$

$$1^3-2^3+3^3-\cdots+(-1)^{n-1}n^3=\begin{cases}\frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2，n\text{为奇数，}\\ -\frac{1}{4}n^2(2n+3)，n\text{为偶数。}\end{cases}$$

$$1^4-2^4+3^4-\cdots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$$

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)。$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}。$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)。$$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}。$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}。$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}。$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}。$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}。$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots$$
$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}。$$

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{2n+1}{2(2n+2)}.$$

$$(a+d)q+(a+2d)q^2+\cdots+[a+(n-1)d]q^{n-1}$$

$$=\frac{a-[a+(n-1)d]q^n}{1-q}+\frac{dq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}\ (q\neq1).$$

数轴上两点间的距离　若数轴上A，B两点的坐标分别为x_A，x_B，则A，B两点间的距离$AB=|x_B-x_A|$。

数列极限定义的几何意义　把常数A及数列$\{a_n\}$的各项a_1，a_2，a_3，…a_n…在数轴上用它们的对应点表示出来，再在同一数轴上把$A-\varepsilon$和$A+\varepsilon$也表示出来。因为不等式$|a_n-A|<\varepsilon$相当于不等式$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$，所以，当$n>N$时，对应数列$\{a_n\}$的各项$a_{N+1}$，$a_{N+2}$，$a_{N+3}$…所表示的点，都落在开区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内（如图1），而落在这个小区间之外的最多有$N$个有限点。由此可见，如果数列$\{a_n\}$以$A$为极限，则在数轴上的各对应点$a_n$将聚集在点$A$的左右近旁。

在平面直角坐标系中，$y=A$，$y=A+\varepsilon$，$y=A-\varepsilon$。都是平行于x轴的直线，而由$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$形成一条形区域。当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$的几何意义是平面各点(n,a_n)进入以$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$组成的条形区域中，并且无限的密集于$y=A$这条直线的附近（如图2）

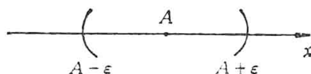


图1

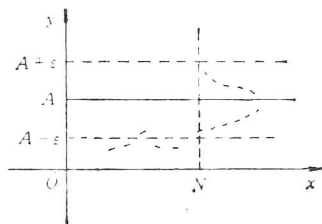


图2

但应注意，定义中$|a_n-A|<\varepsilon$的绝对值符号是不能去掉的。因为绝对值不等式$|a_n-A|<\varepsilon$相当于不等式$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$，它表示在项$a_N$之后的各项$a_n$比$A-\varepsilon$大而比$A+\varepsilon$小，

即是a_n可以从大于A和小于A（两个不同的方向无限接近于A(如图3)。如果将绝对值符号去掉，写成$a_n-A<\varepsilon$，即$a_n<A+\varepsilon$，它只表示a_n是从大于A的方向无限接近于A，丢失了a_n从小于A的方向无限接近于A的情况。从数列极限定义知道，如果常数A是这个数列的极限，就必须在某项a_N之后，数列的所有各项无限趋于A，而不是某项a_N之后的某几项趋近于A。如果一个数列的极限是A，它就不能同时又有与数A不同的另一个极限，这就是说，极限存在具有唯一性。如果数列$\{a_n\}$的极限是A，那么在某项a_N之后的所有项都无限趋近于A，所以，当去掉所有偶数项后（或去掉所有奇数项之后），余下的所有奇数项（或偶数项）仍无限趋近于A，则这个数列的极限不变仍是A。

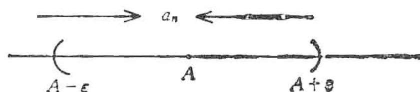


图3

数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$的和数列、差数列、积数列和商数列 如果有数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…与数列b_1，b_2，b_3，…，b_n，…，那么这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的各个新数列，分别叫做数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的和数列$\{a_n+b_n\}$，差数列$\{a_n-b_n\}$，积数列$\{a_nb_n\}$，商数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n\neq0)$，即是

$\{a_n+b_n\}$：a_1+b_1，a_2+b_2，…，a_n+b_n，…；

$\{a_n-b_n\}$：a_1-b_1，a_2-b_2，…，a_n-b_n，…；

$\{a_nb_n\}$：a_1b_1，a_2b_2，…，a_nb_n，…；

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b\neq0)$：$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，…，$\frac{a_n}{b_n}$，…。

数列极限运算法则

法则1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=A+B。$$

法则2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=A-B。$$

法则3 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=A\cdot B。$$

法则4 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B(B\neq0)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}。$$

截距 见一次函数的图象

辗转相除法 设 $a>b$，若 $b|a$，则 $(a, b)=b$；若b不能整除a，有余数r_1，则$(a,b)=(b,r_1)$；若 $r_1|b$，则 $(b,r_1)=r_1$；若r_1不能整除b，有余数r_2，则 $(b,r_1)=(r_1,r_2)$。依次除下去，余数逐渐变小 $(b>r_1>r_2>\cdots\cdots>r_n)$，必能得到一个 $r_n=0$，这时 $r_{n-1}|r_{n-2}$，$(r_{n-2}, r_{n-1})=r_{n-1}$。由此得出 $(a, b)=(b,r_1)=(r_1, r_2)=\cdots\cdots=(r_{n-2}, r_{n-1})=r_{n-1}$。这种辗转做除法的方法，称为辗转相除法。具体应用此法求最大公约数时，常写成如下的简便形式。例如，求 (8778, 3724)。

2	3724	8778	2
	2660	7448	
4	1064	1330	1
	1064	1064	
	0	266	

所以，(8778, 3724) =266。

算术 数学中最基础与最初等的部分。它是数学的一个分支，其内容包括自然数、零、正分数和它们在加、减、乘、除、乘方、开方运算下产生的数的性质、运算法则，以及这些性质、法则在实践中的应用。算术进一步发展成为代数学和数论。我国的小学数学原来就叫算术。后来，因为小学数学中除算术的内容外，还渗透了集合、函数、代数以及几何的一些初步思想和知识，故将小学算术改为小学数学。

在我国，“算术”一词正式使用于《九章算术》一书中。由于《九章算术》中还包括“方程”等知识，可见“算术”是泛指当时数学的全体，与现今的意义不同。

“算”的古体字之一是“筭”。“筭”是指一种竹制的计算器具。筭字下面的“弄”字，表示计算之事并非容易，需“常弄而不误”。摆弄这套“筭”（算）需要一定的技术，于是它就叫“算术”。既然“算”字的含义包括了当时一切与计算有关的数学内容，那么，作为计算技术的“算术”就是泛指当时的全部数学。

在西方，“算术”一词在相当长的一段时间里，也是作为数学总体的身份出现的。但随着各数学分支的不断出现，彼此的特征日见明显，“算术”也就失去了作为整个数学统称的资格。

自十九世纪起，西方一些数学学科，包括代数、三角、解析几何、微积分、概率论等相继传入中国。我国古代的“算术”一词也已无法作为数学的统称。1935年，中国数学会成立数学名词审查委员会，对当时使用的数学名词逐一进行审查，确立起“算术”现在的意义。

算式 用运算符号和顺序符号把若干个数联接起来组成的式子。例如，$235\div(198+232)\times3$，就是用运算符号＋、×、÷和顺序符号小括号（ ）联接235、198、232、3这四个数组成的式子，这就构成了一个算式。

算盘 实施珠算的工具。详见珠算。

算术平方根 正数a的正的平方根。用符号“$\sqrt{a}$”表示。零的算术平方根是零。

算术平均数 如果a_1，a_2，…，$a_n \in R^+$，且$n>1$，那么，$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，叫做这$n$个正数的算术平均数。

算术平均值与几何平均值不等式 设a_1，a_2，…，a_n均为正数，则它们的几何平均值不超过它们的算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}。$$

等号只当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

精确度 一个近似数的精确程度。例如，近似数7.3的精确度为0.1，近似数9.25的精确度为0.01。

缩小 是对原数量而言的。是在原来数量的基础上由大变小。在应用题中，常有“缩小到”、“缩小了”、“缩小几倍”、“缩小几分之一”等词语。它们虽都是缩小的意思，但具体应用是有区别的。“缩小了”是指缩小的部分；“缩小到”是指缩小后的结果；“缩小几倍”表示除以几；“缩小几分之一”表示用几去除这个数所得的商。

缩小比例尺 比的前项是1的比例尺。例如，1∶1000，表示图上距离比实际距离缩小了1000倍。

增根 在方程变形时，有时可能产生不适合原方程的根，这种根称做原方程的增根。产生增根的原因是方程变形时破坏了同解性。一般是因为方程的两边同乘以含有未知数的整式，或方程两边同时乘方的结果。初中代数第二、三册分别讲述了在解分式方程和无理方程时可能产生增根。因此，在解分式方程和无理方程等，都需要验根。

增长率 反映某社会现象增长程度的指标，具体指标数是增长数与原来基数的百分率，即

$$增长率=\frac{增长数}{原来基数}\times 100\%。$$

增加了 指对原来基数的增加部分。与它相同的说法有“增长”、“增加”、“多了”、“多”等。

增加到 指在原来基数的基础上加上增长数以后所得的和数。与它相同的说法有“达到”、“增长为”等。

增加几倍 指增加后的数是原来数的$(n+1)$倍。

整式 见有理整式。

整除 整数a除以整数b，$(b\neq 0)$，若能得到整数商q，使得$bq=a$，则叫做a能被b整除，或b能整除a。记作$b|a$或$a\vdots b$。

整数 正整数（自然数）、零和负整数。在小学数学里整数只包括自然数和零。

整数比 比的前项和后项都是整数的比。

整式方程 分母中不含未知数的方程。

整标函数 定义域在整数集上的一类函数。在中学数学中所学的数列，就是这类函数中的一种函数。这是因为数列是定义在自然数集上的函数，而自然数集是整数集的子集，所以数列是整标函数中的一种函数，并记作$a_n=f(n)$，$(n=1,2,3,\cdots)$。其中数列的项数n为自变量，项a_n为因变量，数列$\{a_n\}$中的每一项，都是它所在的项数的函数。这种函数的特点是，自变量仅取自然数，即定义域为

自然数。当自变量n从1开始依次取自然数时，相对应的一列函数值依次为$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，…，$f(n)$，…这一列函数值就组成了数列。应当注意，当n依自然数变化，即n从1开始依次变大时，对这种变化过程常用记号“$n\to\infty$”表示。符号“∞”是表示一种无限变大的“趋势”，不表示一个数，读作“无穷大”。而“$n\to\infty$”意义是由1开始无穷增大(无限变大)，读作“n趋于无穷大”。

整数化假分数　将一个整数k化为假分数，可根据需要选定一个正整数m作分母，然后用二者的乘积km作分子，所得的分数$\frac{km}{m}$即为所要化的假分数。例如，$3=\frac{3\times5}{5}=\frac{15}{5}$。若整数是负数，则性质符号放在分数的前面与分数线对齐。例如，

$$-7=-\frac{7\times3}{3}=-\frac{21}{3}。$$

整式的加减法则　先去括号，再合并同类项。

繁分式　分子或分母中有分式的分式。例如，

$$\frac{\frac{c}{b}}{a},\quad \frac{a}{\frac{1}{k}},\quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}。$$

繁分数　分子或分母是分数，或分子、分母都是分数的分数。例如，

$$\frac{\frac{2}{3}}{5},\quad \frac{5}{\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$$

等都是繁分数。在一个繁分数里，最长的分数，叫做繁分数的主分数线，简称主线。主线上、下的分数不论如何复杂，都分别是繁分数的分子和分母。

繁分数的化简方法　（1）先分别计算出其分子分母的结果，然后再用除法进行化简。例如，

$$\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\div\frac{4}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}。$$

（2）应用分数基本性质进行化简。例如，

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times4}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\times4}$$

$$=\frac{3+2}{3-2}=\frac{5}{1}=5。$$

第二部分

数学方法

一般化 数学中带有普遍性的一种思想方法。它是指从考虑一个对象或较少对象的集合过渡到考虑包含已给对象的更大集合的一种思想方法。例如，人们从锐角三角函数的考虑过渡到任意三角函数的考虑、从正三角形到正多边形、从一元函数到多元函数，等等，均属于一般化。

例 已知$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0$，求证等式左边的三个分式中，必有两个是互为相反的数。

分析 把等式左边的常量a用变量x去替代，则$f(x)=\frac{x-b}{1+bx}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-x}{1+cx}=0$ 即为原等式的一种一般化。对$f(x)$而言，$f(b)=f(c)=f(a)=0$，这说明a、b、c均为$f(x)=0$的根。但由于$f(x)$只可有两个根，故必须$a=b$或$b=c$或$a=c$。不论哪种情况发生，原等式左边的三个分式中，都必有一个为零。当然余下的两个便是互为相反的数了。

一般化是提出数学问题和解决数学问题的一个重要思想方法。有些问题，从一般化入手较易解决，这是因为，有些问题已经有了一般的公式和解决问题的一般性程序，如果给定的问题能被归结成这种一般形式，那么问题也就相应解决了；另一方面，把问题一般化之后，便于从普遍联系中发现规律，寻找到解决问题的关键之所在。而孤立地去看问题，便很难找到通往目的地的契机。一般化不仅在具体问题的解决中占有重要的地位，而且在数学的发展中也是一条基本的规律。数学中许多结果和结论都经历了一个由特殊到一般的发展过程。追求普遍性、一般性是数学的一大特点。譬如，由普通的勾股定理，沿着一般化的道路，可以发展到三维空间的相应命题，发展到n维有限空间的相应命题以至无限维希尔伯特空间的某些概念及论断等。一般化的角度不是唯一的，其具有多向性，它使得数学发展丰富多彩；同时，一般化的道路也不是平坦的，其具有曲折性，它使得数学发展具有程度性、相继性或历史性等特点。在运用一般化解题时，宜尽量选择最佳方向，并适当掌握好一般化程度。

二分法　有如下几种含义：

（1）是逻辑划分的一种方法。见逻辑划分方法。

（2）是利用中值定理计算实函数实根的简单方法。欲求方程$f(x)=0$的根，其具体步骤为：

设函数 $f(x)$ 在区间〔a_0，b_0〕上满足条件$f(a_0)\cdot f(b_0)<0$，取〔a_0，b_0〕的二等分点 $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$，计算$f(x_0)$的值，若$f(x_0)=0$，则x_0就是方程的解，若$f(x_0)\cdot f(a_0)<0$，取$a_1=a_0$，$b_1=x_0$ 作为新区间的端点。若$f(x_0)f(b_0)<0$，取$a_1=x_0$，$b_1=b_0$作为新区间的端点。取〔a_1，b_1〕的二等分点 $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$，计算 $f(x_1)$ 的值。重复上述步骤以确定新区间〔a_2，b_2〕，如此继续下去，则得到区间序列〔a_k，b_k〕，$k=0$，1，2，…，它满足$f(a_k)f(b_k)<0$，且有 $b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b_0-a_0)$。当 b_k-a_k 达到所要求的精度时，则取$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$作为方程$f(x)=0$的解，这时，其误差不超过$\frac{1}{2^{k+1}}(b_0-a_0)$。

（3）又称对分法。是单因素优选法的一种方法。其含义是：每个试验点取在试验范围的中点，将试验范围平分为两半，每试验一次可缩小原试验范围的一半，这样取舍，试验，比较，再取舍，直到达到满意结果为止。

例　某种产品依靠某种贵重金属。已知采用15％的贵重金属生产出来的产品质量合格。这种贵重金属可否再减少些？

可采用平分法进行试验。取其试验范围的中点8％进行试验，如果合格，去掉右边一半，然后再在剩下的范围〔0，8〕内，取其中点4％进行试验。如果不合格，去掉左边的一半，然后在剩下的范围〔4，8〕内，取其中点6％进行试验。如果合格，去掉右边的一半，然后在剩下的范围〔4，6〕内，取其中点5％进行试验，仍然合格。为了留有余地，可取6％的贵重金属进行生产。这样保证产品质量的条件下，降低了生产成本。

这种方法适用于每作一次试验就可以判断试验好坏，从而可决定取舍的那种情况。这种方法较其他方法简单且易掌握，试验次数又最少。

二重归纳法　见数学归纳法。

十字相乘法　见分解因式的方法。

几何平均　对一组数取平均的一种方法。其具体步骤是：设有n个数 x_1，x_2，…，x_n，把这n个数连乘起来，再对所得的结果取n次方根，记为$\overline{xg}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$或$\lg\overline{xg}=\frac{1}{n}(\lg x_1+\lg x_2+\cdots+\lg x_n)$。在测量中，当对一组观测值$\{x_i\}$（$i=1$，2，…，$n$）取常用对数$\{\lg x_i\}$所得的分布曲线与$\{x_i\}$比较更为对称时，常用此法。

几何直观　借助于几何图形启迪思维，发现数学规律的一种方法。图解法、图象法都属于几何直观的方法。几何直观是理解数学、研究数学的一

个有效工具，是解决数学问题的有力手段。它在数学研究以及整个科学研究中有着广泛的应用。著名的法国数学家阿达马曾就这个问题对于数学家作了研究，他的结论是：大多数老一辈数学家是借助于模糊图象进行思考的。著名的英国物理学家狄拉克在回忆他的创造过程时说："在我的研究工作中，我一直运用投影几何的观念。如果你要发现一个特定的量在洛伦兹变换下是怎样变换的，那么处理这个问题经常用的最好的办法是从投影几何的观点出发。"有时某些科学思想和新的学科处于模糊胚芽状态，使人们看不清它的面貌，几何直观往往可以帮助人们看清科学的生长点。在科学史上两个典型的例子，就是虚数概念的引入和非欧几何的建立。最初人们在解方程中出现了一个－1开平方的问题，认为这是一个虚无缥缈的东西，因此就称为"虚数"。到18世纪末与19世纪初，数学家给出了虚数的几何表示之后，虚数就容易被人们理解和接受了。最初建立的非欧几何也不被人理解。1868年意大利数学家贝尔特拉米建立了伪球面，它可以解释成罗氏几何中一个平面的一部分，这就为罗氏几何提供了一个直观背景，它使人们不再感觉非欧几何是神秘莫测的了。

几何图形法　简称图形法。是将代数、三角等数量关系的问题转化为几何图形的问题处理的一种化归方法。根据转化的方式不同又分为图解法和图象法。

例　设x，y，$z\in R$，且

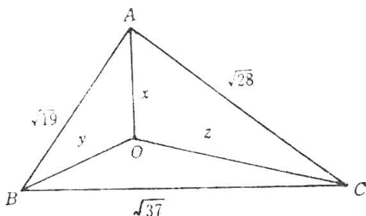
$$x^2+xy+y^2=19,$$
$$y^2+yz+z^2=37,$$
$$z^2+zx+x^2=28,$$

求　$xy+yz+zx$　的值。

分析　从问题的性质来看，这是一个代数问题，但仔细考察三个代数方程的特征，联系到余弦定理可以将其视作三角形的三边关系的表达式，把三个方程变形为

$$x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=(\sqrt{19})^2,$$
$$y^2+z^2-2yz\cos120^\circ=(\sqrt{37})^2,$$
$$z^2+x^2-2zx\cos120^\circ=(\sqrt{28})^2。$$

这样一来，就可以作出如图所示的几



何图形。由图形可知，大三角形ABC的面积等于三个小三角形面积之和，即有

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}\text{。}\qquad①$$

由三角形面积公式有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{28\times19-\left(\frac{28+19-37}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}xy\cdot\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}xy,$$

$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\cdot yz\cdot\sin120^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}yz,$$

$$S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}zx\cdot\sin120^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}zx。$$

将上各式代入①，经整理得

$$xy+yz+zx=26。$$

用图形法解题的关键在于根据具体问题有关数量关系给出恰当的几何解释，构造出所需要的几何图形，通过对几何图形的特征分析，以达到解决问题的目的。由于几何图形形象直观，因此对某些问题转化为几何图形问题，可以启迪思维，较快地找到解题思路。有些问题直接去解决过于复杂，但通过图形法求解可以大大简化推理或计算过程。

几何变换法　见初等几何变换法。

三角代换法　是换元法的一种形式。其具体含义是：在求解代数问题时，对其变量利用三角函数予以代换，从而使问题得到解决。

例　在实数系中解方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$。

解　要使原方程有解，显然必须 $x>1$。因此设 $x=\sec\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，代入原方程可得

$$\sec\theta+\frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}\theta}=\frac{35}{12},$$

即

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}=\frac{35}{12}。$$

两边平方，经整理得

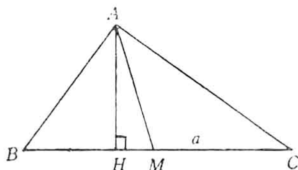
$$1225\sin^2 2\theta-576\sin2\theta-576=0。$$

解之得 $\sin2\theta=\frac{24}{25}$、$-\frac{24}{49}$。负值不合题意，舍去。故 $\cos2\theta=\pm\frac{7}{25}$，所以，$\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$。所以，$x_1=\frac{5}{4}$。$x_2=\frac{5}{3}$。经检验，$x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=\frac{5}{3}$ 都是原方程的解。

用三角代换解题需遵循如下原则：①要考虑到三角函数的定义域、值域和有关公式的性质；②要便于借助于已知三角公式，建立变量之间的内在联系。在解题实践中，遵照上述原则，根据具体的数学问题中的变量形式，选取恰当的三角代换。现将解题经验中根据问题的具体形式，一般选择的三角代换类型列表如下：

问 题 形 式	代 换 类 型
$\|x\|\leqslant 1$ $\|x\|\geqslant 1$ 任意x	$x=\sin\varphi$ 或 $\cos\varphi$ $x=\sec\varphi$ 或 $\csc\varphi$ $x=\mathrm{tg}\varphi$ 或 $\mathrm{ctg}\varphi$
$x+y=a\ (x,\ y,\ a\in R^+)$ $x-y=a\ (x,\ y,\ a\in R^+)$	$x=a\sin^2\varphi,\ y=a\cos^2\varphi$ $x=a\sec^2\varphi,\ y=a\mathrm{tg}^2\varphi$
$x^2+y^2=a^2$ $x^2-y^2=a^2$ $x^3+y^3=a^3\ (x,\ y,\ a\in R^+)$	$x=a\sin\varphi,\ y=a\cos\varphi$ $x=a\sec\varphi,\ y=a\mathrm{tg}\varphi$ $x=a\sin^{\frac{2}{3}}\varphi,\ y=a\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$
$x+y\leqslant 1\ (x,\ y\in R^+)$ $x+y\geqslant 1\ (x,\ y\in R^+)$	$x=r^2\sin^2\varphi,\ y=r^2\cos^2\varphi,\ \|r\|\leqslant 1$ $x=r^2\sin^2\varphi,\ y=r^2\cos^2\varphi,\ \|r\|\geqslant 1$
$x^2+y^2\leqslant 1$ $x^2+y^2\geqslant 1$	$x=r\sin\varphi,\ y=r\cos\varphi,\ \|r\|\leqslant 1$ $x=r\sin\varphi,\ y=r\cos\varphi,\ \|r\|\geqslant 1$
$\sqrt{1-x}$ $\sqrt{x^2+a^2}$ $\sqrt{x^2-a^2}$ $\sqrt{a^2-x^2}$	$x=\sin^2\varphi$ 或 $y=\cos^2\varphi$ $x=a\mathrm{tg}\varphi$ 或 $x=a\mathrm{ctg}\varphi$ $x=a\sec\varphi$ 或 $x=a\csc\varphi$ $x=a\sin\varphi$ 或 $x=a\cos\varphi$
$\frac{2x}{1-x^2}$，$\frac{2x}{1+x^2}$ 或 $\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x=\mathrm{tg}\varphi$ 或 $x=\mathrm{ctg}\varphi$
$x+y+z=xyz$	$x=\mathrm{tg}\alpha,\ y=\mathrm{tg}\beta,\ z=\mathrm{tg}\gamma$
$xy+yz+zx=1$	$x=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},\ y=\mathrm{tg}\frac{\beta}{2},\ z=\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$

三角形奠基法　作图的一种基本方法。它是利用首先画出的三角形为基础来解作图题的一种方法。例如，已知三角形的边 a，以及这边上的高 h_a 和中线 m_a，作此三角形。如图所示。假定 $\triangle ABC$ 已作出。由条件知 $R_t\triangle AHM$ 是确定的，以该三角形为基础，作出$BC=a$，则得 B、C 两点。连结AB、AC，就得到$\triangle ABC$。

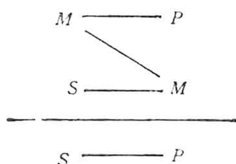


三角恒等变换法　恒等变换法的一种。它是利用三角恒等变换解决问题的方法。一个三角函数式用与它恒等的另一三角函数式代换，叫做三角恒等变换。进行三角恒等变换时，注意自变量的许可值集可能改变。

三段论推理　是间接演绎推理的一种形式。它是由两个包含着一个共同项的性质判断而推出一个新的性质判断的推理。三段论推理由三个性质判断所组成，两个是前提，一个是结论。

任何一个三段论都包含着三个项：小项、大项和中项。结论中的主项称为小项，记为 S。结论中的谓项称为大项，记为P。两个前提中所共有的而在结论中消失的项称为中项，记为M。在两个前提中，具有大项的前提叫大前提，具有小项的前提叫做小前题。

三段论的推理规则可表示为



例　任意三角形三内角之和为180°（大前提），直角三角形是三角形的一种（小前提），所以直角三角形三内角之和为180°（结论）。

性质判断的基本逻辑结构是“所有（有的）S 是（不是）P”。如果按“质”和“量”可分成下面四种：全称肯定判断，以A表示，其逻辑形式是“所有 S 都是 P”；全称否定判断，以E表示，其逻辑形式是“所有 S 都不是 P”；特称肯定判断，以 I 表示，其逻辑形式是“有的S是P”；特称否定判断，以O表示，其逻辑形式是“有的S不是P”。

由于三段论的大前提、小前提和结论的判断的质和量的不同就形成了各种不同形式的三段论形式。例如，在第一格中，如果大前提、小前提和结论都是全称肯定判断，便构成第一格的AAA式：

大前提：凡S皆是P，

小前提：凡M皆是S，

结论：凡M皆是P。

三段论共有四个格24种有效式。

在一个三段论中，由于大前提与小前提必须有一个概念是共同的，因此，三段论中三个判断只应包含三个概念。这是判断三段论推理是否正确的一个标准。如果在一个三段论推理中出现四个不同的概念，这个推理肯

定是错误的。

最早对三段论推理进行系统研究的是古希腊的亚里士多德。他总结了前人的逻辑思想并将其系统化，创立了形式逻辑（这个名称是由康德最先提出的，日后被普遍接受了）。亚里士多德对“S 是 P”之类的语句进行了详细的讨论，其逻辑论述汇集在《工具论》中，三段论逻辑是亚里士多德对数学的一个重要贡献。

万能置换法 是一种变量代换的方法。其含义是：利用万能代换公式处理数学问题。在三角中，根据二倍角公式，可以推出角 α 与 $\frac{1}{2}\alpha$ 相关的关系式，令 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$，可得

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}。$$

利用上述三个恒等式可把三角函数间的关系式转化为关于 t 的代数关系式。通常把这三个恒等式叫做万能代换公式，简称万能公式。

例 解方程 $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=1$。

解 设 $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，则原方程变为

$$\sqrt{3}\times\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=1。$$

即

$$\frac{2\sqrt{3}\,t-2t^2}{1+t^2}=0。$$

故 $t(t-\sqrt{3})=0$，解方程得 $t_1=0$，$t_1=\sqrt{3}$。当 $t_1=0$ 时，得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0$，所以 $\frac{\alpha_1}{2}=n\pi$，$\alpha_1=2n\pi$；当 $t_2=\sqrt{3}$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{\alpha_2}{2}=n\pi+\frac{\pi}{3}$，$\alpha_2=2n\pi+\frac{2}{3}\pi$。经检验得知原方程的解为 $\alpha_1=2n\pi$，$\alpha_2=2n\pi+\frac{2}{3}\pi$，$n\in Z$，其中 Z 表整数集。

万能置换法在求值、证明等式与不等式、解方程、解不等式、求点的轨迹、求极值等问题中均有重要作用。

已知与未知转化法 是由已知转化为未知，或者由未知转化为已知，以此达到解决问题目的的一种化归方法。

例 证明 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$。

分析 假设待证明的等式成立（这是由未知转化为已知）。为了证明两个已知量

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$，$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

之和为 4，可先把这两个已知转化为未知，即设

$$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}},$$

$$y=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}。$$

这也就是把两个已知数转化成另外一

种形式的两个已知数，而这两个新形式的已知经过简单的运算即得知其和为4。但这两个新形式下的已知目前暂不知道，它们都是待求的未知量。由于这是两个未知量x、y之和为4的二元一次方程，如果再能确定一个方程，那么这两个未知量就很易求出来。从两个未知之和容易联想到再通过两个未知量之积来确定一个新方程，即

$$xy=2。$$

于是由韦达定理知，这两个量是方程

$$z^2-4z+2=0$$

的两个根，解方程得$z_1=2+\sqrt{2}$，$z_2=2-\sqrt{2}$。即$x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$。于是$2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$，从而命题得证。

将已知转化为未知，是为了将已知转化为一种新形式下的已知。而暂时这种新形式的已知尚难确定，此时设为未知，再综合考察已知与未知之间的关系，从而较易解决某些问题。有时，在一个问题里已知量的形式较复杂，且出现的次数较多，这时可以考虑把这个已知量设为某一字母（未知量）。这种由已知转化为未知的目的在于使其表达形式简炼，能够明确显示出各量之间的联系，从而达到解决问题的目的。有些问题由未知转化为已知，从已知角度探索待求问题中各种量之间的关系。由于增加了已知的信息量，问题的解决相对来讲变得容易。

比较法　确定对象间的共同点和差异点的方法。客观事物既有联系又有区别，它们存在着共同点，也存在着差异点。这种存在于事物中的异同点，是人们运用比较法的客观依据。例如，对于“整数除法、分数和比”的比较，我们既要弄清它们之间的联系，又要看到它们之间的区别。三者之间的联系为

除法———分数———比
被除数——分子———前项
除数———分母———后项
商———分数值———比值

三者的区别为：“除法”是一种运算；“分数”表示一个数；“比”则表示两个数相除的一种关系。它们各自表示的意义不同。

在数学研究和教学中有各种不同类型的比较。如纵向比较和横向比较，同类比较和异类比较，形同实异比较和大同小异比较，直接比较和间接比较，数学模型与客观事物的比较，正反比较，正确与错误的比较，等等。纵向比较是比较同一对象在不同时期的变化的方法。通过这种比较可以使人们了解到数学发展的历史渊源和数学发展的规律性。例如，将不同历史时期的函数定义列举出来进行比较，就是一种纵向比较。横向比较是把不同对象在同一标准下进行比较的方法。例如，数学竞赛评选优劣，就是对在规定时间内作同样答卷的参赛者所获成绩进行横向比较。同类比较是比较同类中的若干对象而认识其相异点的方法。例如，借助二次曲线的离心率e的大小，便可判定其为圆（$e=1$）、椭圆（$0<e<1$）或双曲线（$e>1$）。这三种曲线不同性质的比较，就是同类比较。异类比较是比较若干种异类对象而认识其相同点的方法。如分数与分式的类比即然。

有比较才能有鉴别。比较法在认识上具有重要的作用。一方面，通过比较，人们掌握了不同事物的共同点，这有利于引导人们去探索事物的共同本质和规律性；另一方面，通过比较，人们掌握了事物之间的不同点，这便于人们去探索事物的特殊本质和特殊规律。在数学中，比较是一种基本的科学研究方法。各种量之间比较方法的出现大大促进了数学的发展。对于离散量的比较，最初是采取一一对应的方法进行直接比较；对于连续量，也是把两个量进行直接比较，不过这时，人们往往选择一个确定的基本量作为单位，以此为标准来进行比较。在此基础上，人们创造出了测量方法。随之自然数、分数的概念也就应运而生了。之后，量的直接比较便被相应的数的间接比较取代了。从各种同类量的直接比较发展成为统一的数与数之间的比较，这是数学发展过程中的一次重大转折。另外，在量的比较中，人们又发现了无公度量，它直接诱发了无理数的出现，导致了数的概念的扩展。在数学教学中，人们常用比较法来引出某个新的数学概念。在数学中通过正反两方面的比较使人们对数学概念、理论认识得更加清楚，理解得更加透彻，从而掌握得也就更加牢固，运用起来因而会更得心应手。

在数学中运用比较法应遵循如下原则：（1）要在同一关系下进行比较。数学对象之间的比较，必须以确定的标准，在同一关系或同一方面进行比较。例如三角形的角度与正方形的面积，二者间关系不同一，因而不能比较。（2）要着眼于数学对象的本质属性，选择比较“维”。数学知识座落在多维空间的网络系统之中，因此，要使比较有效、一致，必须把握比较事物的本质及其构造因素的维度，选定合适的比较“维”，使比较在同一维度上进行。如正方形、长方形、平行四边形等平面图形，它们有形状、大小等多种不同的“维”度属性的区别。要抓住体现本质属性的“维”度——边角关系特征进行比较。（3）要注意“异”中识“同”，从“同”中辨“异”，确定比较序。对于同类或者相似的数学对象之间的比较，应首先着眼于差异性；对于不相同的同类事物或异类事物应首先着眼于它们之间的关联性。这是因为对于科学认识来说，能在极不相似的对象之中识同，或者在极相似对象中辨异，是具有重要的意义的。

比值法 亦称归一法。一种变量代换方法。其具体含义是：在一个数学问题中，当有几个比值相等时，可设这个比值为 k，然后借助这个比值 k，完成问题的解决。

例 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+z}{3}=\dfrac{y+z}{4}, & ①\\ x+y+z=27. & ②\end{cases}$$

解 设 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+z}{3}=\dfrac{y+z}{4}=k$，则 $x+y=2k$，$x+z=3k$，$y+z=4k$。三式相加，经整理再由②式得 $k=\dfrac{2}{9}(x+y+z)=6$。所

以$x+y=12$, $x+z=18$, $y+z=24$。分别代入②式得$x=3$，$y=9$，$z=15$。

比值法的实质在于将多元的问题化成一元的问题，从而达到简化问题的目的。因此在给定的问题中如果已给定的条件中出现多元连等的情况下，都可以引入一个变量k，以使之几个变量转化为统一的变量，用这个统一变量去处理问题就可带来方便。这种方法在解方程组、证明不等式、等式及求值，以及在三角中涉及到正弦定理的有关问题时都可应用。

无限递降法　一种利用有限和无限的矛盾来解决问题的一种特殊的反证法。其具体含义是：为了证明某个与正整数相关的命题是不可能的，可首先假定其对某正整数（集合）为真，然后证明其对更小的正整数（集合）亦真，以此可无限进行下去。由于正整数不能无限减小，因而上述假定是错误的。这样就达到了解决问题的目的。

例　证明$\sqrt{2}$是无理数。

证　假定$\sqrt{2}$是有理数（在此认为“$\sqrt{2}$是无理数”与“$\sqrt{2}$不是有理数”等价），则存在正整数p、q，满足$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$。由于$\sqrt{2}+1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，即$\dfrac{p}{q}+1=\dfrac{1}{\dfrac{p}{q}-1}=\dfrac{q}{p-q}$，因而$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}=\dfrac{q}{p-q}-1=\dfrac{2q-p}{p-q}$。因为$1<\sqrt{2}<2$，所以$0<2q-p<p$，即若令$2q-p=p_1$，$p-q=q_1$，则$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}=\dfrac{p_1}{q_1}$，但$p_1<p$。对$\dfrac{p_1}{q_1}$重复以上过程，可知存在$p_2$、$q_2$满足$\sqrt{2}=\dfrac{p_2}{q_2}$，$p_2<p_1$，…，如此可无限进行下去。因正整数不能无限减小，故$\sqrt{2}$必为无理数。

无限递降法是17世纪法国数学家费马首先提出并加以利用的。据考证，他可能曾用此法发现了许多数学事实，数理逻辑产生以后，这种方法作为一个定理被包括其中。

无限递降法常被用于证明某些否定性命题，是数学中的一种很有用的方法。

无理代换法　是将一个无理式设作一个变量，从而达到解决问题目的的一种变量代换法。

例　解方程$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x=6$。

解　设$y=(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x$，则原方程化为有理方程$y^2-6y+1=0$。解此方程得$y=3\pm2\sqrt{2}$。代入，解得$x_1=2$，$x_2=-2$。

由上题可知把一个无理式用一个新变量代换，从而把无理方程问题化为易解的有理方程问题。这种代换是解无理方程的一种常用方法。

不完全归纳法　亦称枚举归纳法。它是从某类对象的一部分具有性质F出发，而得到关于该类对象都具有性质F的推理形式。其推理形式为

A_1具有性质F

A_2具有性质F

$\vdots$

A_n具有性质F

$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \subset A)$

A类事物具有性质F

例 1 函数 $y=3x-2$ 和 $y=\frac{x+2}{3}$的图象关于直线 $y=x$ 对称；函数$y=x^3$和 $y=\sqrt[3]{x}$的图象关于直线 $y=x$ 对称。一般地，函数 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线$y=x$对称。

用不完全归纳法得出的结论可能是真实的，也可能是错误的。

例 2 函数 $f(n)=n^2+n+41$，$n\in N$，当$n=1$，2，3，…，39时，都是质数，但不能由此断定 $f(n)$ 对于一切自然数都是质数。事实上，当 $n=40$时，$f(40)=41^2$，显然不是质数。

因此，由不完全归纳法推出的结论，尚需要进一步证明其真实性。

不完全归纳法有助于人们发现问题，提出问题，从而丰富数学研究内容，推动数学的发展。除此之外，考察数学问题的特殊情况，有助于人们从特殊性认识普遍性，可以指明探索问题的方向、发现解决问题的途径。

互斥法 是利用命题转化进行证明的一种方法。其具体含义是：欲证命题“A推出C或D是真的”，改证“在A真、C假的前提下推出D真”或者“在A真、D假的前提下推出C真”。

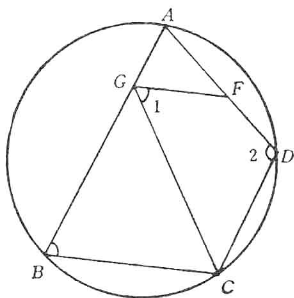
例 如果 $x^2-5x+6\geqslant 0$，那么$x\leqslant 2$或$x\geqslant 3$。

分析 假设 $x^2-5x+6\geqslant 0$，$x<3$，目的是要断定$x\leqslant 2$。由$x^2-5x+6\geqslant 0$，开始顺推，得到$(x-2)(x-3)\geqslant 0$。因$x<3$，$x-3<0$，所以$x-2\leqslant 0$，这即是要求证的$x\leqslant 2$。

证明 假设 $x^2-5x+6\geqslant 0$，$x<3$，由此可得$(x-2)(x-3)\geqslant 0$。因为$x-3<0$，所以必有$x\leqslant 2$。

对于命题“由A推出B”，当B有“C或者D”的形式时，宜用互斥法来证明。

中介法 是一种问题转换法。它是证明两个数学对象具有某种等价关系的一种方法。其具体含义是：欲证数学对象A和B具有等价关系R，即ARB，可设法寻求另一对象C，使得ARC且CRB。由于等价关系具有传递性，因此找到了C，便等于证明了ARB。在初等数学中，其中的等价关系常常具体表现为“相等”关系。证明恒等式时，常采用的“左、右两边对推”的方法便是对中介法的一种特殊运用。有效地运用中介法的关键在于找到适宜的媒介C，将A和B看作两个环境（图形、集合等）中的对象，而取C为两环境的交中的恰当对象（或由交中的对象决定的对象），往往便于问题的解决。例如，如图所示，



G、F、D、C 四点共圆，求证$\angle 1=\angle B$。这一问题便可这样证明：在四边形$GFDC$这一“环境”中，$\angle 1+\angle 2=180°$，即 $\angle 1=180°-\angle 2$；在圆内接四边形 $ABCD$ 这一“环境”中，$\angle B+\angle 2=180°$ 即 $\angle B=180°-\angle 2$，故 $\angle 1=\angle B$。这里相当于前述定义中 $A=\angle 1$，$B=\angle B$，$C=180°-\angle 2$（它由$\angle 2$决定）。中介法是数学中证明两个对象具有某种等价关系的理论上普遍行之有效的方法，具有应用的广泛性。

中心投影法　是借助中心投影进行映射的一种 RMI 方法。已知相交的两平面 M 和 N，以及不在它们上面的一点 P。连接P点与任意点 $X\in M$，设直线PX与平面 N 交于 X'，则从X到 X' 的变换就是中心投影，P 点称为投影中心。

中心投影有如下性质：

（1）从平面M到N的中心投影将直线仍变到直线。

（2）一个平面内的任意普通直线可借助中心投影变为某一其它平面内的无穷远线。

（3）若从P点将平面M内直线u上的点 A、B、C 投影到平面N内直线V上的点E、F、G，而将u上第四个点D投影为N的无穷远点，那么，其交比

$$(ABCD)=\frac{EG}{GF}。$$

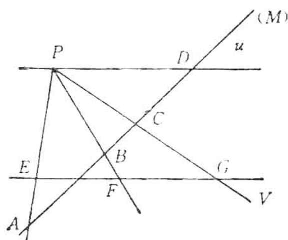


图 1

利用中心投影及其性质可以解决初等几何中的一些问题。

例　已知同一平面内 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应顶点连线 AA'、BB'、CC' 通过同一点 O，求证它们三双对应边的交点在同一直线上。

证明　设三角形的对应边 BC 与 $B'C'$、CA与$C'A'$、AB与$A'B'$分别交于X、Y、Z，如图 2 所示。

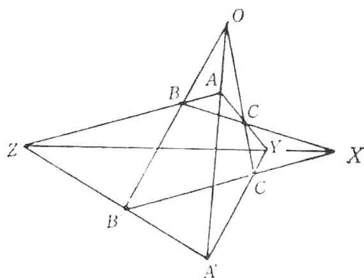


图 2

要证明直线XY通过 Z点。为此，借助中心投影将直线XY变到无穷远直线，得到图 3，其中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$的对应顶点连线仍通过同一点 O，并且已知 $BC\parallel B'C'$，$CA\parallel C'A'$，要证 $AB\parallel A'B'$。而由$BC\parallel B'C'$，得到

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}。$$

从$CA\parallel C'A'$，有

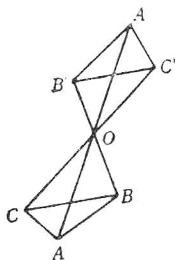


图 3

$$\frac{OC}{OC'}=\frac{OA}{OA'}。$$

因而　$\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OA}{OA'}$。所以图 2 中 $AB\parallel A'B'$，即两个三角形的三双对应边交点都在无穷远直线上。由中心投影的性质知，原题中三双对应边的交点X、Y、Z也在同一直线上。

中间变量法　见换元法。

中国剩余定理　见孙子剩余定理。

内插法　见插值法。

牛顿法　一种求方程实根近似值的方法。其具体含义为：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)$也连续，且 $f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$，$f(a)f(b)<0$。取初始值

$$x_0=\begin{cases}a,\ 当f''(x)<0,\\ b,\ 当f''(x)>0,\end{cases}$$

则由迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

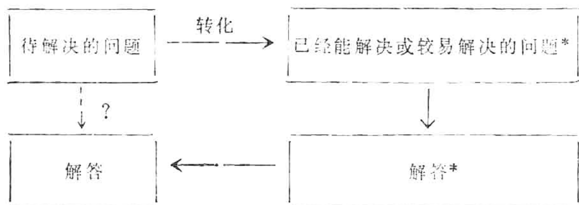
可计算出方程$f(x)=0$的近似值 x_1，x_2，x_3，…。

长除法　一种除法运算。算术中的多位数除以多位数的竖式运算；代数中多项式除以多项式的竖式运算；综合除法运算都属长除法运算。如 $(x^3-2x^2-x+2)\div(x+1)$ 可以作如下形式运算：

(1)
$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+2 \\ \hline
x+1 & x^3-2x^2-x+2 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & -3x^2-x+2 \\
 & -3x^2-3x \\ \hline
 & 2x+2 \\
 & 2x+2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & -1 & +2 & -1 \\
 & -1 & +3 & -2 & \\ \hline
1 & -3 & +2 & +0 &
\end{array}$$

化归方法　亦称化归原则。人们把待解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经能解决或者比较容易解决的问题中去，借此来获得原问题的解的一种方法。利用化归方法解决问题的一般模式可用框图表示如下：



例如，在假定已经会求三角形面积的前提下，去求多边形的面积。可把多边形分割成若干个三角形，这样就把问题转化为已经能解决的三角形求面积的问题，通过若干个三角形的面积便可求得多边形的面积。这里用的就是化归方法。化归的途径和转化的方法有：特殊化、一般化、分解与组合、关系映射反演原则和归纳、类比、联想等。化归要遵循熟悉化和简单化原则。

化归方法是数学家思维的重要特点之一，是数学方法论中的基本方法之一，它在数学中有着广泛的应用，对于数学的发展有着重要的意义。笛卡尔创立的解析几何，被史学家视作由初等数学向变量数学时代发展的“第一个决定性的步骤”，而建立解析几何的基本思想原则就是化归。英国哲学家霍布斯所论述的“方法论原则”对于后来的数理逻辑的发展是具有重大的启示意义的，而他的这一方法论原则也正是化归原则的一种具体阐述。美国著名数学家、数学教育家波伊亚对解题中如何由未知向已知的化归途径作了深入具体的阐述，写出了《怎样解题》和《数学的发现》等名著，对世界各国的数学教育都产生了深远的影响。我国著名数学家、数学方法论专家徐利治教授概括的“关系映射反演方法”是化归原则的深化和发展，它的建立必将对数学研究和数学教育产生更为深远的影响。

反证法　是间接证明方法的一种。它是从需证命题结论的反面出发，通过导致矛盾来推倒这个结论的反面，从而肯定这个命题真实性的一种证明方法。

例1　如果a是一个大于1的整数，而所有小于等于$\sqrt{a}$的整数都不能整除a，则a是素数。

证明　设a是合数，且$a=bc$，其中b、c都是大于1的整数。由于a不能被小于等于$\sqrt{a}$的整数整除，于是有$b>\sqrt{a}$，$c>\sqrt{a}$，所以$bc>a$。这与$a=bc$矛盾。因此，a是合数的假设不成立，故a是素数。

“a是合数”是“a是素数”的否命题。通过推导得$a<bc$，这与$a=bc$矛盾，从而推倒了反论题$a=bc$，这就肯定了“a是素数”的真实性。推倒结论的反面，肯定命题结论的真实性的依据是逻辑中的矛盾律、充足理由律和排中律。推倒结论的反面的逻辑原理是矛盾律和充足理由律，肯定命题结论成立的逻辑原理是排中律。在运用反证法证题时，首先提出与论题相矛盾的反论题，然后证明这个反论题是虚假的。根据排中律“在同一思维过程中两个互相矛盾的思想，不能同时都假，必有一真，没有第三种可能”。既然反论题假，那么原命题必然真。为了阐明推倒结论的反面的逻辑原理是矛盾律和充足理由律，下面把欲证的命题写成“若A则B”的形式。今从$\overline{B}$出发，如果推出的结果D与已知的事实（已有的定义、公理、定理或题设与临时假定）相矛盾，这时由矛盾律“在同一思维过程中，一个思想及其否定不能同时都真，至少有一个是假的”，只能说明D是假的；如果出现了两个结果D与$\overline{D}$，这时，根据矛盾律也只能说明D

与$\overline{D}$至少有一个是错误的。但是，由于推得的结果是错误的，为什么就能推倒结论的反面呢？这里根据的是充足理由律。充足理由律的内容为“任何判断都必须有充足的理由才被认为是正确的，也就是说，用真实的论据和正确的逻辑方法推出的结果必然是正确的”。反之，如果推得了错误结果，那么至少在论据和论证方法之一存在错误，这也应是充足理由律包括的内容。假定论据和论证方法都没有错，那就只能是临时假定的为假。

反证法的含义用逻辑符号表示为：原来要证的命题是“$p \Longrightarrow q$”（即$p \longrightarrow q$必真），现在改证$p \wedge \overline{q} \Longrightarrow f$（即$p$且非$q$必假）。

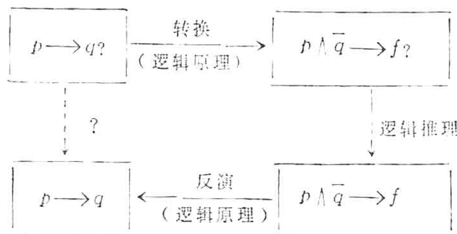
反证法证题的步骤为：

第一步 转换。根据逻辑原理将原命题$p \longrightarrow q$？转换成新命题$p \wedge \overline{q} \longrightarrow f$？

第二步 证明新命题。进行逻辑推理，得到p且非q为假。

第三步 反演。根据逻辑原理由p且非q为假推知$p \longrightarrow q$必真，从而原命题得证。

上述过程可用框图表示如下：



用逻辑符号表示，反证法的逻辑依据为如下几个推理格式：

①$\overline{p} \longrightarrow (p \wedge \overline{q}) \mid\longrightarrow p$；

②$\overline{q} \longrightarrow \overline{p} \mid\longrightarrow (p \longrightarrow q)$；

③$(p \wedge \overline{q}) \longrightarrow \overline{p} \mid\longrightarrow (p \longrightarrow q)$；

④$(p \wedge \overline{q}) \longrightarrow q \mid\longrightarrow (p \longrightarrow q)$；

⑤$(p \wedge \overline{q}) \longrightarrow (r \wedge \overline{r}) \mid\longrightarrow (p \longrightarrow q)$；

⑥$(p \wedge \overline{r}) \longrightarrow \overline{q} \mid\longrightarrow ((p \wedge q) \longrightarrow r)$，

从上面的逻辑等价式可知反证法有下面几种形式：

①否定结论，由此推出两个互相矛盾的结果，从而肯定结论的正确性。例如，求证$\sqrt{2}$是无理数。

②通过证明逆否命题的真实性来确定原命题的真实性。例如，已知$p^3+q^3=2$，求证$p+q \leqslant 2$。

③可以把否定结论$\overline{q}$作为前提，与已知前提p推出与前提p互相矛盾的结果，从而确定原命题的真实性。例如，把2110人分成128个小组，每组至少1人。证明至少有5个小组的人数相同。

④可以把否定结论$\overline{q}$作为前提，

与已知前提 p 推出结论 q，从而断定原命题的真实性。例如，若对任意正数c，恒有$a\leqslant b+c$，则有$a\leqslant b$。

⑤可以把否定的结论 $\overline{q}$ 作为前提，与已知前提p推出互相矛盾的两个命题r与$\overline{r}$，从而断定原命题的真实性。例如，求证：若 m、n 是奇数，则方程 $x^2+mx+n=0$ 不可能有等根。

⑥可以把原命题的结论 r 否定，即$\overline{r}$与原命题的前提中的 p 推出与前提q相矛盾的命题$\overline{q}$，从而断定原命题的真实性。例如，求证：若n是自然数，且n^2是偶数，则n是偶数。

关于反证法，下面几种说法都是不全面的。

①反证法不是直接证明求证的结论，而是先提出跟求证的结论相反（相排斥）的假定，然后推导出和公理、定义、已知证明了的定理或题设相矛盾的结果。这样就证明了与求证的结论相反的假定不能成立，从而肯定了原来求证的结论不得不成立。

这种定义法不但啰嗦，不易掌握，而且，这种说法不适用于例1。因为在例1是推导出和临时假定相矛盾的结果，这是"推导出和公理、定义、已经证明了的定理或题设相矛盾的结果"这句话包括不了的。

②反证法是命题的一种证明方法，它不是去证明这个命题本身，而是证明和它等价的逆否命题。

这是反证法的一种表现形式。这种说法对于例1也是解释不通的。

③可给反证法如下定义：欲证$A\Longrightarrow B$，代之以证明它的等价命题：$A\wedge\overline{B}\Longrightarrow C\wedge\overline{C}$。这种证题方法叫做反证法。

这种说法仅是反证法表现形式之一，它对例1也是不适用的。因为它推出的不是两个互相矛盾的结果，而是推出与临时假定相矛盾的结果。

反证法分成归谬法和穷举法两类。当结论的反面只有一种情况时，叫做归谬法；当结论的反面多于一种情况时，叫做穷举法。下面是一个穷举法的例子。

例2　若三角形的两个角的平分线相等，那么两角的对边必相等。

已知在$\triangle ABC$中，BE、CF是$\angle B$、$\angle C$的平分线，且$BE=CF$。求证$AB=AC$。

证明　用反证法。如果$AB\neq AC$，那么就有$AB>AC$或$AB<AC$两种情况，分别对这两种情况进行考察。通过推出这两种情况的虚假性，从而断定$AB=AC$。

用反证法证题的实质是通过矛盾转化而达到解决问题的目的。对于直接论证较为困难的命题，采用反证法常可以起到化繁为简、化难为易的作用。反证法适用于证明数学中的基本命题、否定式命题、肯定式命题、唯一性命题，限定性命题（至多、至少）、存在性命题以及无限性命题。

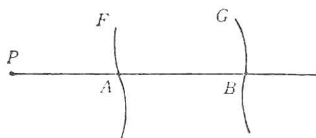
反例法　通过举反例来否定某命题的一种方法。数学中的反例，是指一个符合命题的条件而不符合该命题结论的特例。例如，费马猜想："任何形如$F_n=2^{2^n}+1$的数（其中n为自然数）都是素数"。但是后来欧拉发现，当$n=5$时，$F_n=2^{2^5}+1=641\times$

6700417是合数，而不是素数。由于欧拉举出了这一反例，从而否定了费马猜想。反例有如下三种：第一，基本形式反例。数学命题有四种基本形式，其中全称肯定判断与特称否定判断可以互为反例，全称否定判断与特称肯定判断也可以互为反例。第二，关于充分条件假言判断与必要条件假言判断的反例。充分条件的假言判断是断定某事物情况是另一事物情况充分条件的假言判断，可表述为$p\to q$，即“有前者，必有后者”，但是“没有前者，不一定没有后者”。可举反例“没有前者，却有后者”说明之。这种反例叫做关于充分条件假定判断的反例。反之，“有了前者，没有后者”的反例叫做关于必要条件假言判断反例。第三，条件变化型反例。数学命题的条件改变时，其结论不一定正确，为了说明这一点所举的反例称作条件变化型反例。怎样去构造一个反例呢？这是数学中难度很大的问题，一般说来可以通过如下途径去考虑：①特例构造法。就是设法从所考虑问题的极端情况或者具有显著特点的那种情况去构造反例。②性质构造法。就是根据所需构造反例的特征与性质，按一定的数学知识与技能去进行构造反例。③逼近构造法。是指通过分析、排除、找到反例所在的范围，然后在这个范围内逐次缩小范围，直至达到目标为止。④直观构造法。是联系问题的几何意义，通过直观图形中去寻找所需要的反例。⑤类比构造法。根据已知反例的特点与思维方法，在新的范围内构造出类似的反例。举反例不仅否定某一个命题，它在数学理论研究和学习中起着重要的作用。数学上一个重要反例的出现，往往预示着数学理论的重大突破。数学史上第一个著名的反例是公元前500年左右，毕达哥拉斯学派的希帕索斯所发现的单位正方形对角线的不可公度性。这个反例否定了当时毕达哥拉斯学派关于宇宙间一切数量关系都可以归结为整数或整数之比的信条，使人们对数的认识迈出了重大的一步。通过举反例可直接促进数学新概念、新定理与新理论的形成和发展。在教学中，适时地举出反例，可以使学生更深刻、更全面地掌握数学基础知识，更好地培养他们数学创造能力。

反演法 是反演变换中的一种。详见反演变换法。

反向归纳法 见数学归纳法。

反演变换法 是借助于反演变换进行映射的一种 RMI 方法。所谓反演变换，就是图形F到图形G的变换，这



两个图形具有如下性质：设给定一定点p和数$k>0$，对于每一点$A\in F$，对应射线PA上的一点B，有$PA\cdot PB=k$，其中$B\in G$。这时称定点P为反演中心或反演极，常数k叫反演幂，B叫做A的反点，G叫做图形F的反形。反演变换分平面反演变换与空间反演变换。有如下性质：

①通过反演极的直线，反形是这

条直线本身。

②设反演极为P，A与B的反点分别为C和D，则$\triangle PAB\backsim\triangle PDC$。

③设反演极为P，反演幂为k，两点A和B的反点分别是C和D，则

$$AB=\frac{kCD}{PC\cdot PD},\qquad CD=\frac{kAB}{PA\cdot PB}。$$

④不通过反演极的直线，反形是通过反演极的圆周。

⑤不通过反演极的圆周，其反形也是不通过反演极的圆周。

⑥反演变换保持任意两曲线的交角的大小不变。

⑦在空间反演变换下，通过反演极的平面的反形仍为这平面本身，不通过反演极的平面反形是一个通过反演极的球面，通过反演极球面的反形是一个不过反演极的平面，不过反演极的球面的反形也是不过反演极的球面。

例 设A、B、C、D是同一平面上不共圆的四点，求证$AB\cdot CD+AD\cdot BC>AC\cdot BD$。

证明 取D为反演极。令反演幂为$k=1$，作反演变换。设A、B、C的反点顺次为A'、B'、C'，则因已知四点不共圆，故A'、B'、C'就不共线。由$\triangle A'B'C'$得 $A'B'+B'C'>A'C'$。而

$$A'B'=\frac{AB}{DA\cdot DB},\ B'C'=\frac{BC}{DB\cdot DC},\ A'C'=\frac{AC}{DA\cdot DC},$$

代入上式整理得 $AB\cdot DC+BC\cdot DA>AC\cdot DB$。

由于反演变换能将直线变成圆，圆变成直线，能将相等的圆变成不相等的圆，将不等的圆变成相等的圆，从一个图形变到它的反形，其反形可与原来的图形完全不一样，因此应用反演变换可以将复杂的问题变成十分简单的容易处理的问题。也可以从简单的熟知结果推演出新的定理来。利用反演变换可将球面变成平面，从而利用熟知的平面三角公式导出一系列的球面三角公式。反演变换对几何作图很有用。在作图中，图形的反形可以起到轨迹的作用。借助反演变换的性质可以发现解题的线索，能够将原来的作图题转化为已知或者简单的作图问题。特别是，利用反演变换能比较容易地从理论上证明：凡属用无刻度的直尺和圆轨能解决的几何作图问题都可以只用圆轨作出。

公理方法 见公理化方法。

公理化方法 亦称公理方法。是建立公理体系的方法。它是指在一个理论体系中，尽可能少地选取原始概念和基本公理，以此为出发点，利用纯逻辑推理的法则，把该系统建立成一个演绎系统的方法。为了把某一门数学表述为演绎系统，需要选择一组基本概念和基本公理作为出发点。因此，怎样选择一组基本概念和公理是运用公理化方法的关键所在，也是公理化方法的基本内容。数学基本概念应该是最原始、最简单的思想规定，是对数学对象抽象的结果。当基本概念确定之后，就是如何选择公理的问题。公理是对诸基本概念相互关系的规定。这些规定应当是合理的，是不多

不少的。也就是说，公理的选取应该符合三条要求：一是相容性的要求。相容性亦称协调性或无矛盾性。这一要求是指在同一个公理系统内不能出现两个互相矛盾的命题，这是一个基本要求。二是独立性的要求。就是要求在一个公理集合中不允许出现多余的公理，要求公理的数目减少到最低限度，因为多余的公理可作为定理推证出来，因此列为公理也就必要性不大了。三是公理系统的完备性要求。就是保证某一数学分支的全部命题都能从这一组公理推导出来，因此必要的公理不能少，否则就不完备。一般说来，如果一个公理系统满足上述三条要求，那么该公理体系就是令人满意的公理系统。但是一个公理系统要逐一验证满足这三性的要求，并不是那么简单的，甚至至今还不能彻底实现。

公理化方法的历史发展，大致可分为四个阶段。①公理化方法的产生。希腊的伟大哲学家亚里士多德（约公元前427——公元前347）在其著作《分析篇》中，总结和概括了前人的几何和逻辑知识，首次对公理化方法作了论述。他论述了怎样进行演绎证明，研究了关于演绎证明的逻辑结构和逻辑要求，从而奠定了公理化方法的基础。欧几里得（公元前330?——公元前275?）把形式逻辑的公理演绎方法应用于几何学，在前人积累起来的几何知识的基础上，运用抽象分析的方法提炼出一系列的基本概念和公理。由此出发，按照逻辑规则，将当时所知道的几何知识全部推导出来，从而使几何知识以公理系统形式组成一个有机整体，写出了《几何原本》重要著作。于是，在数学领域中，公理化方法也就随之而产生了。《几何原本》对数学的发展起到了巨大的作用。但另一方面，这部巨著还有不足之处，有待于进一步完善。②公理化方法的半形式化。《几何原本》的不足早为古代学者所发现，并一直努力在完善它。特别是《几何原本》中的第五公设在陈述和内容上的复杂和累赘，引起人们的怀疑，指出这条公理是不是多余的，能否从其它公设和公理推导出来？结果两千年来对第五公设的证明都没有成功。19世纪俄国的数学家罗巴切夫斯基基于前人试证第五公设屡遭失败的教训，从问题的反面考虑问题，给出一个新的公理体系。这就是去掉第五公设保留欧氏几何其余公理，再加进一个与第五公设相反的命题，即过平面上直线外的一点至少可以引两条直线与该直线不相交。这个新的几何系统就是非欧几何，它与欧几里得几何系统相并列。非欧几何的建立意味着几何理论不再从属于某种特定的对象，它开拓了"空间"的概念、丰富了公理化方法的内容。为了表明公理化方法发展的阶段性，称非欧几何所用的公理化方法为半形式化。③公理化方法的形式化。1899年，德国数学家希尔伯特吸收了前人优秀成果，解决了欧氏几何欠缺的地方，写出《几何基础》一书，从而完善了公理化方法，产生了全新的形式公理化方法。希尔伯特采用不定义概念，而由公理隐含给出。因此在他所给的公理系统中所涉及的对象可以是任何事物，所涉及的事物

或对象之间的关系也可以具有其具体意义的任意性。这就使公理脱离了直观，而上升到更高的抽象形式。《几何基础》引进的基本概念包括基本元素和基本关系，引进的基本公理共分五组二十条。基本元素有点、直线、平面；基本关系有结合关系、顺序关系、合同关系。五组基本公理是结合公理（8条），顺序公理（4条）、合同公理（5条）、平行公理（1条）、连续公理（2条）。《几何基础》中建立起来的模型化方法可以证明公理的相对相容性，也可以证明某一公理对其它公理的独立性。④公理化方法的纯形式化。为了避免在数学中出现悖论，希尔伯特认为要设法绝对地证明数学的无矛盾性，由此促使他从事“证明论”的研究，于是他又把公理化方法推向一个新的阶段——纯形式化阶段。这种纯形式的公理方法其基本思想是采用符号语言把一数学理论的全部命题变成公式的集合，在此集合中，概念均换成符号，公理及定理均写成公式，推导都成了公式的变形，推导过程的最后一步所出现的一式就是所要证明的结论。纯形式化公理化方法，不仅推动了数学基础的研究，而且为计算机的广泛应用开辟了广阔的前景。

公理化方法在整理数学知识，促进新理论的创立以及对整个科学理论的表述都有着重要作用。这种方法首先具有分析和总结数学知识的作用。它把零散的数学知识用逻辑的链条串联起来，使之形成完整的有机整体。这不但使人容易掌握，而且也便于应用。由于公理化方法把一门数学基础分析得清清楚楚，结构严谨有序，这就有利于比较各门数学在实质上的异同，从而就可以促进和推动新理论的产生。例如，非欧几何就是在使用和研究公理化方法的过程中产生的。由于数学公理化方法表述数学理论的简洁性、条理性和和谐性，从而为其它科学理论的表述起到了楷模的作用。如理论力学公理化、相对论公理化以及伦理学公理化等都是在效法数学公理化建造理论的模式而出现的理论的公理化系统。但不能把公理化方法绝对化，它还有一定的局限性。在使用这一方法时，必须与实验方法相结合，用公理化方法建立起来的理论体系最终必须接受社会实践的检验。另外，在使用公理化方法时，还必须考虑到人们的认识规律。例如就中学教材的处理，就要充分考虑到学生的认识规律和接受能力，采取了扩大公理化的方法来组织数学教材的内容，这就是说，从整体上看，它体现了公理化方法的基本思想，但就整个系统而言，是不严格的。因为它并不要求满足公理的独立性和完备性。例如中学几何教材就是这样处理的。它选定了一组基本元素和一批关系作为原始概念，选取了少数公理，以此为出发点，用形式逻辑的方法定义有关概念，推导一系列定理，把有关的几何知识贯穿起来。与希尔伯特的公理系统相比较，增加不定义的原始概念，扩大和强化了一些公理，基本保留了结合公理和平行公理，而顺序公理、合同公理和连续公理不直接明确提出来，而实际上是采用默认的态度。其中新增加的几何公理有11条：①两点之间线

段最短。②经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。③从直线外一点到这条直线上的各点所连结的线段中，和这条直线垂直的线段最短。④同位角相等，则两直线平行。⑤两直线平行，则同位角相等。⑥有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。⑦有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等。⑧有三边对应相等的两个三角形全等。⑨平行于同一直线的两条直线平行。⑩长方体的体积等于它的长、宽、高的积。⑪夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积相等，那么这两个几何体的体积相等。强化了的几何公理有4条：即，⑫经过两点有一条直线，并且只有一条直线，⑬经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行。⑭如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。⑮经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面。另外还有几何公理：⑯如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。等量和不等量公理有11条；⑰等量加等量，和相等。⑱等量减等量，差相等。⑲等量的同倍量相等。⑳等量的同分量相等。㉑在等式和不等式中，一个量可以用它的等量来代替。㉒不等量加上或减去等量，原来大的仍大。㉓不等量乘以或者除以一个正数，原来大的仍大。㉔不等量加不等量，大量的和大于小量的和。㉕等量减不等量，减去大的，差反而小。㉖第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量。㉗全量大于它的任一部分。

分类　是一种重要的思维方法。它是根据事物的本质属性或显著特征将对象分成几个部分，从而对其研究的一种方法。分类的根据是本质属性或显著特征，它所得到的子项具有相当的稳定性，能够在较长的时期内起作用。例如，把数分为有理数与无理数，把函数分为线性函数与非线性函数等等，这些分类都是比较稳定的，且具有重大的科学价值。

分析法　有下面几种含义：

（1）是在思维中把对象分解为多个部分，逐一加以考察研究的逻辑方法。例如，研究平面几何图形时，把图形分为圆、多边形以及其它种类的一些图形。多边形又分为三角形、四边形、五边形、…；三角形又分为直角三角形、锐角三角形、钝角三角形；四边形又分为矩形、平行四边形、梯形等。通过分解，对其逐一研究，从而认识各种几何图形的性质。这就是分析法。分析方法能够使人们了解事物的细节，洞察事物的内部结构和联系；分析方法还可以使人排除假象，抓住事物本质和发展过程的核心的东西，为认识被考察对象的整体而形成概念、判断等打下初步的基础。运用分析方法，首先要了解事物各个部分和因素的特点。因此，需要在思维中把被考查的方面和因素从总体中分离出来，单独地加以考察和研究。为避免片面性，还需要把分析和综合结合起来，全面地把握住事物的辩证发展过程。实际上，人们在认识事物的过程中，分析与综合是辩证的

统一，它们既是对立的，又是统一的。在认识事物的本质、探索事物规律的过程中，两者相辅相成，没有分析就不可能有综合；反之，没有综合也不可能对事物进行深入的准确分析、任何综合都必须以分析为基础；任何分析又都要以综合着的现象为对象。人们的科学认识过程就是一个分析与综合的相互依存、相互渗透、在一定条件下相互转化的过程。

（2）在数学中，分析法被看成是从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法。简而言之，分析是"执果索因"。在数学证明中，为了找到证明的途径，如果推理的方向是从求证追索到已知，这种思考方法，因为是"执果索因"，因此，被称之为分析法。

例　设$a>0$，$b>0$，$a\neq b$，求证$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。

证明　要证明$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，只要证$a+b>2\sqrt{ab}$，即$a+b-2\sqrt{ab}>0$。因为$a-b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$，所以只要证$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$即可。由题设知，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$。命题得证。

分析法是数学解题中常用的方法。在证明一个数学问题时，往往借助于分析法，由问题的结论，一步一步逆推，最后推到问题所给的已知条件。这样思考问题，目的性明确，想法自然。因此在教学过程中，常采用这种方法讲解例题，有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。由于人们在研究事物现象的因果关系时，思维活动过程总是从原因和结果之间的相互联系去思考问题，这也就是说既运用分析法又同时运用综合法，因此，分析与综合在思维过程中是互相补充、相互渗透，这就构成了统一的分析综合法。应用分析法或综合法寻求解决问题的途径时，要注意挖掘题中的隐含条件，不然就得不到完整的解答。

（3）在数学中，分析法被看作是从数量方面研究客观事物的性质为基础的研究方法。例如，解析几何主要是从数量方面来研究几何图形的性质，这就是分析的方法。

分步法　是解决排列组合问题的基本方法。对某些排列问题采取先取组合后排列的办法，叫做分步法。

例　0，1，2，3，4，5六个数字，可组成多少个没有重复数字的可被3整除的五位数？

解　可被3整除的数，其各位数字之和必是3的倍数。所以，在这六个数字中，先选取五个数字的组合，使其和是3的倍数，得五个数字之和是3的倍数的组合为$A=$（1、2、3、4、5）和$B=$（0、1、2、4、5）。在A中可组成3倍数的五位数字共有P_5^5个，在B中可组成3倍数的五位数字共有$P_5^5-P_4^4$，故满足题设条件的五位数共有$P_5^5+(P_5^5-P_4^4)=216$个。

分割法　是构造图形法的一种特殊方法，它是将一个几何图形分割成几部分，然后通过对各部分的考察来获得整个问题解的一种方法。例如，为了

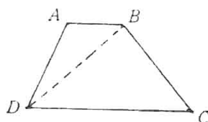
推求梯形面积公式，可把梯形分割为两个三角形，通过这两个三角形的面积便可推出梯形面积公式。分割法体现着分解组合的思想。

分数法　是一种单因素的优选方法。它是根据不同的优选对象，选择数列 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \cdots, \frac{F_n}{F_{n+1}}, \cdots \middle| F_0=1, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\right\}$ 中的任一分数代替0.618，作为试验点的一种优选方法。

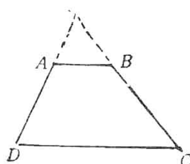
由渐近分数的性质得知，分数法与黄金分割法的差异不是太大，在非常特殊情况下，才能少做一次实验。分数法适用于单峰函数。在限制试验次数的情况下，可用分数法。假定限制作10次实验，可用 $\frac{89}{144}$ 选择试验点，作9次试验，选择 $\frac{55}{89}$ 作实验点，等等。

分解方法　一种特殊的化归方法。它是指把一个待处理的问题分成若干部分，然后通过对各部分及其间的联系的考察来获得问题解的一种方法。怎样进行分解？通常对待处理问题作分解的对象可从以下四个方面进行考虑：

（1）问题本身。把问题本身作为被分解的对象通常又有如下两种形式：一种是将整体分解为局部之和的形式；另一种是将局部表成整体与另一局部之差的形式。例如按下二图求梯形面积即然。



$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CBD}$



$S_{ABCD}=S_{\triangle PDC}-S_{\triangle PAB}$

（2）问题的条件。一个问题有若干条件，为了排除条件之间的直接或间接的相互制约关系，可分别探讨只满足部分条件的对象的集合。这样可以使问题变得清晰、明朗。但是为了求得原问题的解，还需要进行分解后的重新组合，也就是再求只满足部分条件对象的集合之交，从而达到解决问题的目的。

例　已知抛物线$y^2=x$的一条弦PQ被直线 $y=k(x-1)+1$ 垂直平分，求k的范围。

分析　该题的条件大致可分解为如下三层：

① PQ是抛物线的弦，因此知P、Q两点必在抛物线上，故可设其坐标分别为$P(y_1^2, y_1)$，$Q(y_2^2, y_2)$。

② PQ与直线垂直，于是推知 $k_{PQ}=-\frac{1}{k}$。

③ PQ被直线平分，故PQ中点满足 $y=k(x-1)+1$。这样，就可

得到同时满足上述三条件的对象集合

$$\left\{(y_1,\ y_2,\ k)\ \middle|\ \begin{array}{l}\dfrac{y_1-y_2}{y_1{}^2-y_2{}^2}=-\dfrac{1}{k},\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=k\left(\dfrac{y_1{}^2+y_2{}^2}{2}-1\right)+1,\end{array}\quad \begin{array}{l}y_1、y_2、k\\ \text{是实数}\end{array}\right\}。$$

从中消去y_1（或y_2），得到关于y_2（或y_1）的二次方程，利用此方程有实根，便可确定出k的范围来。

（3）问题的外延。问题外延的分解方法，相当于逻辑的划分方法。这里强调问题外延的目的，在于弄清求解问题时应从哪个方面入手。分解时首先要确定一个区分标准。在分解时要不重不漏。例如求证圆周角是同弧所对圆心角之半。此问题外延可分如下三种情况：圆周角的一边恰为直径；圆周角的两边在某直径同旁；圆周角的两边在直径的两旁。

（4）实现目标的过程。对于实现目标的过程进行分解，人们称之为台阶式的分解。因通过这种分解，整个的解题过程被分为若干阶段，每个阶段都有一个分目标，每个分目标即形成一个台阶，当人们沿着这些台阶走下去之后便可达问题解的目的地。

例　设α、β是方程$x^2-10x+22=0$的两个根，求$\lg\left[440\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\right]-\lg[\sqrt{3}(\alpha^2+\beta^2)]+\lg[14|\alpha-\beta|]$的值。

分析　此题可分解成如下两个基本题：

①求一元二次方程$x^2-10x+22=0$的两个根α、β。

②求出α、β后，再求各对数值。

但观察所求对数式的特点，其未知的代数式都可用$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$表示出来，即

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta},$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta,$$

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}。$$

所以可不必解一元二次方程，而由韦达定理直接得出$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$的值，于是问题便可分解成如下三个基本问题：

①不解$x^2-10x+22=0$，求出$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$之值。

②把$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$、$\alpha^2+\beta^2$、$|\alpha-\beta|$用$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$表示出来。

③①、②之后，求问题所给对数式的值。

分解方法在数学中有着广泛的应用。对一个数学问题的处理，通过分解方法，可以使人们清晰地了解待处理问题各部分之间的制约关系，从而也就可以找到解决问题的办法。通过分解能够弄清问题的外延，这就为解决问题找到了突破口。事物的发展总是由简单到复杂。当人们研究了简单的、单一的基本问题之后，就要考察一些复杂的、综合性的问题。而这些复杂的综合性问题是由简单的、基本的问题发展而来的，因而对其进行分解以达认识其本质的目的的作法是自然的。分解法是解题中常用的方法。

在一个综合性的问题里排除各种基本问题之间的相互干扰，较快有效地分解出综合问题所需要的基本问题是解决此类较复杂问题的关键。虽然分解在整个解题过程中起着重要作用，但在许多情况下，只考虑分解方法是不够的，还必须借助于组合。比如，在整体分解中，人们把每个子问题的解求出之后，还要依靠叠加或求并，也就是依靠组合的方法把原问题的解求出来。实际上，分解与组合是相辅相成的、密不可分的。二者的有机结合，不仅原则上是求取问题结果所需要的，而且更重要的是它将导致原问题关系结构系统的重新搭配，从而为问题的解决提供有利的途径。故解题时要特别注意分解与组合的联合运用。另外，当对问题进行分解时，要根据具体情况，从整体上着眼，抓住问题各方面的制约关系，给出问题解决的最佳方案。

分组分解法　见因式分解的方法。

分解组合法　是综合运用分解与组合的方法。

例　求被3除余1，被5除余2，被7除余6的最小自然数。

解　将已知条件分解成三部分：

(1) $n=3t+1$。

(2) $n=5u+2$。

(3) $n=7k+6$。

将(1)、(3)组合，得

$7k+6=3t+1$,

$k=3t+1-6k-6=3m+1$,　①

其中$m=t-2k-2$。要n最小，只需k最小，又只需m最小。将(2)与(3)、①组合，得

$5u+2=7(3m+1)+6=21m+13$,

$m=5(u-4m-3)+4=5v+4$

$(v=u-4m-3)$。

要m最小，只需v最小，取$v=0$，则$m=4$，$k=13$，故所求的最小自然数为97。

在进行分解时，要注意先把题设中的隐含的条件或没有强调的部分找出来，然后加以重新组合。对于某些问题的解决，也不一定先分解，再进行组合，可以边分解，边组合，直到问题最终获得解决为止。另外，对于同一问题往往有不同的分解与组合方式，宜尽量从中择优。

分段讨论法　分解的一种方法。其具体含义是：当一个数学问题不能以统一的形式进行解决时，必须先将条件所给的全集划分为若干子集，在各个子集内分别进行讨论，然后通过综合来获得原问题的解。

例　解方程 $|6x-|3x-1||=-m^2x$。

解　为了去掉绝对值符号，要对x的取值范围进行分段讨论。由于方程左边非负，故右边也应非负，这只有$x\leqslant 0$方有可能。此时原方程成为$(9-m^2)x=1$。为解此方程，需对参数m的取值范围进行分段讨论。

当$m=\pm 3$时，方程无解；

当$m\in(-3,3)$时，$x=\dfrac{1}{9-m^2}>0$，由于$x\leqslant 0$，故此应舍去；

当$m\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$时，$x=\dfrac{1}{9-m^2}<0$，此即为原方程的解。

综上可知，原方程仅在 $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ 时有解 $x = \frac{1}{9-m^2}$。

分段讨论法在解方程、不等式、含参数的问题以及讨论函数的单调性等方面都有着广泛的应用。在运用这一方法时，要注意对问题条件所刻划的集合予以正确划分，不要有所遗漏，要尽量恰到好处。

分析综合法　又叫做“两头凑法”。这种方法是指在数学证明中，为了寻求证明的途径，既可从已知条件出发，又可从欲证结论出发，经过推理找到证明途径。如 $a>0$，$b>0$，$a \neq b$，试证 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$。用分析综合法证明时，可由已知 $a>0$，$b>0$，$a \neq b$，推出 $(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2>2ab$；又从结论出发，找到充分条件 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Longleftarrow a+b > 2\sqrt{ab} \Longleftarrow a^2+b^2+2ab > 4ab \Longleftarrow a^2+b^2>2ab$，于是找到了已知到未知的证明途径，结论得证。

分子有理化法　利用分子有理化解题的一种恒等变形法。其具体含义是：对于一个含有根号的代数式，可以通过乘以它的有理化因子并除以同一因子，从而把原式化成分子里不含根号的代数式。

例　解方程 $\sqrt{4x^2+5x-10} + \sqrt{4x^2+5x+23} = 1$。　①

解　将①式左端分子有理化，得

$$\frac{-33}{\sqrt{4x^2+5x-10} - \sqrt{4x^2+5x+23}} = 1,$$

即

$$\sqrt{4x^2+5x-10} - \sqrt{4x^2+5x+23} = -3。\qquad ②$$

由①、②解得 $x_1 = 2$，$x_2 = -\frac{13}{4}$。

分子有理化法在比较数的大小、解方程、解不等式、证明不等式、近似计算及极限运算中有着广泛的应用。

分母有理化法　利用分母有理化解题的一种恒等变形的方法。其具体含义是：对于一个含有根号的代数式，可以通过除以它的有理化因子并乘以同一因子，从而把原式化成分母里不含根号的代数式，这种变形过程叫做分母有理化，或叫做有理化分母。

例　化简

$$\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}。$$

解　原式可化为

$$\frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)。$$

分离系数除法 多项式除以多项式的一种简便计算方法。其运算步骤为：①把被除式与除式都按某一字母的降幂排列，只写出各项的系数，缺项以0补之；②用除式的首项系数除被除式首项系数，所得的商数为商式的首项系数；③用商式的首项系数乘除式，把所得的积分别写在被除式同类项下面，作减法，得第一余式各项的系数，余类推；④把所得的商式、余式填上字母，商式首项字母的指数是被除式的同一字母的指数减去除式中同一字母的指数所得之差。例如，用分离系数法计算$(2x^3+9x^2+3x+2)\div(x^2+4x-3)$，可如下进行

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2 & +9 & +3 & +2 & 1\ \ +4\ \ -3 \\
-) & 2 & +8 & -6 & & 2\ \ +1 \\
\hline
 & & 1 & +9 & +2 & \\
 & -) & 1 & +4 & -3 & \\
\hline
 & & & 5 & +5 &
\end{array}$$

得商式为 $2x+1$，余式为$5x+5$。

同样地，多项式乘以多项式而求乘积式时，亦可象作除法一样，用分离系数法作乘法。

分解因式的方法 一种恒等变形的方法。常用的方法有如下几种。

（1）提公因式法。其具体含义是：如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提出这个公因式作为多项式的一个因式；用这个因式去除这个多项式，所得的商式就是另一个因式；再把多项式写成两个因式的积，这个方法的理论根据是分配性质的应用。

例1 把 $2ax+4a^2y-6a^4z$ 分解因式。

解 $2ax+4a^2y-6a^4z$
$=2a(x+2ay-3a^3z)$。

（2）运用公式法。又称公式法。其含义是：反向运用乘法公式，将多项式写成因式积的形式。反向运用的乘法公式主要有平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$；立方公式 $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$；平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；立方的和与差公式 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$等。

例2 把 x^4-y^4 分解因式。

解 $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$。

（3）分组分解法。其含义是：将多项式的各项分组，先对各组分解因式，再对整体分解因式。

例3 把 $x^2-2xy+y^2+3x-3y+2$ 分解因式。

解 先分组，将前三项划为一组，第四、第五项划为第二组，2为第三组；再各组分解因式得 原式$=(x-y)^2+3(x-y)+2$；最后，由十字相乘法得 原式$=[(x-y)+2][(x-y)+1]=(x-y+2)(x-y+1)$。

（4）添项与裂项。是一种分组分解法。添项法又称补项法。其含义是：将多项式加上一个（或几个）新项，再减去相同的项，然后分组，使其结果有公因式可提或可运用公式。

裂项法又称拆项法。其含义是：将多项式的某一项（或某几项）一分为二，然后分组，使其结果有公因式可提或可运用公式。很多问题需要既添项、又裂项这两种方法同时运用。

例4　把 x^3+3x^2-4 分解因式。

解　先添（裂）项，添两项 $+2x-2x$，裂一项 $3x^2=2x^2+x^2$，得原式 $=x^3+2x^2+x^2+2x-2x-4$。再分组分解，得 原式 $=(x+2)(x^2+x-2)=(x+2)^2(x-1)$。

（5）待定系数法。对于有二次齐次项的多项式及其某些缺项的高次多项式的因式分解，用此法比较方便。如把 $3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$ 分解因式。首先设待定系数。若能分解，则两个因式应为一次多项式，且 x 项的乘积是 $3x^2$，y 项的乘积为 $-6y^2$，常数项的乘积为8。因此，若设第一个因式为 $(x+ay+b)$，则第二个因式应为 $(3x-\frac{b}{a}y+\frac{8}{b})$，所以

$$3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$$

$$\equiv(x+ay+b)(3x-\frac{b}{a}y+\frac{8}{b})。$$

再展开因式，得

$$3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$$

$$\equiv 3x^2+(3a-\frac{b}{a})xy-6y^2+(3b+\frac{8}{b})x+(\frac{8a}{b}-\frac{6b}{a})y+8。$$

然后，由多项式恒等的条件得方程组

$$\begin{cases} 3a-\frac{6}{a}=-7, \\ 3b+\frac{8}{b}=-10, \\ \frac{8a}{b}-\frac{6b}{a}=8。 \end{cases}$$

解之，得 $a=-3$，$b=-2$。于是，得原式 $=(x-3y-2)(3x+2y-4)$。

（6）求根公式法。若 x_1、x_2 是二次三项式 ax^2+bx+c $(a\neq0)$ 的两个根，则

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)。$$

例5　把 $2x^2-6x+4$ 分解因式。

解　$2x^2-6x+4$ 的根为 $x_1=2$，$x_2=1$；于是得

$$2x^2-6x+4=2(x-2)(x-1)。$$

（7）十字相乘法。又称交叉相乘法。是二次三项式因式分解的方法。其具体含义是：将四个实数 a_1、c_1、a_2、c_2 排列成方阵

$$\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix}$$

若两列的乘积 $a_1a_2=a$、$c_1c_2=c$，按斜线交叉相乘的积的和 $a_1c_2+a_2c_1=b$，那么二次三项式 ax^2+bx+c 可分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$。它的理论依据是

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2。$$

例如，将例5，排成如下方阵

$$\begin{matrix} 2 & & -4 \\ & \times & \\ 1 & & -1 \end{matrix}$$

再试数，得 $2\times(-1)+1\times(-4)=-6$。于是，得

$$2x^2-6x+4=(2x-4)(x-1)$$
$$=2(x-2)(x-1)。$$

（8）换元法。例如，分解因式

$$(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12。$$

可令 $y=3x^2-2x+1$，得原式 $=(y-2)(y-6)$。再将 $y=3x^2-2x+1$，代入上式，继续分解，最后，得

$$原式=(x-1)(3x+1)(x+1)(3x-5)。$$

（9）因式定理法。其含义是：对于多项式 $f(x)$，由 $f(a)=0$，得 $f(x)$ 的因式 $x-a$。再由综合除法，求出另一个因式。它的理论依据是因式定理和整系数多项式因式分解定理。

（10）轮换对称法。是利用多项式的对称性质分解因式的一种方法。例如分解因式 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$，易判知此多项式有因式 $a-b$。又由多项式是关于 a、b、c的轮换对称式，所以它还有因式 $b-c$，$c-a$，故设

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$
$$\equiv k(a-b)(b-c)(c-a)。$$

再由待定系数法，得 $k=3$，从而得

$$原式=3(a-b)(b-c)(c-a)。$$

（11）列表法。如果一元多项式的项数较多，不便于或不能用公式法分解时，可用此法。这个方法的步骤是：第一步列表。将多项式的系数按降幂排列于表中，若找一次因式，每组两项，若找二次因式，每组三项，填上第一项与末一项的系数，其余空着。第二步拆项配因式系数。按各组系数对应成比例拆项，拆首末两项之外的项的系数。第三步推出结果。

例 6　把$x^3-3x^2-10x+24$ 分解因式。

解　第一步　列表，得

多项式系数	1	−3	−10	24
第一组	1	（　）		
第二组		（　）	（　）	
第三组			（　）	24

第二步　拆项配因式系数，得

多项式系数	1	−3	−10	24
第一组	1	（−2）		
第二组		（−1）	（2）	
第三组			（−12）	24

第三步　推出结果，得

$$原式=(x^3-2x^2)+(-x^2+2x)+(-12x+24)$$
$$=x^2(x-2)-x(x-2)-12(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2-x-12)$$
$$=(x-2)(x+3)(x-4)。$$

方格法　求面积近似值的一种方法。其含义是：在所求面积上，打好方格。假定相邻平行线间的距离是 d，那末每一方格的面积为 d^2。设左下角格点落在所求面积 S上小方格的全体为N，则所求面积有下面近似公式：

$$S\doteq Nd^2。$$

计量方法　一种统计方法。它是研究测量事物标准的方法。

以盈补虚法　见割补法。

双曲旋转法　是借助于双曲变换进行映射的一种RMI方法。在平面M内任一点$A(x,y)$变到点$C\left(\frac{x}{k},ky\right)$的变换叫做双曲变换。这种变换是经过两次伸缩变换复合而得的。第一次是向着x轴的伸缩变换，它将任意点$A(x,\ y)$变到$B(x,\ ky)$，其中k为伸缩系数；第二次是向着y轴的伸缩变换，它将点$B(x,\ ky)$变到点$\left(\frac{x}{k},\ ky\right)$，伸缩系数为$\frac{1}{k}$。

双曲旋转有如下性质：

（1）双曲旋转将直线仍变成直线，且直线上任意两线段的比不变。

（2）双曲旋转将平行直线仍变成平行直线，且两平行线上线段的比保持不变。

（3）双曲旋转保持图形面积不变。

（4）双曲旋转将双曲线$xy=h$（h是任意非零常数）变到它自己，但其上的点（$x,\ y$）变到点$\left(\frac{x}{k},\ ky\right)$。该变换的名称正是由于这一性质而得。双曲旋转是伸缩变换的一种情形。

例　证明等轴双曲线任一切线与两条渐近线围成的三角形的面积为一定值。

证明　等轴双曲线$xy=h$的渐近线就是x轴与y轴，在双曲旋转下，x轴与y轴都变到自身，而双曲线$xy=h$任意一点$A\left(x,\ \frac{h}{x}\right)$可通过适当的选择$k$值而变到双曲线的顶点$C(\sqrt{h},\ \sqrt{h})$（$h>0$）或$\sqrt{-h}$，$-\sqrt{-h}$）（$h<0$）。所以$A$处切线$MN$变成$C$处的切线$PQ$，而$PQ$与两坐标轴围成的面积为一定值，故任意点$A$处的切线$MN$与两坐标轴围成的三角形的面积也为定值。

双轨迹模型　见轨迹交点法。

正交试验法　是概率统计方法之一种。它是以正交表为工具安排试验方案和进行结果分析试验的一种方法。正交表是根据组合理论，按照一定规律构造的表格。以符号$L_a(b^c)$表之，其中L表示正交表；下标a是正交表的行数，表示试验次数；c是正交表的列数，表示试验至多可以安排的因素个数；b是表中不同数字的个数，表示每个因素的水平数。试验方案制定步骤为：

第一步　确定试验中变化因素的个数及每个因素变化的水平。

第二步　分析各因素之间的交互作用，确定哪些是应该考虑的，哪些是可以暂时忽略的。

第三步　根据试验所涉及的人力、物力、财力和时间，确定可能进行的试验次数。

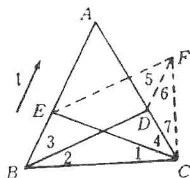
第四步　选用合适的正交表，安排试验。

去尾法　见近似数的截取方法。

平移法　是一种图形变换法。它是利用平移来解答数学问题的方法。其具体含义是：将给定图形之一部分从一个位置沿着一定方向平行移动到另一

位置，而得到一个新图形，借此来达到解决问题的目的。

例 证明有两条内角平分线相等的三角形是等腰三角形。

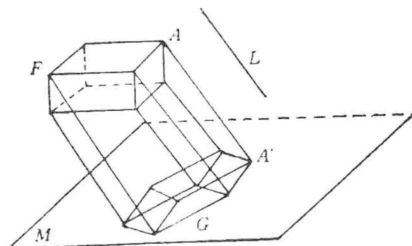


分析 此题直接证不太容易，可采用反证法证之。不妨设 $AB>AC \Rightarrow \angle1>\angle2$。为了利用 $BD=CE$ 这一条件，对BD沿方向 l 平行移动至EF。连结 FD、FC。$\angle3=\angle5$，$\angle5+\angle6=\angle4+\angle7$，固有 $\angle4>\angle5$，所以$\angle6>\angle7\Rightarrow DC>DF=BE$。然而在$\triangle BCE$ 和 $\triangle CBD$中，$\angle1>\angle2$且 $BC=CB$，$DB=EC\Rightarrow BE>DC$，矛盾。从而命题得证（$AB<AC$ 同理。而若 $AB=AC$，则问题已解决）。

利用平移法解题的关键在于被平移对象及平移方向、距离的有效选择。平移法在几何证明题及作图题中都有广泛的应用。它也是关系映射反演原则的一种具体运用。

平行线法 是处理多因素优选的一种方法。如有两个因素，当其中一个因素不易调整时，可先将不易调整的因素固定在 0.618 的位置上，对另一易调整的因素用单因素优选法进行优选，将差点外的平行区域去掉。这样继续进行下去，直到达到所要求的精度为止。

平行投影法 是借助于平行投影进行映射的一种 RMI 方法。平行投影是空间的一种仿射变换。设已知空间一直线L和一个不与L平行的平面 M，以及空间任意图形 F。对于F中任意一点 A，作直线 $AA'\parallel L$，且交平面M于A'，则A'称为 A 沿L方向在平面M内的射影。F的每一点在M内的射影组成的平面图形 G，称为F沿 L 方向在平面M内的射影(如图所示)。



将图形F变到图形 G的变换叫做平行投影。特别当$L\perp M$时，则图形G 称为F在平面M内的正射影，从F到 G 的变换称为正投影。L 不垂直于M时的平行投影称为斜投影。

平行投影有如下基本性质:

(1) 在平行投影下，不平行于投影方向的直线仍变为直线，并且原直

线上任意两线段的比等于变换后对应线段之比。

(2) 任意两条非投影方向的平行直线经平行投影仍变到平行直线。

利用平行投影及其性质，建立了二视图、三视图和直观图的一整套理论，从而形成了制图学专门的科学分支。在立体几何中，如果我们能够熟练地掌握平行投影及其性质，就能在画出的几何图形中较好地反映出平行、中点、平行线上的比例线段等性质，这就有助于发现解题途径。

平衡分析方法 一种概率统计方法。它是借助于平衡表研究国民经济中收入和支出、资源和需要等平衡关系的方法。

平均值代换法 见均值法。

归一法 见比值法。

归纳法 见归纳推理。

归谬法 见反证法。

归纳推理 又称归纳法。是从一般性较小的前提推出一般性较大的结论的推理。它是由个别过渡到一般的推理。例如，通过一些个别数学问题的解法推得这类问题的一般解法或者公式，通过一些具体数据的计算结果来推出一般的结论，都是归纳推理。归纳推理的前提是一些关于个别事物或现象的判断，而结论是该类事物或现象的普遍性判断。因此，归纳推理的结论超出了前提的范围，其结果具有或然性，可能真，也可能假。

根据归纳对象是否完备，归纳法可分为完全归纳法和不完全归纳法。

归纳推理是人们经常运用的一种思维形式。人们对客观事物的认识，是通过实践活动，接触一个个具体事物，作出许多个别性判断，然后得出一般性的结论。因此归纳推理反映了客观事物个别与一般的联系，反映了人的认识从个别、特殊到一般的过程。数学中许多发现都是通过归纳推理得来的。例如，著名的哥德巴赫猜想就是通过观察自然数

$6=3+3$，

$8=5+3$，

$10=7+3$，

$12=7+5$，

$14=11+3$，

……

发现等号的左端都是偶数，且最小的偶数是6，右端是两个奇素数之和。然后作出一般性的判断而提出的，即任何大于等于6的偶数都可以表示成两个奇素数之和。在数学教学中运用归纳推理引入概念和原理，易于为学生所理解，有利于培养学生从个别问题中抽象概括一般结论的能力。在解决问题的过程中，如果一个一般问题不好解决，可先从特殊情况入手，之后再进行归纳，最终解决一般问题。

四舍五入法 见近似数的截取方法。

出入相补原理 见割补法。

生成函数法 见母函数法。

矢量法 见向量法。

代点法 解析几何中的一种常用方法。它是将解题时假设的辅助点的坐标代入有关的曲线方程，从而达到解题目的的一种方法。

例 经过 $P(3,-1)$ 作一直线，使它被双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 所截得的线段被P平分。

解 设弦的两端点为 $A(x_1,$

$y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1, & ①\\ \dfrac{x_2^2}{4}-y_2^2=1。 & ②\end{cases}$$

①－②经整理得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}-(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0。③$$

由中点坐标公式，得

$$x_1+x_2=6,\quad y_1+y_2=-2。$$

代入③并化简得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{3}{4}$，这就是$AB$的斜率，故所求的直线方程为

$$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)。$$

代入验证法　见解数学选择题的方法。

代入消元法　是使含有多个未知元的方程组减少未知元个数，以达到解方程目的的一种方法。其具体含义是：对于n个未知元的方程组

$$F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,$$
$$F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,$$

如能从某一个方程中解出其中一个未知数x_k：

$$x_k=\varphi(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n),$$

然后把上式代入其余的各个方程，那么，就得到一个不含x_k的$n-1$元方程组。对于所得的$n-1$元方程组，如能继续运用代入消元法，可得出$n-2$元方程组。如此作下去，直至得出一个一元方程，就可最终解出原方程组。

例　求解二元方程组

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=1, & ①\\ 2x_1+3x_2=5。 & ②\end{cases}$$

解　从②可得　$x_1=\frac{1}{2}(5-3x_2)$。将这一表示式代入①中，得

$$\frac{3}{2}(5-3x_2)+4x_2=1。$$

从而有 $x_2=13$，$x_1=-17$。

代数作图法　作图的一种方法。它是利用代数计算解作图题的方法。例如，作圆内接十边形，可用代数法求出边长a_{10}和半径R的关系$a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$，再完成作图。

外推算法　数值计算中的计算近似值的一种方法。要求某一问题的精确解u，对于已求得近似解$u_{\frac{h}{2}}$，u_h，通过外推公式

$$u_h'=\frac{1}{3}(4u_{\frac{h}{2}}-u_h),$$

$$u_h''=\frac{1}{15}(16u_{\frac{h}{2}}'-u_h'),$$

以得到高精度的近似解u_h'，u_h''，其中$u_h'-u$的误差为h^4阶，$u_h''-u$的误差为h^6阶。如果继续外推，一般地，外推公式为

$$u_h^{(n)}=\frac{1}{4^k-1}(4^k u_{\frac{h}{2}}^{(k-1)}-u_h^{(k-1)}),\ k=1,2,\cdots,m-2。$$

于是 $u_h^{(n)}-u$ 的误差可达 $h^{2(k+1)}$ 阶。

这一算法的理论基础是近似值 u_h 与精确值 u 可以表示为关于 h 的展开式

$$u_h=u+a_1h^2+a_2h^4+\cdots+a_{m-1}h^{2(m-1)}+\theta_hh^{2m},$$

其中 a_i（$i=1, 2, \cdots, m$）与 h 无关，θ_h 当 h 较小时，有与 h 无关的界 $|\theta_h|\leqslant M$。

例 利用单位圆内接正多边形的半周长来逼近圆周率 π。设圆内接正 n 边形的边长为 a_n，令 $\pi_n=\dfrac{1}{2}na_n$，则有 $\pi_n\approx\pi$，利用公式 $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$ 对于不同的 n，可以得到 π_n 的近似值，例如 $\pi_3=2.59808$，$\pi_6=3$，利用外推公式得

$$\pi_3^1=\frac{1}{3}(4\pi_6-\pi_3)=\frac{1}{3}\cdot(4\times3-2.59808)=3.13397。$$

当 $\pi_{24}=3.13263$，$\pi_{48}=3.13935$ 时，利用外推公式得

$$\pi_{24}'=\frac{1}{3}(4\times3.13935-3.13263)=3.14159。$$

这一精确度已相当于 π_{1536}，达到小数点后第6位。

外推算法在数值计算的各个领域中都有广泛的应用。它计算简单，精度提高快，且便于在计算机上实现。

记数法 即计数的方法。如果以 r 为基数，任何一个正整数 N 都可以唯一地写成

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0,$$

其中 r 是大于1的整数，a_0，a_1，$\cdots$，a_n 都是小于 r 而大于或等于零的整数。N 简记为 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_{0r}$。这种记数法叫 r 进制，所记的数 N 叫 r 进数。例如 2356_8 是一个八进数，表示 $2\times8^3+3\times8^2+5\times8^1+6$。$110010_2$ 是一个二进数，表示为 $1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0$。最常用的是十进制记数法，就是以10为基数，逢十进一位，逢百进两位，逢千进三位，逢万进四位，等等，且把一个数从右到左分成个位数、十位数、百位数、千位数、万位数等等。任何一个正整数 N，可有且只有一个十进位制表示形式 $N=a_k\times10^k+a_{k-1}\times10^{k-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$，其中 a_0，a_1，$\cdots$，a_k 都是 0，1，2，…，9 中的一个整数。通常把 N 简记为 $a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0$。例如 $4786=4\times10^3+7\times10^2+8\times10+6$。10叫做十进制记数法的"基数"，用十进制表示的数，叫做十进数。

加零法 是组合方法的一种常用技巧。它是指在一个数学式子里，加上一个数学因子，同时再减去同一个数学因子，而得到原式的一个恒等变形，以利于问题解决的一种手段。

例 将式 x^4+4y^4 分解因式。

解 原式加上 $4x^2y^2-4x^2y^2$ 得 $x^4+4y^4=x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2+2xy)\cdot(x^2+2y^2-2xy)$。

数零具有各种不同的表现形式，针对不同的数学问题，应选择相应的恰当形式加到数学式子中去，以利于组合法的顺利应用乃至问题的最终解决。虽然对一个式子加、减同一项，在值上看是一样的，但形式上有所变化，这种变化往往增加了问题解决的机会。加零法是解题中的一个基本技巧，在数学中有着广泛的应用。

加权平均 对一组数取平均的一种方法。其具体步骤是：设有两组数 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 和 w_1，w_2，…，w_n，将这两组数对应乘起来，取其和，再对所得结果除以其中之一组数之和，记为

$$\overline{x_w}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n},$$

其中 w_i 叫做 x_i 的对应权。在计算用不同方法或不同条件观测同一物理量的均值时，常对不同可靠程度的数据给予不同的权，在这时用这种方法取平均更能反映客观实际。

加减消元法 是通过减少方程组中未知元个数以求出方程组的解的一种方法。其具体含义是：对于 n 个未知元的方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,\\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0.\end{cases}$$

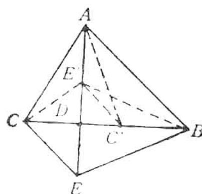
取其中任意两个方程 $F_i=0$ 和 $F_j=0\ (i\neq j)$，如果能求出常数 p_i 和 q_j，使得诸

$$p_iF_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)+q_jF_j(x_1, \cdots, x_n)=0$$

是不含同一未知元的 $n-1$ 元方程，那么，原来的 n 元方程组就可归结为 $n-1$ 元方程组。对得出的 $n-1$ 元方程组，继续运用加减消元法，可得出 $n-2$ 元方程组。如此继续下去，直至得出一元方程，从而可最终解出原方程组。

对称法 借助于对称变换进行映射的一种 RMI 方法。将平面图形 F 变到关于直线 L 与它成轴对称的图形 F'，这样的合同变换称为关于直线 L 的对称变换。

例 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，E 是 BC 边上的高 AD 延长线上的一点，$AD>DE$，则 $EB-EC>AB-AC$。



证明 以 BC 为轴，将 $\triangle BEC$ 翻折到 $\triangle BE'C$ 的位置，又以 AD 为轴，将 $\triangle ACD$ 翻折到 $\triangle AC'D$ 的位置。于是命题归结到证明

$$E'B+AC'>AB+E'C'。$$

根据四边形对角线之和大于任一对边之和，这显然是成立的。于是原命题得证。

对于图形具有对称特征的几何题

都可考虑用对称变换找出或作出对称轴，或者尝试添设辅助元素，以沟通条件与结论或条件与问题之间的联系，以揭示出解题途径。当问题中由于讨论折线而感到困难，可尝试对折线的一节或若干节逐次进行对称变换，化折线为直线，从而解决问题。在解析几何中用对称变换可简化曲线方程，探明曲线的性质。

对称变换不仅仅是局限于关于直线的轴对称变换，还有其它各种各样的形式，因而它有着广泛的应用。

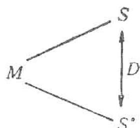
对偶原理　是指在某一个抽象的数学系统中，如果存在对偶元素

$$A_i \longrightarrow A_i^1,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

和对偶运算

$$M_j \longrightarrow M_j^1,\quad j=1,2,\cdots,m,$$

使得系统本身的公理组在这种对偶变换下是对偶的，则当将其中的定理（由A_i和M_j构成）S中的A_i，M_j都换成对偶元素A_i'，对偶运算M_j^1时，便得到S的对偶定理S^0，且一旦S的真被证实，则S^0一定真。假若以D表示对偶变换，则上述对偶原理可图示如下



例如，在射影几何中，有些成对的定理，如帕斯卡定理——内接于二次曲线的六边形的三对对边的交点共线和布列昂甸定理——连接外切于二次曲线的六边形的相对顶点的三条对角线共点，是一种对偶关系，后面的定理可以视作由前面定理将相应的点换成直线，直线换成点，内接于换成外切于而得到。于是射影几何中的对偶原理是指：对于平面上一个只涉及点与直线的关联关系的定理，如果把其中的点和直线及其关联关系对换，就得到一个新定理，叫做原定理的对偶。如果原定理证实，那么其对偶定理一定成立。

对偶是一种广义的对称。对称是数学美的重要特征之一。因此，对偶原理从方法论的角度来讲，便是数学美学方法的一个具体体现，并且这一美学方法又与真紧密联系在一起的，因此这一原理不但可以诱导出一些新定理来，而且如果这原理是在严格的公理化基础上建立起来的，那么只要原定理进行推证了，它的对偶定理就无需再证了。这就大大简化了理论的叙述。这一原理有着广泛的应用价值，它存在于许多数学领域中，下面我们再来看一下一般布尔代数中的对偶原理。

如果一个集合M至少含有两个不同的元素e_1，e_2；并且其上定义了一个一元运算“$'$”和两个二元运算“$\oplus$，$\odot$”。这三种运算在M上都封闭，且满足如下四条基本规律：

① $x\oplus y=y\oplus x$，　$x\odot y=y\odot x$；

② $x\odot(y\oplus z)=(x\odot y)\oplus(x\odot z)$，$x\oplus(y\odot z)=(x\oplus y)\odot(x\oplus z)$；

③ $x\oplus e_1=x$，$x\odot e_2=x$；

④ $x\oplus x'=e_2$，$x\odot x'=e_1$。

则称M为一般的布尔代数系统。

在M公理系统中给出一个定理，如果将该定理中的⊕、⊙、e_1、e_2依次换成⊙、⊕、e_2、e_1，则得到一对偶定理。如果原定理证明其为真，那么对偶定理的正确性也就被证明了。

对称推理法 是根据对称性，去设想和预测未知对象的一种推理方法。例如，知道函数$y=x^2$的性质，由对称性就可推知函数 $y=-x^2$ 的性质。

对数计算法 是RMI方法的一种具体表现形式。其具体含义是：为了计算出某一数学式子的具体数值，先对其取对数，通过查对数表，经过简单的运算之后，对所得的结果再查反对数表，这样就计算出所要求的数学式子的具体值（或利用含对数运算的计算器）。

例 计算 $y=0.178\times\sqrt[3]{0.4963}$。

解 (1) 取对数

$$\lg y=\lg(0.178\times\sqrt[3]{0.4963})=\lg0.178+\frac{1}{3}\lg0.4963。$$

(2) 查表计算

$$\lg y=\left[-1+0.2504+\frac{1}{3}(-1+0.6958)=-0.9510。\right.$$

(3) 查反对数表

$$y=0.1409。$$

显然，上述计算过程是关系映射方法的一个具体运用。

在上述计算中，利用对数函数在正实数集合与实数集之间建立了对应（映射）。由于积（商）的对数等于对数的和（差），幂的对数等于底数的对数与指数的积，等等。因此，这也就在整体上实现了由较复杂的运算（乘除、乘方、开方）向较简单的运算（加、减、乘、除）的转化，也正由于这一转化，对数计算法的创立在历史发展中具有重要的意义。正如拉普拉斯所说："对数计算通过缩短计算时间，而延长了天文学家的生命"。

对数代换法 是将一个对数式设为一个变量，从而达到解决问题目的的一种变量代换法。

例 解方程 $\frac{1}{12}\lg^2x+\frac{1}{4}\lg x-\frac{1}{3}=0$。

解 设 $y=\lg x$，则原方程化为

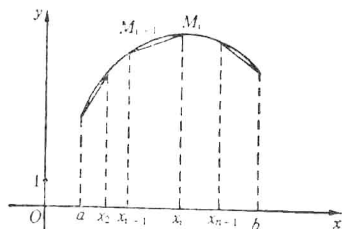
$$y^2+3y-4=0。$$

解此一元二次方程得 $y_1=1$，$y_2=-4$。代入 $y=\lg x$得$x_1=10$，$x_2=0.0001$。经检验知此为原方程的根。

由上面例子可见，用对数代换法可将对数方程化归为代数方程求解。形如 $f(\log_a y)=0$ 的方程，一般可用对数代换法求解。

矛盾转化法 借助于矛盾双方的相互转化发现问题和解决问题的一种辩证逻辑方法。数学中存在着各种各样的矛盾，如数学概念中的直与曲、常量与变量、已知与未知、等量与不等量、连续与不连续、一般与特殊、有限与无限、必然与偶然、明晰与模糊、精确与近似以及数学运算中的加与减、乘与除、乘方与开方、微分与积分等都表现为矛盾的对立统一形式。它们相互渗透，彼此依存，不可分割，并在一定的条件下相互转化。利用矛盾双方在一定条件下相互转化

是数学研究中一个普遍的思想方法，对数学的发展有着重要的指导意义。例如，当把曲线视为直线，把直线视为曲线的思想方法在数学上得以实现的时候，曲转化为直，直也转化为曲，这种转化开拓了数学的广阔前景。从这个角度来看，高等数学的建立与发展得力于直与曲的转化。实际上，曲与直相互转化的方法是微积分乃至全部高等数学的重要的必不可少的方法。初等数学能求出直线的长度，但无法求出曲线的长度。高等数学之所以能够解决求曲线弧长问题，是因为它采用了以直代曲、曲直转化的思想方法。下面以求〔a，b〕上的曲线段 $f(x)$ 的长度为例来说明以直代曲、曲向直的转化。如图所示，将区



间〔a，b〕分成几份：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，以直线 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 代替 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，即在很小的区间〔$x_{i-1}$，$x_i$〕上以直线段代替曲线段，得曲线长的近似表达式

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2+(x_i-x_{i-1})^2}\text{。} \quad ①$$

设 $f(x)$ 有连续导数，则得

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)\Delta x_i,\quad \xi_i\in(x_{i-1},\ x_i)\text{。}$$

代入①式得

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\text{。} \quad ②$$

显然，当区间〔a，b〕分得越来越细时，折线也越来越接近曲线。因而，将②取极限，就得到曲线弧长公式

$$\overset{\frown}{M_0M_n}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\text{。}$$

发生函数法　见母函数法。

母函数法　又称发生函数法，或生成函数法。它是以母函数为映射象的一种映射反演方法。下面先给出母函数的含义，然后再给出母函数法的具体描述。对于无穷数列 a_0，a_1，a_2，…，定义形式幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为它的母函数。这里，由数列 $\{a_n\}$ 到它的母函数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的一个映射，通常叫做幂级数变换。在研究诸如数列 $\{a_n\}$ 的结构之类的离散性数学对象时，首先利用幂级数变换，使数列 $\{a_n\}$ 与它的母函数对应起

来，这样人们就可把一个离散性的数列对象转化成一个便于处理的连续性幂级数对象。然后对母函数的性质与运算等方面进行研究，取得有关结果之后，再返回到数列 $\{a_n\}$ 中来（借助于特殊化等手段），以求得所需要的结果。这种解决问题的方法，称为母函数法。

例 证明恒等式

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0。$$

证明 数列 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n 的母函数为

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n,$$

对于这个母函数进行考察，据牛顿二项式定理有

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n。$$

再返回到 $\{C_n^k\}_{k=0}^n$，在上式中，令 $x=-1$，就得到

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^kC_n^k+\cdots+(-1)^nC_n^n=0。$$

母函数法是利用连续幂级数处理离散对象问题的一种方法，它也是一种一般化和特殊化相继运用的方法。它在数列求和、级数求和、某些组合恒等式证明、解不定方程及产生特殊函数等方面具有广泛的应用。

列表法 将数字、图形或数学式子有秩序地排列成横行或纵行，以此进行数学计算或发现数学规律的一种方法。

例 求证 $1!\,2!\,3!\cdots n!=$

$$\frac{(n!)^{n-1}}{3\cdot4^2\cdot5^3\cdots n^{n-2}}。$$

分析 为了探求解题途径，根据题目的特点，设计如下数表：将数 1，2，3，…，n 填入 $(n-1)$ 行 n 列表中，然后用一直线将表格分成两部分，如表所示。通过观察，易发

1	2	3	4	5	6	…	$n-1$	n
1	2	3	4	5	6	…	$n-1$	n
1	2	3	4	5	6	…	$n-1$	n
1	2	3	4	5	6	…	$n-1$	n
						…		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	2	3	4	5	6	…	$n-1$	n

现表中所有数之积为 $(n!)^{n-1}$，直线右边上三角部分所有数之积为 $3\cdot4^2\cdot5^3\cdots n^{n-2}$，直线左边下梯形部分所有数之积为 $2!\cdot3!\cdots n!=1!2!3!\cdots n!$。由此可知，欲证等式成立。

列表法在数学中有着广泛的应用。为了方便计算，人们设计了各种各样的表格。如九九表、平方表、立方表、开方表、对数函数表、三角函数表等。列表法不但可用于计算，它还是函数的一种表示方法。由于表格简洁、直观、醒目，因此通过列表可以发现数学规律，有助于探索解题途径。利用列表法解题，首先要根据具

体问题的特点设计出不同形式的表格，然后对表格再进行不同的划分等手段，从而达到解题的目的。

列元素消元法 见消元法。

有序化方法 一种特殊化的方法。其含义是：在给定的问题中，出现多个元素时，可把这些元素按照一定的规则重新排列，从而使一般问题化归为特殊问题，以此达到解决问题目的的一种化归方法。

例 已知平面上有 $2n+3$ 个点（其中无三点共线，无四点共圆），那么必有一个圆过其中三点，而其余 $2n$个点各有一半分别在圆内和圆外。

证 在 $2n+3$ 个点中必存在两点A，B，使得其余 $2n+1$ 个点在直线 AB 的同一边。又根据题设可把 $2n+1$ 个点 p_1，p_2，…，p_{2n+1} 分别与 A、B 作圆，其圆的半径不妨设为 $r_1<r_2<\cdots<r_{2n+1}$（这里就是在运用有序化方法），于是过点A、B、p_{2n+1} 三点所作的圆，必使点 p_1，p_2，…，p_n 在圆内，点p_{n+2}，p_{n+3}，…，p_{2n+1} 在圆外。于是问题得证。

有序化方法在证几何题、不等式及方程组求解、不定方程求解以及填数问题求解等方面均有广泛应用，它是数学中一个十分有用的解题思想方法。

有限差分法 见差分法。

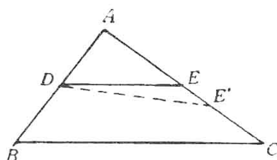
存在性抽象 一种数学抽象方法。它是指与客观世界之间的距离非常遥远，以致被看成脱离真实事物的、出于美学考虑的、主要是靠理性抽象思维而产生的数学概念的立足过程。即对于原先往往被认为不存在的所谓“理想元素”，先用假设的方法肯定其存在性，并由此发展出一定的数学理论，而后在理论和实践的结合中，解释所得新理论的合理性。例如，无理数、负数、虚数以及无穷远点、无穷远直线等概念的产生，从某种意义上说，都是由存在性抽象方法建立起来的。下面对虚数概念的产生作以较详细的追述。虚数概念的产生渊源于方程的研究。最早遇到这种数的人，是法国舒开(1484年)。但第一个认真讨论这种数的人是文艺复兴时期意大利的卡尔达诺。他于1545年提出一个问题：“把10分成两部分，使它们的乘积是40。”他解方程 $x\cdot(10-x)=40$ 时，结果解出分别为（$5+\sqrt{-15}$）与（$5-\sqrt{-15}$）的两个根。卡尔达诺觉得奇怪，便称 $\sqrt{-15}$ 是“诡辩量”。并且自我解嘲地说：“不管我的良心会受到多大的责备，但是，的的确确（$5+\sqrt{-15}$）乘（$5-\sqrt{-15}$ 刚好是40”。几乎过了100年，1637年笛卡尔才给这种“虚幻之数”取一个名子叫“虚数”。又过了140年，大数学家欧拉还是说这种数只是存在于“幻想之中”，并用i (imaginary) 来表示它的单位$\sqrt{-1}$。可见在最初虚数是作为一种合乎逻辑的“假想的数”得以引进的，并在后来进一步的发展中才被证明了其对数学研究具有重要的意义。源于整齐美的考虑，只有承认虚数，或更一般地，复数的合理性，才能证明代数基本定理：任一实（复）系数的一元 n 次方程在复数域内必有 n 个根。直到挪威数学家韦塞尔找到了复数的几何表示法，复数才在数学中找到了“立足之

地”，并在地图测绘学上找到了其应用。19世纪以后，复变函数论得到了飞速的发展。这与它在空气动力学、流体力学、电学、热学和理论物理等领域的广泛应用有关。由上述例子可以看出，对于存在性抽象的概念，往往需要一个较长的时间才能被完全确立起来。在此之前，如果我们没有充分的理由说明其不合理性，就应该允许它存在，不能简单地否定它，而应让尔后的实践去检验它。

轨迹交点法 简称交轨法，亦称双轨迹模型。是一种特殊的交集法。其具体含义为：如果把待求的问题归结为要确定某一个点的位置，这时可把已知条件分成两部分，使得未知点皆形成一个轨迹，那么两个轨迹的交点便是欲求的点。例如，作已知三角形的外接圆。把这一问题归结为求圆心 O 的位置。此时，问题的未知量是确定 O 的位置，已知量是三角形的三个顶点 A、B、C，其条件是 $OA=OB=OC$。把条件分成如下两部分：第一部分，$OA=OB$；第二部分，$OA=OC$。前者对应的轨迹是AB的垂直平分线，后者对应的轨迹是 AC 的垂直平分线，这两条直线是很容易作出来的。这样二者的交点便是欲求的O的位置。这种方法在几何作图中有着广泛的应用，凡属几何作图问题，几乎都涉及到交轨法。有效地运用此法的关键在于给出条件的恰当划分。

同一法 是一种证明问题的方法。其具体含义是：对于符合同一法则的命题，当直接证明有困难时，可以改证与它等价的逆命题，只要它的逆命题正确，这个命题也就成立。一般情况下，逆命题和原命题是不等价的。特别，当命题的题设条件和结论都唯一存在，它们所指的概念外延完全相同，是同一概念时，那么逆命题与原命题是等价的。这一性质称为同一法则。同一法是一种间接证明方法，常用于证明符合同一法则的几何命题。其证题步骤为：①作出与结论相符的图形；②证明所作图形与已知条件相符；③根据唯一性，确定所作图形与已知图形重合；④判断原命题的真实性。

例 1 已知在$\triangle ABC$中，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（如图所示），求证 $DE /\!/ BC$。



证明 过 D 作DE'，使 $DE' /\!/ BC$，交AC于E'，则

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}。$$

由题设条件知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

所以有 $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$，故

$\frac{AE'+E'C}{E'C}=\frac{AE+EC}{EC}$，即

$\frac{AC}{E'C}=\frac{AC}{EC}$，因此得 $E'C=EC$。

又由于E与E'都在AC上，且都在 C

的同侧，所以 E' 与 E 重合。因而 DE' 和 DE 重合，故有 $DE \parallel BC$。

凡是符合同一法则的几何命题都可用同一法来证明。在平面几何中，这样的命题有：①过两点有且仅有一条直线；②两直线相交有且仅有一个交点；③一线段有且仅有一个中点；④一角有且仅有一条角平分线；⑤过已知直线外的一个已知点，有且仅有一条直线平行于已知直线；⑥过一点有且仅有一条直线垂直于已知直线；⑦按定比内（外）分已知线段，内（外）分点唯一存在；⑧过圆周上一定点的切线唯一存在，等等。应用这一方法证明命题必须注意题设条件与结论是否具有唯一性，是否为同一概念，否则将会产生错误。例如，“平行四边形的一组对边互相平行”是真命题。但是这一命题的已知条件“平行四边形”与结论“一组对边互相平行的四边形”并不是同一概念。这时如果运用同一法证明逆命题“一组对边平行的四边形是平行四边形”将是错误的，也是不可能的。有时也可用同一法证明某些代数与三角命题。

例 2　证明 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$。

证明　设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=x$。两边立方得

$$2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\cdot(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})=x^3,$$

所以 $4-3x=x^3$，即 $x^3+3x-4=0$。分解因式得

$$(x-1)(x^2+x+4)=0。$$

因为 $x^2+x+4>0$，所以 $x=1$，即

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1。$$

同解变形法　借助同解变形达到解题目的的一种求值方法。这种方法的实质就是 RMI 方法。其具体含义是：把方程或方程组、不等式或不等式组的求解问题变形为同解的方程或方程组，不等式或不等式组的求解问题。

例　已知二次方程 $x^2+ax+b=0$（a，b是实数）的两根均大于 2，试求出a、b的关系式。

解　设 $x=y+2$，则

$$(y+2)^2+a(y+2)+b=0。$$

经整理得 $y^2+(4+a)y+4+2a+b=0$。

于是

$$\begin{cases} y_1+y_2=-(4+a)>0, \\ y_1\cdot y_2=4+2a+b>0, \\ \Delta=(4+a)^2-4(4+2a+b)\geqslant 0。\end{cases}$$

解上述不等式组，得

$$-2a-4<b\leqslant\frac{a^2}{4}，且 a<-4。$$

对于求值计算、解方程、不等式

之类的求值问题要求变形过程保持同解、等效。不然就难以保证结果的正确性。A 同解变形到 B，等价于说，在问题解意义上，A 和 B 互为充要条件。

同真假联合法 一种等价变换法。它是指辅加一个同真假命题的一种组合证明不等式的方法。其具体含义是：欲证 $A \geqslant B$，若 $C \geqslant D$ 与 $A \geqslant B$ 同真假，则只需要证明 $A+C \geqslant B+D$ 即可。

例 设 a、b、c 是三角形的边长，求证

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b) \geqslant 0, \quad ①$$

并确定等号成立的条件。

证明 将①中每一项中的两个字母轮换，则由①得

$$c^2b(c-b)+a^2c(a-c)+b^2a(b-a) \geqslant 0。\quad ②$$

经过轮换之后，条件 $a+b-c>0$，$b+c-a>0$，$c+a-b>0$ 仍然成立。因此得知①与②同真或同假。由①+②，得

$$\begin{aligned} &b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+ \\ &a^2b(a-b)+c^2b(c-b)+ \\ &a^2c(a-c)+b^2a(b-a)= \\ &bc(b-c)^2+ac(a-c)^2+ \\ &ab(a-b)^2 \geqslant 0。\end{aligned}$$

因此①成立。当 $a=b=c$ 时，等号成立。

这种方法运用于证明对称、轮换形式的不等式，其思想方法还可以推广到某些非不等式问题的解决中去。有效地运用同真假联合法的关键在于找到恰当的命题 $C \geqslant D$，以便于 $A+C \geqslant B+D$ 的顺利解决。

曲线系法 是确定曲线方程的一种参数法。其具体含义是：欲求出同时满足若干条件的曲线方程，可先抓住特征明显的条件，其他条件暂视为参数，确立其曲线系，然后用待定系数法，求出所设参数，从而求出所需要的曲线方程。

例 求与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 共渐近线，且与直线 $5x-6y-8=0$ 相切的双曲线方程。

解 设所求的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=\lambda。\quad ①$$

①再与 $5x-6y-8=0$ 联立，得

$$x^2-5x+4+9\lambda=0。$$

令 $\triangle=25-4(4+9\lambda)=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$。经检验，知所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$。

应用曲线系法解决解析几何中有关曲线方程问题，简捷、明快。但必须进行检查。否则会导致不正确的结论。这是因为曲线系法的理论依据是曲线系定理的逆命题。曲线系定理的含义为："若曲线 $f(x, y)=0$ 与 $g(x, y)=0$ 交于点 p_1，p_2，…，p_n $(n \geqslant 1)$，则曲线系 $f(x, y)+\lambda g(x, y)=0$ 中的每一条曲线都同时经过点 p_1，p_2，…，p_n。"其逆命题为："若曲线 $f(x, y)=0$ 与 $g(x, y)=0$ 交于点 p_1，p_2，…，p_n $(n \geqslant 1)$，则同时经过点 p_1，p_2，…，p_n 的所有曲线所组成的曲线系为 $f+\lambda g=0$。"而此命题不完全成立。因

此在用曲线系法解题时，必须先对曲线系方程进行检查，看得的解是否有遗漏。若有，就设法找回来。如果全部遗漏，那就根本不能用曲线系法，而需要另择他法。

仿射变换法 借助仿射变换进行映射的一种RMI方法。若有$n+1$个平面π、a_1、a_2、…、a_{n-1}、π'，用平行射影建立(π, a_1)；(a_1, a_2)；…；(a_{n-1}, π')各自间的一一对应，则这n个平行射影的积叫做从平面π到π'的仿射对应。当π与π'重合时，此仿射对应称为仿射变换。若(x, y)、(x', y')分别表示原象点和象点的坐标，则仿射变换的代数表达式为

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + c_1, \\ y' = b_1x + b_2y + c_2, \end{cases}$$

其中$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。

例 椭圆上任意一点P的切线与椭圆在长轴两端点A_1、A_2的切线相交于B_1、B_2，试证$A_1B_1 \cdot A_2B_2$为定值。

证明 建立如图1所示的直角坐

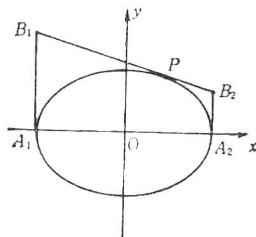


图 1

标系。设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$。作变换

$$\begin{cases} x' = \frac{b}{a}x, \\ y' = y, \end{cases}$$

则椭圆变为圆$x'^2 + y'^2 = b^2$（如图2所示）。在此变换下，A_1、A_2、B_1、B_2、P分别变为A_1'、A_2'、B_1'、B_2'、P'。因为过$P'(x_1', y_1')$的圆的切线方程为

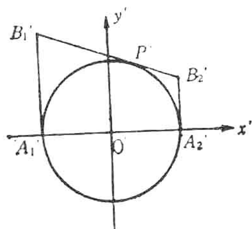


图 2

$x_1'x' + y_1'y' = b^2$。B_1'、B_2'的坐标为$\left(-b, \frac{b^2 + bx_1'}{y_1'}\right)$，$\left(b, \frac{b^2 - bx_1'}{y_1'}\right)$，所以$A_1'B_1' \cdot A_2'B_2' = \frac{b^4 - b^2x_1'^2}{y_1'^2} = b^2$。进行反演得$A_1B_1 \cdot A_2B_2 = b^2$。

由解析几何有关知识可知，所有椭圆（双曲线、抛物线）都是彼此仿射的，即可以通过适当的仿射变换而互相变换。这样一来，就可以通过一般（例如椭圆）向特殊（圆）的转化，来从事整个一类曲线的仿射性质

的研究。例如，从一般的三角方程 $y=a\sin(\omega x+\varphi)+b$ 出发，通过适当的仿射变换

$$\begin{cases} x'=\omega x+\varphi, \\ y'=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}, \end{cases}$$

就可以变形为特殊的三角方程 $y'=\sin x'$，从而也就可以用正弦曲线（即 $y=\sin x$ 的图象）为依据，并通过反演去得出原方程的曲线。对于解决初等几何的有关任意三角形及平行四边形等问题，可以适当利用仿射变换，将任意三角形变成正三角形、把平行四边形变成正方形，从而达到化繁为简、化难为易。对于这些特殊图形的问题解决之后，再反演到一般图形问题上去，从而达到原问题的解决。

似真推理 是推理的一种形式。它是对于已经明确的陈述命题，经过类比、归纳、有关的特例、一般的经验或者来自命题本身的简单化等，得知命题非常似真的一种推理。例如，对于哥德巴赫猜想这一命题，目前虽然还没有得到其严格的逻辑证明，但经过许多特例的验证和与之有关命题的证明，特别是陈景润对于1＋2的证明，使人们更加确信这一猜想的正确性。这种根据特例和与之有关命题的正确性推断哥德巴赫猜想更加正确的推理就是一种似真推理。似真推理虽然不能断定命题的正确性，但似真的根据是重要的。如果似真的根据是已经证明的数学命题，这本身就是重要的数学成果。对于一些数学难题，在获得严格证明极其困难的情况下，推测、似真的分析可以为命题的成立提供暂时的支持，最终可以导致发现严格的证明。

似真推理有渐弱证明式、渐弱启发式和启发式三种类型。例如，要证明命题 A 比较困难，但由命题 A 可推知命题 B，记为 $A\longrightarrow B$，而 B 易断定为真，这时，由 B 的真可以推知 A 更加似真。这就是一种启发式模式，有如下公式

$$\frac{\begin{array}{l} A\longrightarrow B \\ \qquad B\ \text{真} \end{array}}{A\ \text{更加似真}}$$

如果不能断定 B 为真，而可推知 B 更加似真，这时可推知 A 稍加似真。这是一种渐弱式的启发式，有如下公式

$$\frac{\begin{array}{l} A\longrightarrow B \\ \qquad B\ \text{更加似真} \end{array}}{A\ \text{稍加似真}}$$

如果可断定 B 不大似真，这时可推知 A 不大似真，这就是渐弱证明式，有如下公式

$$\frac{\begin{array}{l} A\longrightarrow B \\ \qquad B\ \text{不大似真} \end{array}}{A\ \text{不大似真}}$$

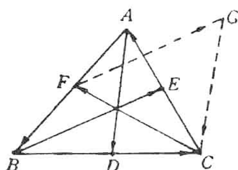
当然如果能断定 B 假，则推知 A 一定假，这就是证明式。如果由 B 推出 A，记为 $A\longleftarrow B$，这时亦可相应得出上述的一些模式；在 A 与 B 是不相容的情况，记为 $A|B$，同样有相应的推理模式。下面以表格形式把各种推理模式表述出来。

推理形式 命题间关系	证明式	渐弱证明式	渐弱启发式	启发式
推论之研究	$A\longrightarrow B$ B 假 A 假	$A\longrightarrow B$ B 不大似真 A 不大似真	$A\longrightarrow B$ B 更加似真 A 稍加似真	$A\longrightarrow B$ B 真 A 更加似真
可能根据之研究	$A\longleftarrow B$ B 真 A 真	$A\longleftarrow B$ B 更加似真 A 更加似真	$A\longleftarrow B$ B 不大似真 A 稍不似真	$A\longleftarrow B$ B 假 A 不大似真
相抵触的推测之研究	$A \mid B$ B 真 A 假	$A \mid B$ B 更加似真 A 不大似真	$A \mid B$ B 不大似真 A 稍加似真	$A \mid B$ B 假 A 更加似真

向量法　亦称矢量法。是关系映射反演原则的一种具体运用。其具体含义为：首先将所给问题中的条件与结论转化成向量关系，然后化简并证明之，最后将向量结论反演成原问题的解。

例　证明以三角形之三中线为边所成的新三角形的面积等于原三角形面积的$\frac{3}{4}$。

证　如图所示。首先将问题翻译



成向量语言。条件是：$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$。结论为：① $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$；② $|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{CF}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$。接下来证明这些结论。因为 $\overrightarrow{BE}=-(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，所以有 ① $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$；② $|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{CF}|=|-(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})\times(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$。最后，将此结论反演成几何语言，使得命题欲证之结论。

由上例可知，运用向量法解题的

三个步骤中，第一步是证题的首要条件，第二步是证题的中心环节，第三步是证明所欲达到的目的。第二步能否顺利完成，关键在于中间向量的有效选择上。所谓中间向量是指问题中已知的这样一些向量，借助于它们，问题中其他的一些向量便可得到明确的表示。如前例中的 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{BC}$ 、$\overrightarrow{CA}$ 即然。中间向量往往可以起到一个沟通已知和未知（如 $\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{CF}$ ）的作用。在选择中间向量时，宜尽量遵循以下几点：①选择的中间向量应和条件与结论有着某种本质的逻辑联系；②选择的中间向量的个数要适当，少了达不到解题的目的，多了又会使问题复杂化；③选择的中间向量应尽可能地使问题得到简化。在解题中常选的中间向量有这样一些：在具有角平分线（角内一般射线亦可）的问题中，在角的两边上选择单位向量作中间向量，则角平分线上的所有向量都可以通过它们的适当倍数和表示出来；在平行六面体（长方体、正方体等）的问题中，选取由同一点出发的三棱的对应向量为中间向量，则各面对角线和立体对角线均可由它们表示出来，等等。在用向量法解题时，人们常常注意到，在有定比分点的问题中，用向径表示几何图形中的有关点，有利于应用已有公式；在需要做较复杂的向量计算的问题中，利用坐标表示向量往往有利于计算；在中心对称图形中，通常选取对称中心作坐标原点或者向量的起点；在轴对称图形中常选取对称轴为坐标轴。另外，在解决向量问题的过程中，除了适宜地选择中间向量外，还要注意综合地运用向量及几何、代数、三角的知识，以便谋取最简捷的证题途径。

向量法可以用来解决几何问题中的等量、不等量关系问题，有关位置关系问题以及轨迹问题，等等。除此之外，向量法在解决复数问题、三角求和问题等方面亦有广泛的应用。

用向量法解决几何问题的实质在于将几何图形的性质和相互位置关系的讨论转化为向量的代数运算。在向量中有线性运算、数量积和向量积，并且向量既有有向线段表达式，又有坐标表达式，等等，根据问题的不同，可从中选取有关的向量知识来对问题求解。由于向量运算及其某些性质（如在不共面三方向上的分解）具有刻板的程序性，因而用向量法解题往往有章可循。当然，向量还有直观的一面，而这正为用形象思维寻求答案的突破口提供了方便。用向量法解题，从总体上讲，具有程序性和直观性相统一的特点。与纯几何和纯代数相比，在某种意义上说，它更能让人产生（数学）美的感受。

行列式法　见克莱姆法则。

全主元素消元法　见消元法。

交轨法　见轨迹交点法。

交会法　测量的一种基本方法。其含义是：当测站可通视各测点但测站到某些测点间的距离不能直接测出时所使用的方法。它的特点是把平板仪放在两个或两个以上的测站上，从每个测站向周围要测的点作方向线，利用这些方向线的交点来确定地面上各点在图纸上的相应位置。

交集法 一种特殊的分解组合法。其具体含义为：假若一个数学问题有 n 个条件 A_i，$i=1, 2, \cdots, n$，把满足其中每一条件 A_i 的解表示成一个集合 S_i，取 $S=\bigcap_{i=1}^{n} S_i$，则交集 S 满足问题的每一个条件，因此 S 即为问题的解。例如二元一次方程组的求解，倘若采用图象法解，即将两个方程的解各绘成一条直线，二者的交点即为方程组的解。此时用的就是交集法。交集法是数学中运用得很普遍的一种方法。凡是有多于一个条件的问题或可转化为此类情形的问题原则上皆可采用此法。对问题的条件进行有效的划分是解决问题的关键。

关系推理 间接演绎推理的一种形式。它是根据对象间关系的逻辑性质进行推演的推理，其前提和结论都是关系判断。

关系推理可分为直接关系推理和间接关系推理。从一个关系命题推出另一个关系命题的关系推理叫做直接关系推理。从两个关系命题推出一个关系命题的关系推理叫做间接关系推理。

直接关系推理分为对称性关系推理和非对称性关系推理。设 R 是定义在集合 S 上的一个二元关系，对于每个 x、$y\in S$，如果 xRy，就有 yRx，则称二元关系 R 在 S 中是对称的；否则，称为不对称关系。根据对称关系进行推演的关系推理叫做对称性关系推理。根据非对称性关系进行推演的关系推理叫做非对称性关系推理。

对称性关系推理，其推理规则为

$$\frac{x\ R\ y}{\text{所以，}y\ R\ x}$$

例1 设 AB、CD 是平面上两条直线，如果 $AB/\!/CD$，则由直线之间平行关系的对称性，依上述推理规则可得 $CD/\!/AB$，即

$$\frac{AB/\!/CD}{\text{所以，}CD/\!/AB}$$

数学中相等、平行、垂直、相似、同解等关系，都是各相应集合中的对称关系，均可用以进行对称性关系推理。

非对称性关系推理，其推理规则为

$$\frac{x\ R\ y}{\text{所以，}y\ \overline{R}\ x}$$

如 $x>y$，所以 $y\not>x$。

间接关系推理分为传递性关系推理和反传递性关系推理。设 R 是定义在集合 S 上的一个二元关系，对于每一个 x、y、$z\in S$，如果 $x\ R\ y$，$y\ R\ z$ 时，就有 $x\ R\ z$，则称关系 R 在 S 中是传递的；否则，称为反传递的。根据传递关系进行推演的推理叫做传递性关系推理。根据反传递关系进行推演的推理称为反传递性关系推理。

传递性关系推理，其推理规则为

$$\frac{\begin{array}{c}x\ R\ y\\ y\ R\ z\end{array}}{\text{所以，}x\ R\ z}$$

例2 设 a、b、c 是三个任意实数，如果 $a<b$、$b<c$，则由实数集上小于关系的传递性，依上述推理规

则，可得 $a<c$，即

$$\begin{array}{c} a<b \\ b<c \\ \hline \text{所以，} a<c \end{array}$$

数学中的相等、大于、小于、包含、平行、相似、同解等关系，皆是相应集合上的传递关系。

反传递性关系推理，其推理规则为

$$\begin{array}{c} x\ R\ y \\ y\ R\ z \\ \hline \text{所以，} x\ \overline{R}\ z \end{array}$$

例如，在平面内，$a\perp b$，$b\perp c$，所以 $a\ \overline{\perp}\ c$。

关系映射反演方法　亦称 RMI 方法。当处理具有关系结构S的数学问题有困难时，可以选择适当的映射把考察的问题所在的关系结构S映成与它有一一对应关系的关系结构S^*，在新关系结构S^*中把问题结果得到之后，再通过逆映射反演到S，从而求得问题所需的结果。这种处理问题的方法就叫做关系（Relation）映射（Mapping）反演（Inversion）方法。有时偏重于它在数学方法论中的一般性指导意义，则又称之为 RMI 原则。

RMI 原则的含义　为了确切地叙述这一方法，首先介绍几个有关的名词：

（1）数学对象。凡是可以用数学概念来表述的事物（对象）个体称之为数学对象。例如，数、量、数列、变数、函数、不等式、多项式、指数、函数值、点、线、面、几何图形、空间、集合、运算、导数、微分、积分、群、环、域、基数、序数、邻域、数学模型等等，都是数学对象。一般说来，数学对象必须具有三个性质：一是一意确定性，二是逻辑演绎性，三是特殊情况下的客体背景存在性。

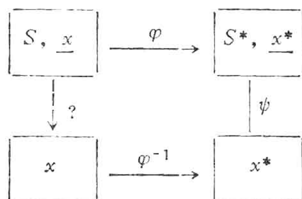
（2）关系结构系统。由一些对象构成的集合，如果它的元素（对象）间存在着某种或某些数学关系（如代数关系、序关系、函数关系等等），则称为关系结构系统。一般说来，数学关系结构系统必须满足如下三个条件：一是结构系统的对象必须是数学对象，二是对象间的联系必须是数学关系，三是结构系统具有某种整体性或可分解性。

（3）映射（或变换）。凡是两类数学对象或两个数学集合的元素间建立了一种对应关系，就定义了一个映射。特别，如果是一一对应关系，则称为可逆映射。凡是数学中使用的各种映射，统称之为数学映射。除此之外，如果一组事物及其关系能利用数学语言或符号抽象地表述成数学概念及概念间相互关系时，则此种抽象过程称之为概念映射。RMI 方法中所谈的映射是数学映射和概念映射。假设φ是一个映射，它把集合 $S=\{a\}$ 的元素映满另一集合$S^*=\{a^*\}$，其中a^*表示a的映象，a称为原象，记之为 $S\longrightarrow S^*$　$\varphi(a)=a^*$。如果S同时是一个关系结构系统，则称S是原象数学关系结构系统。若φ能将S映满S^*，且记之为 $S^*=\varphi(S)$，称S^*为映象数学关系结构系统。特别地，

假若原象数学关系结构系统S中包含一个未知性状的对象，$\underline{x}$，它是问题中需要确定性状的目标，则称$\underline{x}$为目标原象。在映射φ的作用下，$\underline{x}^*=\varphi(\underline{x})$，便称为未知目标映象。若未知目标映象$\underline{x}^*$能通过确定的定映手续$\psi$从映象数学关系结构系统$S^*$中寻找出来，则称映射$\varphi$为可定映映象。

（4）定映手续。凡数学中使用的种种演绎推理、证明方法、计算方法和查表方法等等，都称为数学方法。凡利用数学方法去确定映象的过程就称为定映手续。

至此，数学中的RMI方法可叙述如下：设S是一个含有未知原象$\underline{x}$的关系结构，φ是一个映射，它将原象关系结构系统S映射成映象关系结构系统S^*，其中包含着未知原象$\underline{x}$的映象$\underline{x}^*$（这里$\underline{x}^*$可记成$\underline{x}^*=\varphi(\underline{x})$）。如果通过定映手续$\psi$把$\underline{x}^*$确定为$x^*$，则通过反演，即逆映射$\varphi^{-1}$，就可相应地把$\underline{x}$确定为$x$（$x=\varphi^{-1}(x^*)$），这样原来的问题就得到了解决。利用RMI方法解决问题的这一过程可用框图表示如下



这整个过程包括如下几个步骤：

关系——映射——定映——反映——获解。

例　计算$y=\sqrt[5]{0.6842}$，可用对数计算法计算，具体过程分如下三步：

①取对数（映射）

$$\lg y=\lg\sqrt[5]{0.6842}=\frac{1}{5}\lg 0.6842;$$

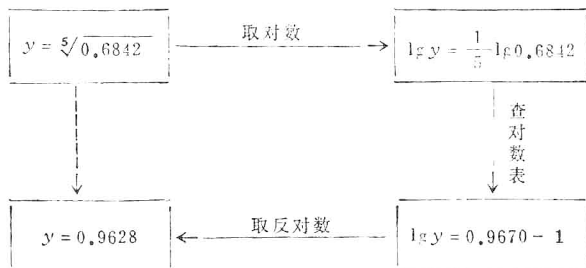
②查表计算（定映）

$$\lg y=\frac{1}{5}(0.8352-1)=0.9670-1;$$

③取反对数（反演）

$y=0.9268$。

上述计算过程用框图表示



RMI原则的类型　RMI方法可按不同标准来分类。从数学关系的结构情况，分为如下四类：①确定性关系结构类。在这种关系结构系统中，诸对象及其关系都是确定的或固定的，在确定未知目标原象x的过程中需用

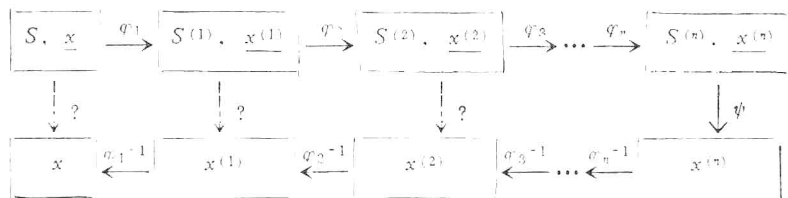
到确定性的数学方法。②随机性关系结构类。在这种关系系统中，诸对象的出现与否均具有随机性，诸对象间的关系也不是确定不变的，在确定未知目标原象 x 的过程中要用到概率论、过程论、以及数理统计学等方法。③模糊性关系结构类。在这种关系结构系统中，诸对象及其关系均具有模糊性，在确定未知目标原象 x 的过程中要用到模糊子集合理论及模糊逻辑等工具。④混合型关系结构类。从复杂多变的实际事物关系中抽象出的原象关系结构系统 S，以及映象关系结构系统 S^*，也可能兼具有模糊性和随机性，称为混合型关系结构类。处理这样一类问题，将用到综合性的数学工具。如果按照数学手段的不同，也可将 RMI 原则分为如下三类：①抽象分析原则类。抽象分析原则就是透过事物的现象，深入到事物的里层，将事物的本质抽取出来，从而就其事物的内部规律、对外部联系作出统一的、科学的阐述的一种科学思维的工作原则。它有两个显著特点：第一，它是借助于抽象化了的客体映象——概念等思维形式来进行思维的，第二，思维是按着严格的顺序推进的，只有遵循一定的程序和规则得出的结论，才被承认是正确的、合理的。在数学抽象分析思维中，仅保留了对象的量的特征，而舍弃了它的质的内容。因而数学模型方法与公理化方法都是抽象分析原则的具体运用。②等价变换原则类。假设给定了一个有等价关系 R 的集合 A，能使 A 中任意元素 a 均变为等价类 R_* 中的另一元素 a^* 的变换就叫做关于这个等价关系的等价变换。数学中应用同解变形、恒等变形、等价命题、相似变换来解决数学问题都属于等价变换原则类。③映射反演原则类。除了等价变换外，数学中的各种映射均属于此类。数学中的换元法、母函数法、特征函数法皆属于此类。

RMI原则的作用　RMI 原则是一个极具有普遍意义的方法原则。它属于一般科学方法论的范畴，其应用可渗透到现实生活、社会科学和自然科学各个领域中去。在数学中大致说来有如下四类用途：①作为探求证明数学命题的一种重要思路。对于一个数学问题，如果直接解决它较繁或有很大困难，就将该问题转化为另一个容易处理的问题，寻找一个适宜的映射，是解决个别数学问题常用的思路。关于这种例子无论在初等数学，或者在高等数学里是俯首皆是。②作为进行数学创造的一种方法原则。数学史表明，一个新的数学学科的出现往往与方法上的突破或向新方法转化密切相关。从辩证唯物主义观点来看，RMI 原则是方法上的转化与作用上的逆转的辩证统一，是否定之否定规律的具体体现。因此，利用 RMI 方法可以进行发明创造，导致新理论的产生，推进数学的发展。历史上解析几何的创立、微积分的发明、群论的产生无不与 RMI 原则紧密相关。③可解决理论的整体性结构的数学问题。RMI 原则不仅可解决某一个具体的数学问题，而且还可以用来解决涉及到理论的整体性结构的这种层次上的数学问题。例如，非欧几何的“相对相容性”的问题、著名的哥德

尔不完全性定理等这类更高层次上的数学理论问题的证明思想，实质上都是RMI原则的成功应用。④可论证数学上某些不可能性命题。在应用的性质上来说，RMI原则不仅能用来直接探索某些关系结构的未知原象，还可以用来分析论证数学上某些不可能性的问题和不可能性命题。例如，“三等分任意角”的不可能性的证明就是RMI原则的具体应用。

映射的选择　为了有效地采用RMI原则的框架去解决问题，引入恰当的映射是一个关键。所选择的映射φ最好使之符合三条标准：①在将原象关系结构系统转化成映象关系结构系统时，要能显示出化繁为简、化难为易或化生为熟的作用。②要能导致定映手续和反演过程的存在及能行性。③构造的映射应尽可能符合美学准则，即它应是自然的和简单的，又是形式上比较优美的。

有时从（S^*，$\underline{x^*}$）中还不容易直接找到定映手续ψ以确定x^*，则就需要进一步利用RMI程序或甚至多次利用。这种多步求解程序如下图所示



其中φ_i（$i=1$，2，…，n）为各种意义下的可逆映射。如上依次用了n个映射的RMI原则可简记为$(RMI)^n$。

映射能力的培养　对于一个人来说，寻求映射的能力至少包括五个方面：①理解原象关系结构的能力。②抽象分析的能力。③运用定映手续的能力。④掌握常用类型映射的能力。比如：解析法、复数法、母函数法、代数变换、初等几何变换等。⑤寻求反演公式的能力。为了培养上述映射能力，必须学好数学的各个分支学科及自然科学、工程数学的某些分支领域的理论知识。在学习数学各学科时，要注意多做些应用题，这对提高自己的抽象分析能力，运用数学符号表达式的能力和运用定映手续的能力，都是必不可少的基本训练。要掌握已有的各种变换的特征和实质，并对寻找它们的逆变换进行反复的练习，才能培养自己寻求相应的反演公式的能力。除了精通数学专业外，还要有较宽广的科技知识修养，要掌握好这些领域中的定律、法则和规律，这样才能有助于提高理解原象系统的能力。

设值法　将未知转化为已知的一种方法。其含义是：在解决问题过程中，将问题中某些数学表达式所代表的值设为已知，然后利用所给条件以及有关知识确定出这个已知所满足的数学关系，进而通过分析处理这个关系而

达到解决问题的目的。

例　求 $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$ 的值。

解　设 $s=\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ$，　①

$t=\cos10^\circ\cos30^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$。②

①×②可得

$$s\cdot t=\frac{1}{2^4}\sin20^\circ\sin60^\circ\sin100^\circ\cdot\sin140^\circ=\frac{1}{2^4}\cos70^\circ\cos30^\circ\cdot\cos10^\circ\cos50^\circ=\frac{1}{2^4}t,$$

故　$s=\frac{1}{2^4}$。

用这种方法可解决如下情况下的三角函数求值问题。第一，设集合 $M=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid 0<\alpha_i<\frac{\pi}{2}, i=1,2,\cdots,n\}$。若有 $\{|\frac{\pi}{2}-2\alpha_i| \mid i=1, 2, \cdots, n\}=M$，则用设值法可求出 $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_n$ 的值，且有 $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_n=\frac{1}{2^n}$。第二，设集合 $M=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid 0<\alpha_i<\frac{\pi}{2}, i=1, 2, \cdots, n\}$，若对任意的 $\alpha\in M$，有 $2\alpha\in M$或$\pi-2\alpha\in M$，且对所有的 $\alpha\in M$，2α 与 $\pi-2\alpha$ 的全体构成集合 M，则可用设值法求出 $\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_n=\frac{1}{2^n}$。

设值法在数学中有广泛应用。它在求函数的值域、证明不等式、解有关根式问题、解方程和解不等式、证明恒等式、解析几何计算题、求数列的通项公式、求函数解析式等问题中都有其用武之地。在应用设值法解题时，应注意其值的存在性，不然会导致错误的结果。

收尾法　见近似数的截取方法。

孙子定理　见孙子剩余定理。

孙子剩余定理　亦称中国剩余定理，简称孙子定理，是求解一次同余式组的一种方法。其具体含义是：设 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 两两互素，$M=a_1a_2\cdots a_n$。则

$$x\equiv R_i\ (\mathrm{mod}\ a_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

有整数解，且对模M是唯一的。若记最小正整数解为N，则

$$N=\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{M}{a_i}R_i-pM,$$

式中k_i满足

$$k_i\frac{M}{a_i}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ a_i)\ (i=1, 2, \cdots, n),$$

p 为适当选取的整数，使得$N\leqslant M$。

孙子剩余定理源自《孙子算经》下卷26题"物不知数"问题及其解。问题的本身及其解的过程是这样的："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"首先选定 5 × 7 的一个倍数，被 3 除余 1，即70；选定 3 × 7 的一个倍数，被 5 除余 1，即21；选定 3 × 5 的一个倍数，被 7 除余 1，即15。然后按下式计算

$$N=70R_1+21R_2+15R_3-105p,$$

式中105为3，5，7的最小公倍数，p为适当选取的整数，使得$0<N\leqslant105$，这里取$p=2$，由于$R_1=R_3=2$，$R_2=3$，$\therefore N=23$。这一解法是带有构造性的解法，不难将其推广到类似的一般问题的解上。一般化后的结果便是前述的剩余定理。孙子剩余定理本身并不是一个完整的机械化算法，其中没有给出k_i的求解程序。它的系统算法（包括k_i的具体求法）首先由宋代数学家秦九韶给出，称为大衍求一术。C.F.高斯于19世纪初亦得到了相应结果。

形式化方法　撇开符号的具体意义，只根据符号书面形态的转换规则来进行符号操作的一种方法。例如，要找方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的题解公式，根据如下句法规则进行运算："等式左右两侧的每个因子可移向另一侧，但必须随即赋予相反符号，即'+'变'-'或'-'变'+'"，而根本用不着考虑该规则的理由。这就是一种形式化方法。实际上，初等数学中的"运算"是形式化方法在数字语言中的一种具体运用。形式化方法在数学中有着重要的作用，它易使复杂的问题现出端倪。利用形式化语言进行推理，可确保命题的正确性。这种方法可用来限定和澄清概念及思想。形式化方法高度的抽象性，决定了它具有应用的广泛性。

形式逻辑方法　见逻辑方法。

进一法　见近似数的截取方法。

运筹学方法　把所要研究的问题作出综合性的统筹安排和对策，以便最经济地使用人力、物力和财力，使总体效益达到最佳的一种科学方法。

均值　见算术平均。

均值法　亦称平均值代换法。其含义是：从问题中一些量的平均值出发，分析处理已知和未知之间的关系，从而达到解决问题目的的一种RMI方法。

例　试证明周长一定的矩形中以正方形的面积为最大。

分析　设矩形长为x，宽为y，周长为l，则需证明$xy\leqslant(l/4)^2$。我们用均值法解决此问题。取均值$\frac{x+y}{2}=\frac{l}{4}$，将变量$x$和$y$予以平均值代换，设$x=\frac{l}{4}+\alpha$，$y=\frac{l}{4}+\beta$，这时问题就变成求证

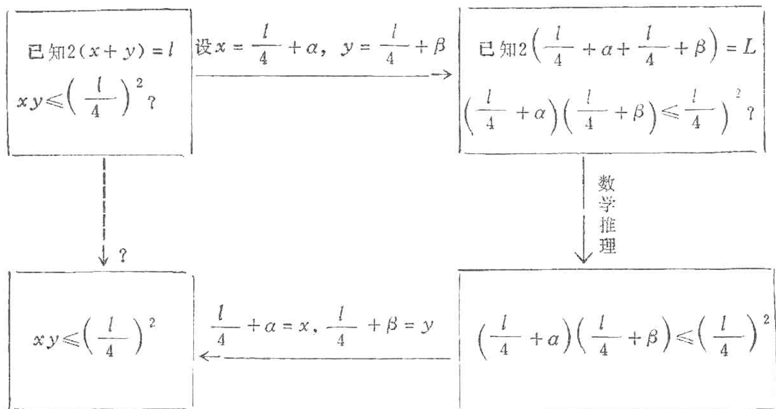
$$\left(\frac{l}{4}+\alpha\right)\cdot\left(\frac{l}{4}+\beta\right)\leqslant\left(\frac{l}{4}\right)^2。$$

将上式左边展开为

$$\left(\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l}{4}(\alpha+\beta)+\alpha\beta。①$$

因为$2\left[\left(\frac{l}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{l}{4}+\beta\right)\right]=l+2(\alpha+\beta)=l$，所以$\alpha+\beta=0$，由此推知$\alpha\beta=0$，且①式变为$\left(\frac{l}{4}\right)^2+\alpha\beta\leqslant\left(\frac{l}{4}\right)^2$，而且当且仅当$\alpha\beta=0$时等号成立。由$\alpha+\beta=0$与$\alpha\beta=0$推知$\alpha=0$，$\beta=0$。这即是说，当矩形为正方形时面积最大。从而原命题得证。

上述解题过程可用框图表示如下：



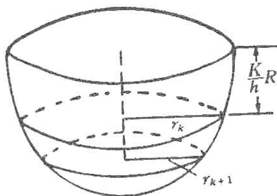
均值法就解决事物的矛盾来看，它的实质是抓住了事物的均衡与不均衡的矛盾，从事物的均衡出发，分析均衡与不均衡的关系，从问题所给的已知条件经过逻辑推演，从而达到由不均衡向均衡的转化，于是也就解决了问题。这种解决问题的方法适用于求函数的某些极限问题、某些不等式问题以及分布问题。有些问题本身并不是均衡与不均衡的矛盾，但利用量的不均等向均等转化可以达到简化解题的目的。例如，在比较复杂的因式分解中，如果我们将其中的几个量通过其平均值代换，可以使分解方法得到简化。

均方根平均 对一组数取平均的一种方法。其具体步骤是：设有n个数x_1，x_2，…，x_n，平方每个数，取这n个平方数的平均值，再对所得结果取平方根，记为$x_{rms}=\sqrt{(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)/n}$。这种平均方法一般适用于被平均的量的平方具有意义的情形。例如，动能的平均$\overline{E}$可以取为$\overline{E}=\frac{1}{2}mv_{rms}^2$，其中的$v_{rms}$表示速度的均方根平均，这是因为动能依赖于速度的平方，故可按均方根平均取值。

极限法 是利用极限概念处理问题的一种思想方法。

例 推导球的体积公式。

解 如图所示。先计算半球体积



$\frac{V}{2}$。用平行于半球底面的平面将半球分成n片，每片的厚度为$\frac{R}{n}$。设第k片上底半径为r_{k-1}，下底半径为r_k。作一个与它近似的圆柱体，其高

为$\frac{R}{n}$，底半径为r_k，它的体积为

$$\pi \cdot r_{k+1}{}^2 \cdot \frac{R}{n} = \pi \cdot \frac{R}{n}\left(R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2\right)。$$

作体积和

$$S_n = \frac{\pi R^3}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \pi R^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)。$$

当n增大时，S_n接近于半球的体积，于是

$$\frac{V}{2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\pi R^3}{3}。$$

故

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3。$$

极限法是数学中的一个十分重要的思想方法。它渗透于全部无穷小分析理论中，数学中许多重要理论是运用这一思想方法建立起来的，比如函数逼近论即是一具体表现。早在公元前二百多年，阿基米德就用这种思想的最初形式求出抛物拱的面积、劈锥体与球体的体积等。我国古代数学家刘徽于公元263年，在历史上第一个用这种思想方法推导出圆面积公式。

极端化方法 数学对象向其质变的关节点转化的一种方法。例如椭圆的离心率e在0与1之间，当e向减小的方向变化，椭圆向圆的方向转化，特别达到关节点0时，椭圆就转化为圆；当e向增大的方向变化，特别达到关节点1时，椭圆就转化为直线。人们利用数学对象向着关节点转化的方法，可以揭示出不同数学对象之间的联系，加深对数学概念、定理、公式之间统一性的理解；通过这种方法还可以发现一些新的数学规律，例如，圆内托洛米定理是早已知道的结果，如果我们采取极端化方法，当圆的半径无穷大时，就可得到直线上的欧拉定理。

克莱姆法则 又称行列式法。利用行列式解线性方程组的方法。其具体含义为：设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n。 \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$。

当$D\neq 0$时，方程组有唯一解

$$\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}\right);$$

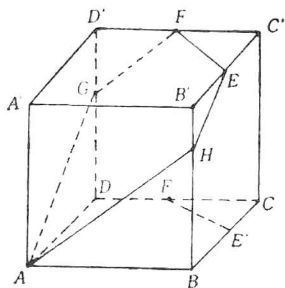
当$D=0$时，方程组有无穷多解或无解。

两头凑法 见分析综合法。

折纸法 见0.618法。

投影变换法 解决几何问题的一种降维方法。它是通过投影变换，化体为面、化面为面、化面为线甚至化线为线，从而达到解决问题目的的一种化归方法。

例 如图所示，立方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，设 $B'C'$、$C'D'$ 的中点分别为 E、F。过 A、E、F 作正方体的截面 $AHEFG$。求该截面的面积。



分析 直接求该截面的面积S较难，可将其投影到底面上。这时投影面 $ABE'F'D$ 的面积为 $S_{投影}=\frac{7}{8}a^2$，截面与底面的夹角 $\alpha=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$。又 $\cos\alpha=\frac{S_{投影}}{S}$，所以

$$S=\frac{\frac{7}{8}a^2}{\frac{3}{\sqrt{17}}}=\frac{7\sqrt{17}}{24}a^2。$$

投影变换法在解决几何问题方面具有广泛的应用。它既可用于问题的求解，又可用于命题的求证。

求差比较法 证明与自然数 n 有关的等式与不等式的一种方法。它是数学归纳法的一种变形。这种方法的理论依据是如下定理：如果两个数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足：① $x_{n_0}\vee y_{n_0}$，② 当 $n>n_0$ 时，$(x_n-x_{n-1})\vee(y_n-y_{n-1})$，其中$\vee$表示"="或">"、"<"、"⩾"、"⩽"，那么，当$n\geqslant n_0$ 时必有$x_n\vee y_n$。据此定理，可得证形如 $x_n\vee y_n$ 的问题的求差比较法的步骤为：第一步，证明$x_{n_0}\vee y_{n_0}$；第二步，证明当 $n>n_0$ 时，$(x_n-x_{n-1})\vee(y_n-y_{n-1})$。由以上两步可断定当 $n>n_0$ 时，$x_n\vee y_n$。

例　设 $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=1, 2, \cdots, n, \lambda \in Z$)，求证 $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x$，$n \in N$。

证明　由 $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ 知，$\sin 2^k x \neq 0$，则 $\operatorname{ctg} 2^k x$ 有意义。设 $x_n=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}$，$y_n=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x$，则

第一步　$x_1=\frac{1}{\sin 2x}$，$y_1=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x=\frac{1}{\sin 2x}$，所以 $x_1=y_1$。

第二步　当 $n>1$ 时，$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{\sin 2^n x}$，$y_n-y_{n-1}=\operatorname{ctg} 2^{n-1} x-\operatorname{ctg} 2^n x=\frac{1}{\sin 2^n x}$，故 $x_n-x_{n-1}=y_n-y_{n-1}$。

综上可知，当 $n \in N$ 时，$x_n=y_n$。

求差相消法　求数列通项公式的一种方法。其具体含义是：将数列递推公式变形为左边成相邻两项之差，给定 $n=1, 2, \cdots\cdots$ 等具体数值，把所得到的一系列等式两边分别相加，消去中间项，就可得到数列通项公式。

例　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+3n+2$，且 $a_1=2$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n。

解　由已知条件推知 $a_{n+1}-a_n=3n+2$，所以

$$a_2-a_1=3\times1+2,$$
$$a_3-a_2=3\times2+2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n-a_{n-1}=3\times(n-1)+2。$$

将上面诸等式左、右分别相加，经整理得

$$a_n=\frac{3n^2+n}{2}+2。$$

求商相消法　求数列通项公式的一种方法。其具体含义是：将数列递推公式变形为左边成相邻两项之商，给定 $n=1, 2, \cdots\cdots$ 等具体数值，把所得到的一系列等式两边分别相乘，消去中间项，就可得到数列通项公式。

例　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2^n a_n$，且 $a_1=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n。

解　由 $a_{n+1}=2^n a_n$，知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$。所以，$\frac{a_2}{a_1}=2$，$\frac{a_3}{a_2}=2^2$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$。将上面各式两边分别相乘，得

$$\frac{a_n}{a_1}=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}。$$

而 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

串值归纳法　见数学归纳法。

体积法　借助体积的自等性、可分性、可比性进行解题的一种方法。

例1　如图1，求棱长为 a 的正方体相邻两面上异面直线 BC_1 与 B_1D_1 的距离 h。

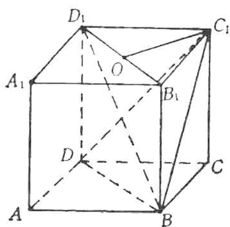


图 1

分析　连结BD与BD_1，由线线平行，即$BD\parallel B_1D_1$，得线面平行，即$B_1D_1\parallel$平面BDC_1。所以，求异面直线BC_1与B_1D_1的距离，转化为求四面体D_1BDC_1的面BDC_1上的高。由体积的自等性得$V_{D_1-BDC_1}=V_{C_1-BDD_1}$，于是可推得$h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

由体积的自等性解题，一般要选定或构造几何体，常选四面体。所选几何体应尽可能多的包含条件和结论中的元素。

例 2　求证正四面体内任意一点到四面的距离之和为定值。

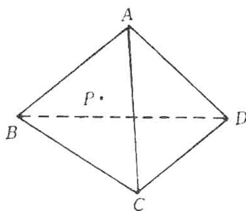


图 2

分析　设棱长、各面的面积、各面的高分别为a、s、h。若P为正四面体$ABCD$内任意一点，P点到各面的距离分别为h_1、h_2、h_3、h_4，由体积的可分性，得

$$V_{P-ABC}+V_{P-BCD}+V_{P-CDA}+V_{P-ABD}=V_{ABCD}。$$

从而推知$h_1+h_2+h_3+h_4=h$（定值）。

由体积的可分性解题，要将立体图形切割成若干小块，利用其整体等于部分之和，建立关于条件与结论的关系式。

用体积的可比性解题，常用的依据是：同底（或等底）的锥体的体积比，等于此底对应的高的比；同高（或等高）的锥体的体积比，等于此高对应的底的比。

利用体积法可求点到平面的距离，异面直线的距离，多面体内切球的半径等。

伸缩变换法　借助于伸缩变换进行映射的一种RMI方法。设在平面M内，已知一直线l，对任一点$A\in M$，作$AP\perp l$，P为垂足。然后在射线PA上取$PC=kPA$，其中$k>0$。从A到C的变换就称为平面向着直线l的伸缩变换，常数k叫做伸缩系数。在坐标平面上，向着横轴和纵轴的伸缩变换把坐标为$(x,\ y)$的点变到坐标为$(k_1x,\ k_2y)$的点，其中k_1，k_2为伸缩系数。这时伸缩变换公式由下式给出

$$\begin{cases}x'=k_1x,\ k_1>0,\\ y'=k_2y,\ k_2>0。\end{cases}$$

伸缩变换是一种特殊的仿射变换。

例　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内接三角形面积的最大值。

解　对椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 进行伸缩变换

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=\frac{a}{b}y, \end{cases}$$

则变成圆

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1。$$

设椭圆内接三角形 ABC 三顶点的坐标分别为$A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$，则经过上述伸缩变换得到的圆内接三角形$A'B'C'$ 的三顶点坐标分别为 $A'\left(x_1,\ \frac{a}{b}y_1\right)$、$B'\left(x_2, \frac{a}{b}y_2\right)$、$C'\left(x_3, \frac{a}{b}y_3\right)$。

根据三角形面积公式，有 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{a}{b}S_{\triangle ABC}$。由此可知，要求椭圆内接三角形面积最大值，只要求圆内接三角形面积最大值。因为半径为a的圆内接三角形以正三角形面积为最大，其最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$。 所以椭圆内接三角形面积的最大值为

$$S_{\max}=\frac{b}{a}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}a\cdot b。$$

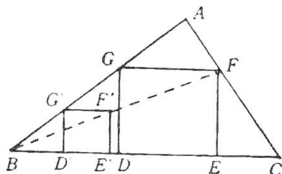
位置法　解决排列组合问题的基本方法。它是把元素间的排列转化为对应位置的排列。按思考方法又分为直接法和间接法（排除法）。应用加法原理和乘法原理直接计算元素的排列，叫做直接法。先求出全部排列数$N(I)$，再求不满足条件的排列数$N(\overline{A})$，应用减法原理，则满足条件的排列数$N(A)=N(I)-N(\overline{A})$，这种解决排列组合问题的方法叫排除法。

例　在1，2，3，4，5，6，7，8，9这九个数字中，每次任取两个，问积为奇数的取法有多少种？

解　直接法：只有奇数与奇数之积方为奇数，故积为奇数的取法有$C_5^2=10$种。

排除法：九个数字任取两个作积的取法共有$N(I)=C_9^2$种，其中积为偶数的取法共有 $N(\overline{A})=C_4^1\cdot C_5^1+C_4^2$ 种，故积为奇数的取法共有$N(A)=C_9^2-(C_4^1\cdot C_5^1+C_4^2)=$10种。

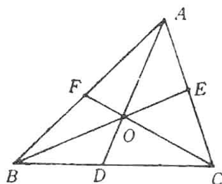
位似作图法　作图法的一种。它是利用位似变换原理解作图题的方法。例如，在已知 $\triangle ABC$ 内求作一正方形$DEFG$，使DE在 BC上，G、F 分别在AB、AC 上。先在AB上取一点G'，作正方形 $D'E'F'G'$，然后以B为位似中心把它放大（或缩小）到$DEFG$的位置，即得所求。



位似变换法 借助位似变换进行映射的一种RMI方法。

例 试证三角形的三条中线相交于一点。这点到顶点的距离等于到对边中点的距离的两倍。

证明 设D、E、F分别是$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上的中

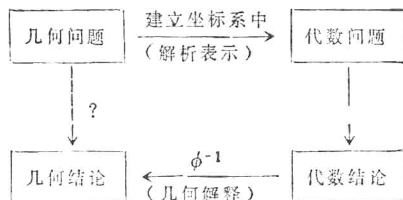


点。并记 $A\xrightarrow{(F)}B$ 为以F为中心、A变换到B的位似变换。施行二次位似变换 $A\xrightarrow{(F)}B\xrightarrow{(C)}D$,可知$A\longrightarrow D$也是位似变换。位似中心在$AD$上，又在$CF$上，故必在两线交点上，记为$O$，则 $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=(-1)\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$，即$AB$、$BC$边的中线交点$O$分$AD$为$\dfrac{DO}{OA}=\dfrac{1}{2}$。同理可知，$BE$与$AD$交点为$O'$，满足$\dfrac{DO'}{OA'}=\dfrac{1}{2}$。于是$O'$与$O$合一，故得证原结论。

利用位似变换可证与共点、共线、平行、比例相关的几何问题以及由此派生出来的几何问题。

近似数的截取方法 通常有三种形式：(1) 收尾法（进一法）。把某一个数去掉多余部分的数字后，在保留部分的最后一位数上加上1。例如，489.34≈489.4。这样得到的数是过剩近似值。(2) 去尾法。把某一个数去掉多余部分的数字后，其保留部分不变。例如 586.375≈586.37。这样得到的数是不足近似值。(3) 四舍五入法。把某一个数去掉多余部分的数字后，如果去掉部分的首位数字大于或等于5，就在保留部分的最后一位加1，这时得到的值为过剩近似值。例如，圆周率π保留三位小数，则$\pi\approx3.142$。如果去掉部分的首位数字小于5，则保留部分不变，这时得到的值为不足近似值。例如，圆周率π保留两位小数，则$\pi\approx3.14$。

坐标法 借助坐标系进行映射、反演的一种方法。在中学数学中常用的坐标系为平面直角坐标系和极坐标系。通过坐标系的建立，一方面可把几何问题映射为代数问题，通过代数结论去获得几何结论（通常称之为解析法），另一方面，又可把代数问题映射为几何问题，通过几何结论去获得代数结论。对于前者，其可用框图表示为

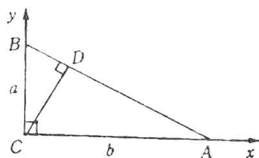


如果将上述框图中的几何问题与几何结论分别和代数问题与代数结论互易其位，则得到的便是把代数问题映成几何问题进行求解的模式。

用解析法解题的步骤为：①建立坐标系，把几何问题转化为代数问题；②解决代数问题，确定定映手续、获解；③将代数解答反演成几何解答。

例　证明直角三角形斜边上的高与斜边之和大于两直角边之和。

分析　给定的问题是：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，且 $CD\perp AB$ 于 D，要证 $AB+CD>AC+BC$。如下图所示。选点 C 为坐标原点，



CA 和 CB 所在直线为 x 轴和 y 轴，建立坐标系。设 $|CA|=b$，$|CB|=a$，则 AB 直线方程为 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$。$|CD|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$。这样，欲证结论便成为 $\sqrt{a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}>a+b$，即证明 $a^2+b^2+2ab+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}>a^2+b^2+2ab$。而这显然是成立的。由于以上各步均可逆，因而通过反演，问题得证。

用解析法证明平面几何题，关键在于选择好适当的坐标系和使用恰当的方程形式。选取坐标系的基本原则是便于确定关键点的坐标和关键线的方程，并使它们尽可能地简便。通常可选图形的对称轴、垂直相交直线、相互平行或其他一些特殊形式的直线为坐标轴；定线段的端点、中点，中心对称图形的中心及其他特殊点为坐标原点。在设定点的坐标时，应尽可能地减少参数，并使参加运算的各点的坐标尽量地简单；选定的曲线方程形式也应遵循同样的原则，以便于计算与推理。一般来说，若要确定的线段平行于坐标轴，则其方程为 $x=a$ 或 $y=b$ 的形式；若要确定的直线过一定点，则可用点斜式或斜截式；若要确定不平行于坐标轴的线段或图形由某种线段绕某定点转动形成（圆、椭圆等），则利用参数式或极坐标方程较适宜。

解析法常被用于考虑平面几何中的点共线、线共点、判断两直线的位置关系以及线段间的某种数量关系等问题。如果采用空间坐标系，它还可用于解决立体几何中的某些类似问题。至于三角等领域中的某些问题，象求函数值、极值、证明一些（三角）恒等式等，用解析法解决往往亦能凑效。

狄利克雷原则　见抽屉原则。

间接证法　不是直接证明论题，而是通过证明反论题的虚假性，或者通过证明论题的等价命题等，来确立论题真实性的证明方法。反证法与同一法皆属于间接证法。

判别式法　实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的判别式是

$\triangle=b^2-4ac$。应用判别式$\triangle$解决问题的方法，叫做判别式法。判别式法的理论依据主要有：(1) 实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的判别式$\triangle$与其根和与抛物线$y=ax^2+bx+c$的关系有：① $\triangle>0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$有两个不相等的实根$\Longleftrightarrow$抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴有两个公共点（相交）。② $\triangle=0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$有两个相等的实根$\Longleftrightarrow$抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴只有一个公共点（相切）。③ $\triangle<0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$无实根，有两个不等的虚根$\Longleftrightarrow$抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴无公共点（相离）。(2) 实系数二次三项式ax^2+bx+c $(a\neq 0)$，当$\triangle\geqslant 0$时，可在实数集内分解因式$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中$x_1$，$x_2$为它的两个实根。(3) 二次函数$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，其值的符号确定如下：① 当$\triangle>0$时，设方程$ax^2+bx+c=0$的两个实根为x_1和x_2，且$x_1<x_2$。若$x=x_1$或$x=x_2$，则$y=0$；若$x<x_1$或$x>x_2$，则y的值与a同号；若$x_1<x<x_2$，则y的值与a异号。② 当$\triangle=0$时，若$x=-\frac{b}{2a}$，则$y=0$；若$x\neq-\frac{b}{2a}$，则y的值与a同号。③ 当$\triangle<0$时，y的值与a同号。

例　在方程$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$中，$a,b,c$为实数。求证：方程必有实数根；若$a=b=c$，则方程有两个相等的实数根。

证明　将方程化成一般形式，有

$$3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0。$$

写出判别式$\triangle=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)$。整理得

$$\triangle=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]。$$

因为a、b、c为实数，所以

$$(a-b)^2\geqslant 0，\quad (b-c)^2\geqslant 0，\quad (c-a)^2\geqslant 0。$$

故　$\triangle\geqslant 0$，只有当$a=b=c$时等号才成立。因此该方程必有实数根，且当$a=b=c$时，$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根。

判别式法有着广泛的应用，可用它判断方程有无实根或等根，确定方程中参数的值或取值范围，确定直线与二次曲线的位置关系等。

完全归纳法　归纳法的一种。它是从某类对象的一切特殊前提出发，而得到关于这类对象的一般性结论的推理形式。其推理形式为

$$\begin{array}{c} A_1 \text{ 具有性质 } F \\ A_2 \text{ 具有性质 } F \\ \vdots \\ A_n \text{ 具有性质 } F \\ (A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A) \\ \hline A \text{ 类事物具有性质 } F \end{array}$$

例　证明圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半。

证明时分三种情况：①圆心在圆周角的一边上；②圆心在圆周角的内部；③圆心在圆周角的外部。通过三种情况的论证都建立了同样的规律性，而这三种情况包含了圆周角的一

切可能的情况，这样也就得到了一般结论：圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半。

完全归纳法是演绎法的变形，它实质上是把大前提省略的三段论法。如把上面的例子改造成三段论式，就是：

如果圆周角的度数在每种情况下都等于它所对的弧的度数一半，那么圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半（大前提）。

圆周角分三种情况，且每种情况圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半（小前提）。

故圆周角的度数等于它所对的弧度数的一半（结论）。

完全归纳法所根据的理由是充分的，它的特点在于其结论没有超出前提的范围，只要前提真实，结论必然真实。因此，这是一种严格推理方法。完全归纳法在数学中有着广泛的应用，在论证数学命题时，当题设相互关系变化时，其各种特殊情况下，如果其论证方法不相同，就可采用完全归纳法。若论证方法相同，就没有必要使用完全归纳法。如三角形内角和定理的证明，不论是锐角三角形、直角三角形，还是钝角三角形，其证明方法都是相同的。因此就没有必要用完全归纳法。对问题的论证是否选用完全归纳法还与选用的具体方法有关。完全归纳法只适用于被考察的对象是有限的情况或者能归结到有限种情况的无限个对象，除此之外，该方法就无能为力了。被考察的对象也不能太多，如果太多，应用此法也非常繁杂。

穷举法　见反证法。

证明　亦称逻辑证明或论证。它是根据某个或某些判断的真实性、来断定另一判断的真实性的一种思维过程。证明由论题、论据和论证方式三部分构成。论题是其真实性需要证明的那个判断或命题。论据是证明论题的真假所依据的那些判断。论证方式是把证明中的论题和论据联系起来的一系列推理，即证明中所使用的推理形式。作数学证明时，首先要分清哪是已知，哪是求证，然后进行证明。其中以已知为条件，以求证为结论所组成的命题就是论题。数学证明的论据就是数学中已知的概念、公理，以及已经证明其真实性的一切命题。其中证明就是论证方式。根据不同的标准，从不同的角度，证明可分为不同的种类。根据所运用的推理形式，证明可分为演绎证明和归纳证明。根据所运用的论证方法，证明可分为直接证明和间接证明。根据寻求证明的思路，证明可分为分析法和综合法。证明需要遵循如下规则：

（1）论题一定要明确。这是论证的先决条件。如果论题不明确，就无法找出适当的论据与正确的论证方式进行证明。产生论题不明确的原因，不外两种情况。一种情况是故意含含糊糊，以便进行诡辩；另一种则是对所要论述的问题没有考虑成熟，没有形成明确的思想。例如，等底的两个三角形面积之比等于高的比。在此论题中，高的概念不明确，没有指明是“对应高”，这样的结论就不是完全真实的。为了使论题明确，必须了解论题的判断形式，论题中所含概

念的内涵与外延、论题的真假条件等等。

（2）论题要始终如一。在证明过程中，对所论述的论题应当始终保持一致。如果把原来需要论证的论题扩大，缩小或者换成另一个论题，就要犯转移或者偷换论题的逻辑错误。例如，求证任意平行四边形的内角和等于360°。如果就其矩形证明结论的成立就断言命题的正确性，这就犯了偷换论题的错误。在证明的过程中，把一般情况换作特殊情况来处理，把论题中的平形四边形改成了矩形。

（3）论据要真实，可靠。如果一个命题是不真实的或者虽然事实上是真实的，但还不能被人们确知为真（的命题），那么就不能用它来作论据。违反这条规则就要犯“虚假论据”的错误。

例1　已知$\sqrt{3}$和$\sqrt{7}$是无理数，试证$\sqrt{3}+\sqrt{7}$也是无理数。

证明　根据已知条件$\sqrt{3}$和$\sqrt{7}$是无理数，而两个无理数之和是无理数，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}$是无理数。

其中把“两个无理数之和为无理数”作为论据，这是不可靠的，因此断语有时不真。如$1-\sqrt{2}$和$\sqrt{2}$均是无理数，但$(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$却为有理数。故上述论证不能作为原命题的证明。

（4）论据的真实性不能依靠论题来证明。若论据的真实性直接或间接、明显或隐含地依赖论题来证明，那么这种论据本身就是一个尚未确知为真的判断。用这样的判断作论据，是根本不能证明论题的真实的。违反这条规则就要犯“循环论证”和“窃取论题的逻辑错误”。

例2　在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，并设$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，求证$a^2+b^2=c^2$。

证明　因$a=c\sin A$，$b=c\cos A$，所以$a^2+b^2=c^2\sin^2A+c^2\cos^2A=c^2(\sin^2A+\cos^2A)$。又因为$\sin^2A+\cos^2A=1$，所以$a^2+b^2=c^2$

这里用到了“$\sin^2A+\cos^2A=1$”这一公式。由于此结论的证明用到勾股定理，故上述证明犯了“循环论证”的错误，因而就称不上正确的证明。

（5）论据必须能推出论题。正确的论证方式是正确推理形式的具体运用，它可使论题从论据合乎逻辑地推出。论证方式违反了推理规则，就要犯“推不出”的逻辑错误。这种错误的表现形式有两种：一种是“论据与论题不相干”，另一种是“论据不足”。

证明是一种比推理更为复杂的思维形式。证明方法可视作一种特殊形式的推理方法，证明中的论题相当于推理中的结论，论据相当于推理中的前提，不过证明方法与推理方法在思考的程序上恰好是相反的。证明方法是针对所提供的论题，去寻求论据作出判断。而推理方法是从所提供的前提出发，去寻求结论。证明不论在科学研究，还是在学习知识，发展能力方面都有重要的作用。在证明知识的

真理性过程中，通过论题与论据之间的逻辑联系可进一步揭示客观事物之间的内在联系，有助于发现真理，加深对事物的认识或了解。在建立理论体系的过程中，证明成为联结诸概念和判断的纽带，为体系中结论在逻辑上提供了立论的基础。当然，作为证明来说，逻辑证明仅是必要的，实践才是检验真理的最终标准。

初等几何变换法 简称几何变换法。是借助于初等几何变换进行映射反演的一种 RMI 方法。所谓初等几何变换就是将几何图形按照某种法则或规律变成另一种几何图形的过程。按法则和规律的不同可将初等几何变换分为全等变换、相似变换和反演变换。全等变换亦叫合同变换。如果从平面（空间）到其自身的映射，对于任意两点 A、B 和它们的象 A'、B'，总有 $AB=A'B'$，则这个映射叫做平面（空间）的全等变换。在平面内又分为正常全等变换和反常全等变换。把一个图形变成与它正常全等图形的变换叫做正常全等变换。所谓正常全等图形是指两个全等图形上每两个对应三角形有同一方向（顺时针或逆时针方向），并且每两个对应的有向角有同一方向。把一个图形变成与它反常全等图形的变换叫反常全等变换。所谓反常全等图形，就是对于两个全等的图形上每两个对应的三角形有相反的方向，并且每两个对应的有向角有相反的方向。平移、旋转、反射都是特殊的全等变换。反射变换又分为直线反射变换与平面反射变换。初等几何变换法为讨论初等几何问题提供了强有力的工具。这种方法在绘图、力学、机械结构的设计、航空摄影测量、电路网络等方面都有广泛的应用。

局部变动法 一种重要的分解方法。其具体含义是：在一个数学问题中有若干个可变因素，为了解决问题方便，可暂时固定问题中的一些可变因素，使之保持不变，先研究另一些可变因素对求解问题的影响，取得局部结果之后，再从原先保持不变的因素里取出一些继续研究，直到问题全部获解。

例 设 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求证 $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$。

证明 令 $y=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$，暂时固定 C，让 A、B 自由变化，于是可有

$$y=\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)。$$

显然，上式当 $A=B$ 时，$\cos\frac{A-B}{2}$ 达最大值。因此

$$y\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)。$$

再考察 C 变化时对 y 值的影响。易知当 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ 时，即当 $C=\frac{\pi}{3}$

时，y 取最大值$\frac{1}{8}$，即有$y\leqslant\frac{1}{8}$。

由上可知 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$。

对于可变因素较多的数学问题，这是一个常用的方法。例如数学中求极值、解不等式等问题都可应用此法。这种方法在科学实验中应用更为广泛，因此是一种一般的科学方法。

枚举归纳法 见不完全归纳法。

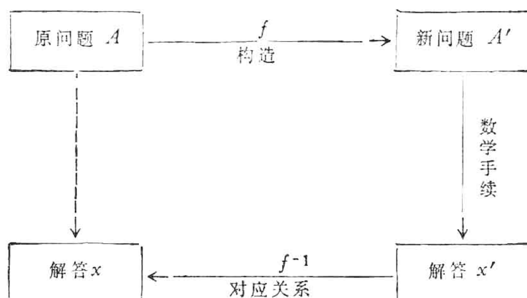
松驰法 见增量法。

构造法 有下面几种含义：

（1）构造性的方法。其具体含义是：数学中的概念和方法按固定的方式经有限个步骤能够定义的概念和能够实现的方法。例如，用欧几里得算法，经过有限步骤求得525，231的最大公约数为21。再如，求一元二次方程的根可用求根公式在有限步骤内求出来，这也是构造性的方法。现考察连续函数的最值定理："闭区间上连续函数有最大（小）值"。在数学分析证明这个定理时，只谈这个最值存在，而没有给出一个能行的过程在有限步骤内把这个最值求出来，这是非构造性的方法。高斯证明代数基本定理，也是一种非构造性的方法。构造性的方法具有如下两个基本特征：一是对所讨论的对象能进行较为直观的描述；二是实现的具体性，就是不只是判明某种解的存在性，而且要实现具体的求解。数学中的构造性方法伴随着数学的产生就产生了，但是这个术语的提出，以致把这个方法推向极端，而致力于这个方法的研究，是与数学基础的直觉主义学派有关。直觉派出于对数学的"可信性"的考虑，提出了一个著名的口号："存在必须是被构造"。这就是构造主义。本世纪40年代以来，由于计算机科学的迅猛发展，数学应用的范围空前扩大了，大量的新的对象需要进行新的数学描述；同时，计算机本身就要求所运用的方法具有能行性，在这样的实际背景下，迅速发展起来的许多数学方法，具有鲜明的构造性特征。构造性的方法与非构造性的方法，在数学中是相辅相成的，各自发挥着应有的作用。

（2）描述数学模型的方法。其具体含义是：利用科学的抽象方法，把客观的实际问题转化为数学模型。从客观原型到数学模型，这里就用到了构造法。数学模型是通过对客观原型进行抽象和分析而构造出来的。例如欧拉解决的"哥尼斯堡七桥问题"，就是通过抽象分析，构造了一个一笔画的数学模型。这是线路拓扑学的最初萌芽。构造方法是应用数学家常用的思想方法，当一个实际问题需要解决时，应用数学家首先想到的就是去构造一个数学模型。

（3）解释数学模型的方法。其具体含义是：利用具体问题的特殊性，给所要解决的问题设计一个新的关系结构系统，如函数、方程、图形、命题等，以此达到解决问题的目的。其实质是映射反演法，它的解题过程的模式可用框图表示如下：



例　设 a，b，c 分别表示直角三角形的两直角边和斜边，求证$a^2+b^2=c^2$。

证明　构造图形：以直角三角形的三边为边，分别向外作一正方形。那么，这三个正方形的面积分别为a^2，b^2，c^2。这样欲证 $a^2+b^2=c^2$，只需在这个新图形中证明两个小正方

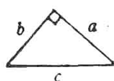


图 1

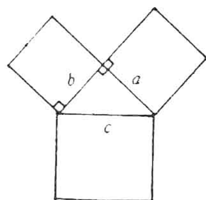
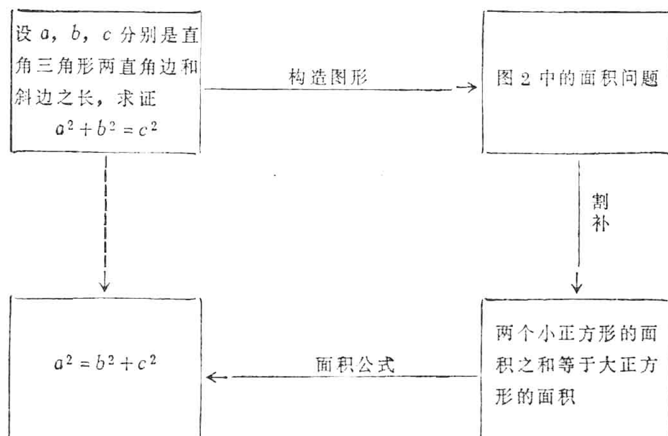


图 2

形的面积之和等于大正方形的面积即可。这可通过割补法得知此结论的正确性。用框图表示如下



构造图形法　借助于添加辅助图形达到解决问题目的的一种构造方法。其具体含义是：根据问题的题设条件及所求结论，通过分析、联想、类比等，添加上恰当的辅助图形。所添加的辅助图形可以是线、角、圆、多边形，也可以是面、体。

例　四面体 $S-ABC$，三组对棱分别相等，且依次分别为 $2\sqrt{5}$、$\sqrt{13}$、5，求此四面体的体积。

解

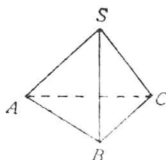


图 1

依题设条件联想到长方体的各侧面对角线构成一三棱锥、且对棱相等，故可借助于长方体来解此题。易证对棱相等的四面体的每个面均为锐角三角形，故可将四面体嵌入长方体 $ADSE-FBGC$ 中，如图 2 所示。

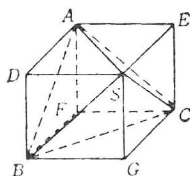


图 2

使长方体的各面对角线长等于四面体各棱的长。设长方体长、宽、高分别为 x、y、z，则有

$$\begin{cases} x^2+y^2=(\sqrt{13})^2, \\ y^2+z^2=5^2, \\ x^2+z^2=(2\sqrt{5})^2. \end{cases}$$

解此方程得 $x=2$，$y=3$，$z=4$。因为

$$V_{B-SGC}=V_{S-ACE}=V_{S-ADB}=V_{A-FBC}=\frac{1}{6}\times yz=4,$$

所以

$$V_{S-ABC}=V_{ADSE-FBGC}-4V_{S-BGC}=24-16=8.$$

构造命题法　借助于设计新命题以达到原命题获得解决的一种构造方法。根据所构造的命题起作用的不同又可分为等价命题法、辅助命题法、强命题法，弱命题法等。

取样方法　见抽样方法。

直接证法　证明方法的一种。它是根据已知的概念、公理、定理、公式、法则等运用推理规则来直接证明命题为真或为假的方法。直接证法的一般

形式是

$$\left.\begin{array}{l}\text{论点条件}\\ \text{已知定义}\\ \text{已知公理}\\ \text{已知定理}\end{array}\right\}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\text{结论。}$$

数学中绝大多数命题都是采用直接证明方法来完成的。例如，当 a、b、c 均为奇数时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有有理根。为了证明该结论，可将方程的根求出来，然后再断定其根不是有理数，这就是直接证法。具体证明过程如下：所给方程的根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

设 $b=2k+1$，$k\in z$（整数），于是

$$b^2=4k^2+4k+1$$
$$=4k(k+1)+1。$$

由于 $k(k+1)$ 是偶数，故可令

$$b^2=8s+1,\ s\in Z。$$

再设 $a=2m+1$，$c=2n+1$，m，$n\in z$，则

$$4ac=8(2mn+m+n)+4。$$

故有

$$b^2-4ac=8(S-2mn-m-n-1)+5。$$

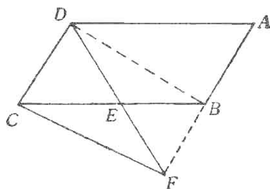
上式表明，b^2-4ac 被8除余5，因而它不可能是一个奇数的平方。又 b^2-4ac 是奇数，故它不可能是一个偶数的平方。从而 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是一个无理数。这就证明了其根不为有理数。

直接推演法　见解数学选择题的方法。

顶点平移法　一种特殊的等积变形法。其具体含义是：让一个三角形的一边保持不动，而让该边所对的顶点沿着平行这一边的直线移动，以此达到解决问题的目的。利用它解决问题的依据是：两个等底同高的三角形，它们的面积相等。

例　过▱$ABCD$ 的顶点 D 引一直线交 BC 于 E，交 AB 的延长线于 F，则△ABE与△CEF等积。

分析　该图中含有两对平行线，故可以连续运用两次顶点平移法。



证明　如图所示。连结 BD，因为 $AD\parallel BE$，所以其面积 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DBE}$。又因为 $DC\parallel BF$，所以其面积 $S_{\triangle DBE}=S_{\triangle CBF}$。同减去 $S_{\triangle BEF}$，得 $S_{\triangle DBE}=S_{\triangle CEF}$，故知 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CEF}$。

抽样方法　亦称取样方法。是概率统计方法之一种。它是从全部研究对象中抽出一部分单位进行调查并在取得资料的基础上，运用数理统计的原理，对全体研究对象作出数量上的估计判断，以达到对总体认识的一种方法。它的作用在于根据抽样总体所计算的抽样综合指标来估计和推算全体及总体。

抽屉原则（原理）　又称重迭原则，

也叫做鸽舍原则（原理），也有的叫做狄利克雷原则。它是数学中证明具有某种性质对象的存在性的一种特殊方法。它有如下几种特殊类型：

（1）把$n+1$个元素以任意确定的方式放入n个集合中，那么，至少有一个集合含有至少两个元素；

（2）把n个元素以任意确定的方式放入k个集合中，那么，至少有一个集合含有至少$\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$个元素（如果取$k=n-1$，就得到了第一种类型的抽屉原则）；

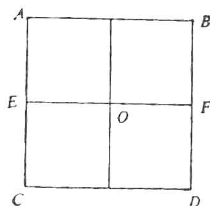
（3）把无限多个元素以任意确定的方式放入有限个集合中，那么，至少有一个集合仍含有无限多个元素。

上述原则的正确性可通过反证法来证明。抽屉原则可以推广到二维和三维的情况，有所谓关于面积的抽屉原则，体积的抽屉原则，还可把离散的情形拓广到连续的情形。

例1　在边长为1的正方形内，任意给定5个点，那么，至少有两个点，它们之间的距离小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

分析　要证明5个点中至少有两个点具有某种属性，依抽屉原则的要求，必须设计$5-1=4$个抽屉。即要把单位正方形分成四个小块，把其中每一块作为一个抽屉。

证明　如图所示。用对边中点的连线EF、GH将边长为1的正方形$ABCD$分成四个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形。根据抽屉原则，至少有一个小正



方形所包含的给定点不少于2个，不妨设所给5点中至少有两点P、Q在小正方形$AEOH$的内部及OE、OH上（不包括E、H），那么不论P、Q同时在正方形$AEOG$的内部，或一点在内部另一点在OE（OH）上，或两点同时在OE、OH上，都有

$$PQ<AO=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

于是命题得证。

由上例可知，利用抽屉原则解题的关键在于设计合乎题意的“抽屉”。设计抽屉的过程，其实质就是按照题意的本质属性，对题设条件的集合进行恰当划分的过程，分成的每个子项都是一个“抽屉”。上例中只用了一次抽屉原则，有的问题需要多次地使用抽屉原则，每用一次，就把范围缩小一点，然后注意到各种可能的情况。下面的例子，就两次使用了抽屉原则。

例2　17个科学家，其中每一个人都和其余所有的人通信。在他们的通信中，只讨论3个题目，而且每两个科学家之间只讨论一个题目。求证：至少有3个科学家相互之间在讨论同一个题目。

证明　从17位科学家中，任意找出一位，不妨设为A_{17}，A_{17}同其余

的16位科学家通信，讨论的问题是3个，故有3个抽屉。由第二类抽屉原则知，至少有6位科学家在同A_{17}讨论着同一题目，不妨设为题目1。如果这6位科学家中，有2位也在讨论题目1，那么结论已得证明。否则，这6位讨论的是题目2与题目3。

从这6位科学家中任找一位，不妨设为A_6，A_6同其余5位通信，只讨论2个题目，故有2个抽屉。再一次应用第二类抽屉原则知$\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$，故至少有3位科学家在同$A_6$讨论同一个题目，不妨设为题目2。如果那3位科学家之间有2人也讨论题目2，命题得证。否则，那3个人相互之间只能讨论题目3，这样，命题也已得证。

抽屉原则在组合数学、不定方程、有理数理论和实数理论中都有着广泛的应用。

抽象分析法　见概念映射法。

拉格朗日插值方法　是一种插值方法。其具体含义是：设$y=f(x)$，其自变量x_0，x_1，x_2，…，x_n的对应的值y_0，y_1，y_2，…，y_n为已知，那么就可用下列次数不高于n的代数多项式$p(x)$作为原函数$f(x)$的近似值

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}。$$

这种插值方法是误差理论与实验数据处理中的一种常用方法。

欧几里得算法　见辗转相除法。

非负数法　是利用非负数的概念、性质和非负数之间的关系解决问题的方法。零和正数统称非负数。绝对值、算术根和一个实数的偶次幂等都是非负数。

例　在实数范围内解方程

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)。$$

解　原方程经配方得

$$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0，$$

根据非负数的性质，得

$$\begin{cases}\sqrt{x}-1=0，\\ \sqrt{y-1}-1=0，\\ \sqrt{z-2}-1=0。\end{cases}$$

解得$x=1$，$y=2$，$z=3$。经检验，它们是原方程的根。

非负数法在数学中是一种常用的方法。它在解方程、不等式，式的求值和化简，求函数定义域、值域和极值以及研究函数的图象，证明不等式等方面都有着广泛的应用。

非逻辑方法　借助于联想、想象、灵感、机遇、美感等，来发现数学规律，提出解题途径的方法。

例　试证

$$c_n^1+2c_n^2+3c_n^3+\cdots+nc_n^n=n\cdot 2^{n-1}。$$

分析 经过对题目的审视之后，人们的注意力可能集中到组合数公式的上下标都是自然数这一点上，于是就会由自然数联想到数学归纳法。不过，注意力也可能集中到题目中的“+”号上，这时就会联想到数列求和，于是希望采用数列求和的常用方法来解决这一问题。拿出一般项进行分析，得

$$kc_n^k=k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$=n\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}=nc_{n-1}^{k-1}。$$

从而获得证题途径为

原式左边 $=nc_{n-1}^0+nc_{n-1}^1+\cdots+nc_{n-1}^{n-1}=n\times 2^{n-1}=$ 右边。

当然，人们的注意力还可能集中到组合数c_n^1，c_n^2，…，n_n^n上，这时就联想到二项式定理

$$(1+x)^n=c_n^0+c_n^1x+\cdots+c_n^nx^n。\quad ①$$

然而①中没有出现求证式中rc_n^r的形式，为了变出这种形式，只要对①式两边关于x求导便可达到期望的目的。

上面出现的各种不同的解题途径都是通过联想方法而获得的。可见非逻辑方法在探索解题途径上占有重要的地位。它对解决数学问题，发现数学规律起着重要作用。数学的创造发现，就人类思维这个角度而言，主要靠非逻辑思维方法。当然，如果没有逻辑方法，发现的结果也往往是不易得到人们的确认的。

图示法 一种形象化的方法。它是用图示来描述客观对象的现象及其规律的一种方法。在数学中就是用图示来描述数学的概念、定理、方法及其关系结构系统的一种形象化方法。例如，用树形图来表示概念的从属关系，用方框图来表示方法的程序步骤等都是一种图示法。这种方法可以启迪思维，帮助人们理解数学，有助于发现数学规律，可以简明清楚地表述数学理论与方法。它在数学以至整个科学领域中有着广泛的应用。

图形法 见几何图形法。

图象法 将代数、三角等数量关系的问题通过坐标变换映射为几何图形的问题的一种RMI方法。

例 设$\theta\in(-\infty,+\infty)$，求函数

$$f(\theta)=\frac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

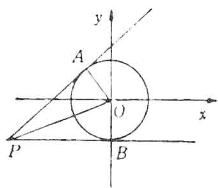
的最大值与最小值。

分析 如果将函数变形为

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta-(-1)}{\cos\theta-(-2)},$$

则$f(\theta)$可视作过两点$P(-2,-1)$和

$Q(\cos\theta, \sin\theta)$的直线$PQ$的斜率，其中$P$为定点，而点$Q$是单位圆$x^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$上的动点。这样再构造出如图所示的图形。而要求



$f(\theta)$的最大值与最小值，就是当点Q在单位圆周上变动时，求动直线PQ斜率的最大与最小值。由几何知识可知，当PQ与圆相切时分别达到最大值和最小值，处于PA位置时为最大值，处于PB位置时为最小值。由图形可知，$PB /\!/ Ox$，所以$k_{PB}=0$，

$\text{tg}\angle OPB=\frac{1}{2}$，于是

$$k_{PA}=\text{tg}2\angle OPB$$

$$=\frac{2\text{tg}\angle OPB}{1-\text{tg}\angle OPB}=\frac{4}{3}。$$

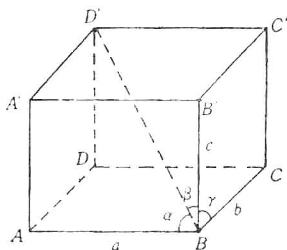
故$f(\theta)$的最大值为$\frac{4}{3}$，最小值为0。

图象法解题有直观、简捷、明瞭、全面等优点。它在解方程，特别是解超越方程、无理方程以及无理不等式、判别命题充要条件以及在求函数的最大值与最小值中有着重要的作用。图象法可以帮助人们理解数学概念、定理，掌握数学理论，有助于发现数学规律。

图解法　将代数、三角等数量关系的问题通过几何图形的数量性质的逆向思维转化为几何图形问题的一种化归方法。

例　已知α，β，γ均为锐角，且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证$\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta\cdot\text{tg}\gamma\geqslant 2\sqrt{2}$。

分析　由条件$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$联想到在立体几何中，长方体的一条对角线与一个顶点上的三条棱所成的三个角，其余弦的平方和为1。于是可构造一个长方体，如图所示。把α、β、γ之间的关系转化为长方体的有关角之间的关系去处理。设长方体$ABCD—A'B'C'D'$的棱分别为a，b，c，对角线BD'与三棱所成的角分别为α，β，γ。由图可知



$$\text{tg}\alpha=\frac{AD'}{a}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}，\ \text{tg}\beta=\frac{B'D'}{c}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}，$$

$$\text{tg}\gamma=\frac{CD'}{b}=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}，$$

故

$$\text{tg}\alpha\text{tg}\beta\text{tg}\gamma=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\times\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\times\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2bc}}{a}\times\frac{\sqrt{2ab}}{c}\times\frac{\sqrt{2ac}}{b}=2\sqrt{2}。$$

图论方法 一种组合分析方法。它是借助于图论知识来处理问题的一种方法。由顶点集合与边集合所组成的结构称为图。图论是研究图的组合关系及结构的一个数学分支。

例 任何六个人聚会，其中总有三个人彼此相认识或不认识。

分析 把这个实际问题抽象为图论问题。将六个人抽象为平面上六个点，以A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6表示。设这些点无三点共线，且每两个相认识者以实线连结，不相认识者以虚线联结，经过这样的抽象之后，上述问题就相当于证明存在一个"实三角形"或"虚三角形"。

任何一个包含某种二元关系的系统，都可以用图来模拟，并且用图来描述这个系统各个部分之间的关系，因而都可在一定程度上应用图论的方法来解决相关的问题。图论的方法在计算机科学、运筹学、控制论、系统分析、经济管理、运输网络、物理学、化学等领域都有广泛的应用。

图形变换法 借助于图形变换达到解决问题目的的一种方法。它包括拼补法、分割法、割补法、展开法和初等几何变换法等。

例 在长方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=BC=1$，$BB_1=\sqrt{2}$，求D_1B和B_1C所成的角（如图1所示）。

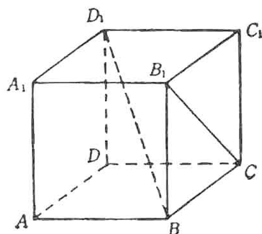


图 1

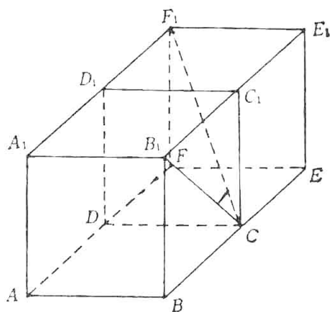
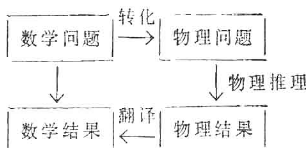


图 2

分析 D_1B与B_1C是异面直线，较难处理。为此在原长方体上角拼补上一个等同的长方体$CEFD—C_1E_1F_1D_1$，得图2。这时$D_1B\parallel F_1C$，所求角即$\angle B_1CF_1$。在$\triangle F_1CB_1$中，三边均可求出，故由余弦定理便不难求出$\angle B_1CF_1$了。这样，借助于图1到图2的变换，便达到了解决问题的目的。

物理模拟法　借助物理知识探求数学规律的一种方法。其具体含义是：将数学问题转化为物理问题，再进行物理推理得出物理结果，最后再翻译得到数学结果。其过程如下：



例　设D、E、F分别是$\triangle ABC$的BC、AC、AB边上的定点，试证明：AD、BE、CF共点的充要条件为

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1。\qquad ①$$

分析　先验证该命题的真假。为此，可将问题转化为物理质点系重心问题。设D、E、F满足条件①。在B、C处分别放置重量为m、n的质点，且满足

$$\frac{BD}{DC}=\frac{n}{m}。\qquad ②$$

于是D为两质点系B、C的重心。在A处放置重量为w的质点，且满足

$$\frac{CE}{AE}=\frac{w}{n}。\qquad ③$$

于是E为两质点系A、C的重心。由①、②、③推出

$$\frac{BF}{AF}=\frac{w}{m}。$$

故F为两质点系A、B的重心，因而三质点系A、B、C的重心Q在AD、CF、BE上。故AD、CF、BE交于一点Q。

反之，若AD、CF、BE交于一点Q，则在B、C处放置重量为m、n的质点，使D为两质点B、C的重心，于是有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{n}{m},\qquad ④$$

在A处放置重量为w的质点，使E为两质点系A、C的重心，于是有

$$\frac{CE}{AE}=\frac{w}{n}。\qquad ⑤$$

今设两质点系A、B的重心为F'，即有

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{m}{w}。\qquad ⑥$$

易证$F'=F$。由④、⑤、⑥推知

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1。$$

由上可知，上述命题是正确的。物理模拟可以帮助发现数学新命题，它是发展数学理论的重要途径之一。把数学推理和物理推理结合起来，可以开拓眼界，启迪思维。具备一定的物理模拟能力，有助于发展人们的创造性思维。

迭代法　是求方程近似实根的一种方法。例如，对于一个代数方程，将其写成等价形式$x=\varphi(x)$，只要$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，且$|\varphi'(x)|\leq q<1$，那么它的根可由给定的一个初始值$x_0=a$开始，按如下公式

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

逐次计算出x_1，x_2，…。

放缩法　主要是指处理不等式问题的一种常用思想方法。其具体含义是：在解题过程中，根据不等式的性质将不等式进行同向变化，即将和式或积

式中的某些项或因式换成数值较大或较小的数或式，也可删去或增添某些项或因式，从而达到解决问题的目的。

例 求证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3 \quad (n\in N)$。

证明
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+c_n^1\left(\frac{1}{n}\right)+c_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$
$$<1+1+\frac{n^2}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3。$$

上述证明中，对二项式展开式里从第三项起对各项“放缩”，先是“放大”分子，后是“缩小”分母。二者都是对其值进行同向放大，再归结为等比数列求前 n 项之和，最后去掉 $\frac{1}{2^{n-1}}$，从而不等式得证。

放缩法在证明不等式中占有重要地位。在证明不等式的过程中，就是不断地对原式进行“放大”或“缩小”。所谓证明不等式的能力，从根本上说就是提高灵活运用放缩法的能力。怎样对不等式进行放缩呢？通常有如下三种：利用已有的公式进行放缩，就是公式放缩法；根据数的大小性质进行放缩，就是增减放缩法；充分利用函数的单调性和有界性，就是函数性质放缩法。

另外，在求值计算、解方程、求数列极限、解某些整数问题等中都能应用这一方法。尽管有时问题中不直接地与某不等式相关，但可以通过转化的方式将问题归结为不等式问题，从而就可利用放缩法进行处理。

在利用放缩法解决问题时应当注意：“放”的时候不能“放”得过大，“缩”的时候不能“缩”得太小，以至于解决不了问题。要保证“放缩”适度，必须经过不断的修正调整，灵活运用各种已知的不等式关

系，最终获得问题的解决。

利用相似原理，将图形按一定比例进行放大或缩小的方法，也叫做放缩法。

变角法 将复角的三角函数问题转化为单角的三角函数问题的一种方法。

例 求证 $3+\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha=8\sin^4\alpha$。

分析 此题三角函数的角有 4α，2α，α 等三种，我们将复角化为单角，为此，将等式左边的 2α，4α 的三角函数都转化为α的三角函数。于是，左边 $=3+(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)-4(1-2\sin^2\alpha)=3+(1-2\sin^2\alpha)^2-(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2-4+8\sin^2\alpha=8\sin^4\alpha=$ 右边。

变角法是三角变换的基本方法，它是求值、化简、论证以及解三角方程中的常用技巧。

变量代换法 见换元法。

试探法 见尝试法。

降次法 见降幂与升幂。

降阶法 见降幂与升幂。

降维法 见降幂与升幂。

降幂与升幂 数学中常用的思维方法。降幂是指将高次幂问题转化为低次幂问题的一种化归方法。

例1 解方程 $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$。

解 将原方程变形，得

$$(\sin x+\cos x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0。$$

由于 $1-\frac{1}{2}\sin 2x\neq 0$，所以

$$\sin x+\cos x-1=0。$$

解得 $x_1=2n\pi$，$x_2=2n\pi+\frac{1}{2}\pi$。

上例通过分解因式，运用代数方法将三次的降成了一次三角方程。这种降幂思想方法在数学中有着普遍的指导意义。代数中把高次方程问题转化为低次方程问题的降次法、立体几何中把立体几何问题转化为平面几何问题的降维法、行列式中把高阶行列式降为低阶行列式的降阶法、微分方程中把高阶微分方程化为低阶微分方程等等，都是降幂思想在各种不同情况下的具体体现。

升幂指将低次幂的问题转化为高次幂问题的一种化归方法。

例2 求数列 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和。

解 考察下列各式

$$(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3,$$
$$(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3,$$
$$(3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2\cdot 1+3\cdot 3\cdot 1^2+1^3,$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2\cdot 1+3\cdot n\cdot 1^2+1^3。$$

将上面各式左右两端分别相加，整理得

$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

所以 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

注 经过同样的处理，可由$(n+1)^{k+1}$展开式推得前n个自然数的k次方之和。

例2通过升幂求出了前n个自然数平方之和。升幂的思想方法在数学中也同样有着普遍的指导意义。如解无理方程时，常常要通过升幂的方法将方程转化为有理方程；几何中有些平面几何问题如果将其放到空间中去考虑，解决起来更方便。升幂和降幂是处理数学问题的两种不同思维方法，它们既互相对立，又相互联系，两者相辅相成，共同处于矛盾的统一体之中，通过下面的例子可以看出，为了计算简单，首先要升幂，升幂之后再降幂。这种一升一降正是两种思想方法在解决一个问题中相互渗透的表现。

例3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

的值。

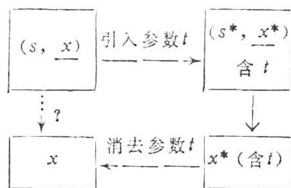
解
$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=abc+bc+ac+ab。$$

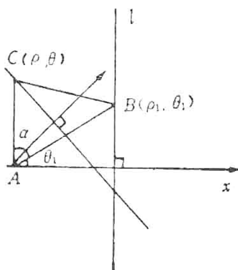
限制方法 一种重要的思维方法。它是将思考对象从一个较大的范围过渡到一个较小范围或者把一个外延较大概念过渡到外延较小的概念的一种方法。例如，在整个实数轴上考察了三角函数后转而限制在区间〔$0,2\pi$〕上进行讨论三角函数的性质、由对正n边形的研究转到对正三角形的考察等就是运用了限制方法。这种方法有利于简化问题，便于认识数学对象，有助于研究问题、解决问题。

参数法 借助于参变数将原象关系结构系统映射为映象关系结构系统，从而使问题获得解决的一种关系映射反演方法。其整个过程可用框图表示如下



例　已知△ABC三内角分别为α、β、γ，A为定点，顶点B在一定直线L上滑动，三角形形状不变而大小可以变化，试求顶点C的轨迹。

分析　由于△ABC三内角已知，故当其边AB大小确定之后，△ABC的大小也就随之而定，点C的位置随着点B的确定而确定。因此，可取点A为极点，自A向定直线L作垂线x，x为极轴，如图所示。设点A到定直线L的距离为a，$C(\rho,\theta)$为轨迹上任意一点，取点B的极坐标(ρ_1,θ_1)为参数。根据正弦定理可推知



$$\rho_1=\frac{\rho\sin\gamma}{\sin\beta}。\qquad(1)$$

又

$$\theta_1=\theta-\alpha,\qquad(2)$$

$$\rho_1\cos\theta_1=a。\qquad(3)$$

将(1)与(2)代入(3)，消去参数ρ_1，θ_1，经整理得

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=\frac{a\sin\beta}{\sin\gamma}。$$

所以C点的轨迹为一直线。自极点A到此直线的距离为$\frac{a\sin\beta}{\sin\gamma}$，自$A$引与此直线垂直的向量$\overrightarrow{AN}$的幅角为$\alpha$。

用参数法解题，不仅增加了数学对象，而且原来的数学关系也会发生重新组合等情况，这就为解题增加了方便之处。由于参数可自由选择，是一个变量，因此把组合起来的数学关系式处在一个可变状态中，从而可以采用更加灵活的手段来处理问题。通过上述例子可以看出，用参数法处理轨迹问题很有用。对于较复杂的轨迹问题，任一点的流动极坐标ρ，θ（或直角坐标x，y）之间的联系处于隐含状态，难以一眼看穿。要揭示出受轨迹条件制约的ρ，θ之间的固有联系，就需要选择恰当的参数，通过参数刻划动点的变化状态，同时依此为媒介，揭示出ρ，θ之间的内在联系，从而求出轨迹的方程。再如，作方程$x=\arccos(1-y)-\sqrt{2y-y^2}$的曲线时，若依此直接讨论该曲线的性质，或描点作图都很繁，若引进参数θ，令$\theta=\arccos(1-y)$，则数学关系重新组合为

$$\begin{cases}x=\theta-\sin\theta,\\ y=1-\cos\theta,\end{cases}$$

据此作图就容易了。参数能够刻划事物的变化状态，揭示变化因素之间的内在联系，因此在解析几何中有着广泛的应用。如讨论直线系、圆系、二次曲线系等都离不开参数法。在代数

中对于方程、不等式、函数的研究中，其字母系数也往往被视作参数，给问题的讨论带来很大的方便。在列方程解应用问题时，有时多设一些未知参数可以较易列出方程。在几何中，借助于参数，可以揭示几何图形中变化因素的内在联系，因此参数法也是研究几何图形问题的一种常用方法。

参数变异法 通过对问题引进参数，再对参数进行适当的选择，从而达到解决问题目的的一种RMI方法。例如，意大利数学家塔尔塔利亚正是不断采用参数变异法，将一般一元三次方程化归为一元二次方程，最终获得一般的一元三次方程的解决。对于一般的一元三次方程

$$ay^3+by^2+cy+d=0, \quad ①$$

引进参数 λ，令 $y=x+\lambda$，再让参数 $\lambda=-\frac{b}{3a}$，从而使方程①化归为如下的特殊一元三次方程

$$x^3+px+q=0。 \quad ②$$

再对方程②引进参数u，令$x=z+u$，并让参数$u=-\frac{p}{3z}$，则②化归为

$$z^3+q-\left(\frac{p}{3}\right)^2\left(\frac{1}{z}\right)^3=0。$$

最后再设 $v=z^3$，并用 v 同乘方程两端，则上述方程化归为如下一元二次方程

$$v^2+4v-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0。$$

而一元二次方程已经可以解决，从而一元三次方程也就解决了。

线性变换法 借助于线性变换进行映射的一种RMI方法。对于二元变量，一般的线性变换形式为

$$\begin{cases}x'=a_1x+b_1y+m,\\ y'=a_2x+b_2y+n,\end{cases}$$

其中$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$。

从几何的角度看，这就是所谓的仿射变换。上述变换取各种不同的特殊形式作为映射工具，就变成了各种不同的特殊的映射反演方法。例如取如下的特殊的线性变换

$$x'=a_1x+b_1y+m,$$
$$y'=a_2x+b_2y+n,$$

其中 $a_1b_1+a_2b_2=0$，$a_1^2+a_2^2=1$，$b_1^2+b_2^2=1$，从几何的角度来看，这就是一般的直角坐标变换，

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha+a,$$
$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha+b。$$

如果二元退化为一元，对于$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，取$x'=x+\frac{b}{2a}$，这就成为配方法。

线性变换法可以简化表达式，便于获得有关的性质。为了具体确定出变换的形式，有时需用待定系数法求出有关数值。

线性插值方法 处理误差和实验数据的方法之一。其含义是：已知函数$f(x)$的两点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，利用线性函数

$$g(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

来近似代替$f(x)$。

组合法 在一个数学问题中将其中已

有乃至新引进的各种元素按某种规则进行重新搭配，从而改变原问题的结构形式，以利于问题解决的一种化归方法。

例　试证对于任意大于1的正偶数n和自然数k，$1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}$能被$n+1$整除，但不能被$n+2$整除。

证明　令$s=1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}$。在$s$上再按逆转形式拼加上一个$s$，得

$$2s=(1^{2k+1}+n^{2k+1})+(2^{2k+1}+(n-1)^{2k+1})+\cdots+(n^{2k+1}+1^{2k+1})。$$

因为$i^{2k+1}+(n+1-i)^{2k+1}$能被$i+(n+1-i)=n+1$整除，从而$(n+1)|2s$。又$n>1$，所以$(n+1)\nmid 2$，故$(n+1)|s$。

如果将两个s除了第一项外，其余按逆向逐项进行组合，则得

$$2s=(1+1)+(2^{2k+1}+n^{2k+1})+(3^{2k+1}+(n-1)^{2k+1})+\cdots+(n^{2k+1}+2^{2k+1})。$$

此等式中，右端除（1＋1）外，每个括号的值均含有因子（$n+2$），但$(n+2)\nmid 2$，故有结论$(n+2)\nmid s$。

有效地运用组合法的关键在于各要素间的巧妙搭配。有时对问题结构直接变换就能导致问题的解决，有时则需要引入一些新的元素方能奏效，如加零法及乘一法的运用即属此列。

组合法在几何证明题、代数及三角等领域的某些计算题、恒等式及不等式的证明等方面都有着广泛的应用。

经验归纳法　一种不完全归纳法。其具体含义是：共性寓于个性之中，因此，在解决一个一般性问题时，可以先分析这个问题的几个简单、特殊情况，从中归纳、发现一般问题的规律，从而找到解决一般问题的途径。

例　求凸边形内角之和。

解　用A_n表示凸n边形的内角和。为了求出一般的A_n，可对n取一些特殊值来考察，即从一些特殊多边形的研究入手来发现一般性的规律。当$n=3$时，有$A_3=180°$；当$n=4$时，可在凸四边形中引一条对角线，把凸四边形分成两个三角形，从而求得$A_4=2\cdot 180°$；当$n=5$时，可在凸五边形中任取一顶点，从它出发可引两条对角线，把凸五边形分成三个三角形，于是$A_5=3\cdot 180°$。一般地，可归纳猜想$A_n=(n-2)\cdot 180°$。该猜想可用数学归纳法证明。

经验归纳法的思路在于，当遇到一个抽象的一般性问题难于解决时，可设法具体化，也就是特殊化，通过几个特殊来总结归纳出解题的一般规律。由此看来，经验是发现一般解题规律的有力工具，同时，这种方法能帮助人们在实践的基础上发现新的规律，提出新的数学命题。数学命题的推广，许多是从经验归纳法得来的。

函数归一法　将多种类型三角函数问题转化为单一形式的三角函数问题的一种三角变换的基本方法。

例　化简$(\csc\alpha-\sin\alpha)(\sec\alpha-\cos\alpha)(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)$。

分析　此题中有6类三角函数，而角均为单角，故可从减少函数的种

类入手。于是原式 $=\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$=\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=1。$$

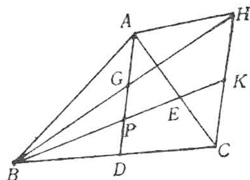
由于在一个问题中的函数类型减少了，便于观察问题中各种要素之间的关系，而所需要考虑问题的范围缩小，便于选用公式，容易获得问题所需要的结果。因此这是一种重要的三角变换的基本方法。它在求值、化简、论证、以及解三角方程中均是常用的技巧。

相似变换法 借助于相似变换进行映射的一种RMI方法。平面(空间)到自身的一个映射,如果对于任意两点A、B及其象A'、B'，有$A'B'=kAB$ $(k>0)$，把这个映射叫做平面（空间）的相似变换。相似变换有如下性质：①在相似变换下，两个相互对应的图形的对应角相等，所有对应线段都成比例。②在相似变换下,两个相互对应的图形的面积（体积）之比等于其相似比的平方（立方）。位似变换是相似变换的特殊情况，对于平面到其自身的一个映射，如果存在点S及常数$k(k\neq 0)$，使得对于任意点M及其象M'，满足：①S，M，M'三点共线；②$SM'=|k|SM$，则称这种映射为以S为位似中心、k为位似比的位似变换。在位似变换下，任何一条直线变为与它平行的直线。

例 过$\triangle ABC$的顶点B作任一直线，与边AC及中线AD分别相交于点E及P，则

$$2AE\cdot PD=AP\cdot EC。$$

证明 如图所示。将结论变换成



$\frac{\frac{1}{2}AP}{PD}=\frac{AE}{EC}$。取$AP$的中点$G$，以$B$为位似中心，将$GD$经位似变换变换到$HC$，则$\frac{GP}{PD}=\frac{HK}{KC}$，$GD\,/\!/\,HC$，连结$AH$，易推知有$\frac{AE}{EC}=\frac{HK}{KC}$，由此推得命题结论正确。

相似变换有着广泛的应用。应用它可以把图形放大或缩小而且形状不变。应用相似变换作为映射工具解决初等几何问题在下面情况下常能达到理想的效果。①当问题涉及线段长度和平行（共线）关系时，可试将一些线段分别变换到其相似形中的对应线段，使相互之间的关系明显化。②当问题涉及到过一定点若干射线，而直接讨论某一图形的形状、大小和位置有困难时，可试以这定点为位似中心，将指定图形进行位似变换，使之变成易于研究的情形。

相关分析法 概率统计方法的一种。它是以数量上研究现象之间的依存关

系的方法。

面积法　借助面积的自等性、可分性、可比性进行解题的一种方法。

例 1　在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，BD、CE分别是AC、AB边上的高，求证$BD>CE$。

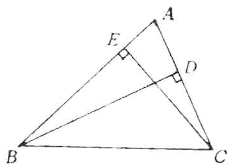


图 1

证明　由面积的自等性，得$S_{ABC}=S_{ABC}$，所以$\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BD$。而$AB>AC$，所以$BD>CE$。

用面积的自等性解题，常从不同的角度使用面积公式，上例正说明这一点。

例 2　$\triangle ABC$的中线AD、BE交于G，求证$GD=\frac{1}{3}AD$。

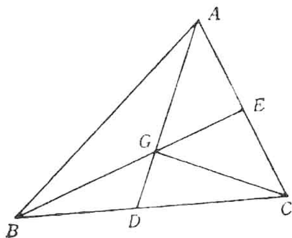


图 2

证明　由等高三角形的面积比等于底边的比，得

$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BDG}}=\frac{AG}{GD}。$$

同理

$$\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle CDG}}=\frac{AG}{GD}。$$

所以

$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BDG}}=\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle CDG}}。$$

又由$BD=CD$，得$S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CDG}$。所以$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG}$。同理$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BGC}$，所以$S_{\triangle ABG}=2S_{\triangle BDG}$。于是推得$GD=\frac{1}{3}AD$。

用面积的可比性解题，常用的依据是：同底（或等底）三角形的面积比，等于对应高的比；同高（或等高）的三角形的面积比等于对应底边的比。

例 3　证明等边三角形内任一点到三边的距离的和等于此三角形的高。

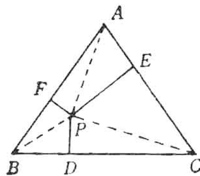


图 3

证明　设P为等边$\triangle ABC$内任意一点，$PD\perp BC$，$PE\perp AC$，$PF\perp AB$，连结PA、PB、PC，由面积的可分性，得$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$。于是推知$PD+PE+PF=h$。

用面积的可分性解题，一般要将图形分成若干小三角形，利用其整体等于部分之和建立关于条件和结论的关系式。

指数代换法　将一个指数式设为一个变量，从而达到解决问题目的的一种变量代换法。

例　解方程　$4^x - 3\times 2^{x+1} - 7 = 0$。

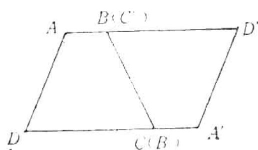
解　设$y = 2^x$，则方程归结为

$$y^2 - 6y - 7 = 0。$$

这是一个代数方程。将根求出后，再代入$y = 2^x$就可求出x，从而原方程求解问题也就解决了。

这种指数代换法对形如$f(a^x) = 0$的指数方程问题均适用。

拼补法　一种特殊的构造图形法。它是在问题给定的图形上，再拼补上一个或若干个图形而得到一个新图形，并借此获得问题的解的一种方法。例如，为了推求梯形面积公式，将梯形再拼补上一个大小相同的梯形，使之成为一个平行四边形，然后利用平行四边形的面积公式便可得出梯形面积公式。这用的就是拼补法。有效地运用拼补法的关键在于拼出一个具有如下特点的新图形：对它人们比较熟悉或易于了解；它与原图形在问题所论方面（如上例中的面积）具有明确的制约关系（如上例中$S_{▱ADA'D'} = 2S_{▱ABCD}$）。



尝试法　亦称试探法。一种归纳推理方法。它是沿着一定方向，通过尝试，摸索规律，探求解题途径的方法。

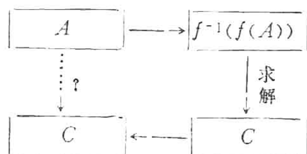
例　有一根长9.5米的条形钢材，要分别截成长0.5米和0.7米的甲、乙两种毛坯，以便进一步加工钢轴。问如何截法，才能节约钢材，并且乙种毛坯尽可能多些？

分析　若甲毛坯截0根，因为9.5不是0.7的整数倍，所以这种截法有残料，不是问题的解。若甲毛坯截1根，原钢材便剩下9米，由于9也不是0.7的整数倍，这种截法也不是问题的解。照此继续，按甲毛坯截2根、3根，…尝试下去，最先遇到无残料的截法就是问题的解。当截取5根甲毛坯时，剩下7米，正好是0.7的倍数，没有残料，于是对应的截法就是甲毛坯5根，乙毛坯10根，这正是问题所要求的解。

尝试法在数学解题中有着广泛的应用，例如二次三项式因式分解的十字相乘法、整数的质因数分解，求有理系数高次方程的有理根及任意方程实根的近似计算等都可用尝试法进行思考。

映射反演联用法　一种特殊的化归方法。其具体含义是：为了解决有关数学对象A的问题，首先将A在一定范围内进行映射，得$f(A)$，再对$f(A)$进行反演，得$f^{-1}(f(A))$；然后通过对$f^{-1}f(A))$的考察，分析而获得问题的解。其中的映射常常具体表现为A与另一对象的某种运算。如在实数范围内对x^4+4进行因式分解，可如下进行：$x^4+4 = x^4+4+4x^2$

$-4x^2=(x^4+4x^2+4)-(2x)^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$。这里，$f$为$(x^4+4)$与$4x^2$的加法运算（有理多项式环内），反演$f^{-1}$即其逆运算——减法运算；$(x^4+4+4x^2)$减$4x^2$。加法和减法这对互逆运算联合进行后，得$f^{-1}(f(A))=x^4+4+4x^2-4x^2$，然后通过对$f^{-1}(fA))$的分解便得到了原问题的解。映射反演联用法中，由$A\to f(A)\to f^{-1}(f(A))$是一次完成的，如果$A$加上一个对象，便同时要减去同一对象，因而此法具有始终保持"平衡"的特点。这一特点显然源自于$A\to f(A)\to f^{-1}(f(A))$这一否定之否定的过程。从下述映射反演联用法解题程序框图



中可以看出，这一方法也是一种特殊的RMI方法。映射反演联用法在数学中具有多种不同的表现形式，如加零法、乘一法（分子有理化、分母有理化等）等均属此列。这种方法在代数、三角、几何、拓扑及数理逻辑等领域中均有广泛的应用。

科学计数法 科学技术中常用的一种记数方法。这种记数法是把一个正数记成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$。当此正数大于1时，n为比原数的整数位数小1的整数，当此正数小于1时，$-n-1$为小数点后0的个数。例如760000记为7.6×10^5，0.00046记为4.6×10^{-4}。

科学抽象方法 正确反映客观事物或现象的本质，形成科学概念、范畴和揭示其规律的一种研究方法。它是人们在思维中撇开事物的非本质的次要属性，并引出其固有的本质特征，以达到对事物的本质和规律的认识的一种科学研究方法。例如，五枝笔、五个桃、五头牛、五本书、五公里、五小时，等等，从中舍去笔、桃、牛、书、公里、小时等具体含义，便可抽出数5这个概念。这里用的就是科学抽象方法。这种方法是任何科学工作者都要运用的一种方法。它在科研中具有重要的作用，是揭示研究对象的性质和运动规律的有效方法，是建立科学定律及理论体系的常用工具。其具体作用在于：能把所考察对象内部的本质联系和过程揭示出来，能从纯粹形态上考察事物的运动过程；能够深入事物的里层，把决定事物性质的隐蔽的基础抽象出来；能从事物的基础出发，把事物的各种属性和关系综合起来，从而把事物的本质作为一个整体抽象出来，科学抽象法在数学中有着广泛的应用，象数学对象、概念、方法、符号等都是经过科学抽象得来的。在数学中，如果按科学抽象的方式来划分，有等价抽象、理想化抽象、可能性抽象等；如果按抽象的程度来划分，有强抽象、弱抽象和广义抽象等。科学抽象的步骤为：核实材料、选择材料、揭示事物之间的联系、揭示事物的性质和内部联系。科学抽象必须遵循如下原则：以实践为基础，掌握必要的充分的和可靠的研究资料，掌握科学的思维方法和思维规律。

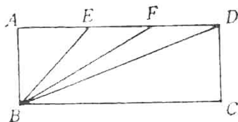
矩阵的初等变换法 解线性方程组的方法。其具体含义是：有顺序地利用对矩阵的行（或列）的初等变换，可以把 n 元线性方程组的增广矩阵交换为如下形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots 0 & x_1{}^0 \\ 0 & 1 & 0\cdots 0 & x_2{}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots 0 & x_.{}^0 \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & x_n{}^0 \end{pmatrix},$$

其中$x_1{}^0$，$x_2{}^0\cdots$；$x_n{}^0$就是原方程组的解。它的实质就是高斯消去法。矩阵的初等变换是指对矩阵进行如下三种操作：①用一个非零常数乘某一行（或某一列）的所有元素；②用一个数乘某一行（列）的所有元素后加到另一行（列）的对应元素上去；③两行（列）互换。

复数法 把一个问题映射为有关复数的关系结构系统，并据此定映和反演的一种RMI方法。用复数法解决数学问题的步骤为：①将数学问题映射为复数问题；②对复数问题进行计算和推理，得到复数结论；③将复数结论反演到原问题的解答。从而完成原问题的解决。

例 1 在矩形$ABCD$中，$AB=\frac{1}{3}BC$，E、F为线段AD的三等分点，求证 $\angle AEB+\angle AFB+\angle ADB=90^\circ$。



证明 第一步，将几何问题映射为复数问题。为此，以 B 为原点，BA、BC为轴，BA 为单位长建立复平面。则E、F、D 对应点的复数分别为 $z_1=1+i$，$z_2=2+i$，$z_3=3+i$。而$\angle AEB=\arg z_1$，$\angle AFB=\arg z_2$，$\angle ADB=\arg z_3$，因此原问题映射为：已知复数$z_1=1+i$，$z_2=2+i$，$z_3=3+i$，求证 $\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3=90^\circ$。第二步，对复数进行计算，

$$\begin{aligned}&\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3\\ =&\arg(z_1z_2z_3)\\ =&\arg[(1+i)(2+i)(3+i)]\\ =&\arg(10i)=90^\circ。\end{aligned}$$

第三步，将复数结论反演到原问题中，由于$\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3=\angle AEB+\angle AFB+\angle ADB$，所以，$\angle AEB+\angle AFB+\angle ADB=90^\circ$，从而原问题得证。

由上例可知，通过建立坐标系，可以使平面上任一点$z(a,b)$与复数$a+bi$对应。这样，全体复数与平面上所有点之间就建立了一一对应。而平面上的点$z(a,b)$则又一一对应于起点于原点的向量 $\overrightarrow{oz}$。因此复数又与向量建立一一对应。复数 $a+bi$ 与一组实数（a，b）一一对应。正是由于有这些一一对应关系，给复数法的应用开辟了广阔的领域，它既可用于解决几何问题，又可用来解决代数问题，还可用来解决三角和物理中的问题。下面再举一例说明它在三角中的应用。

例 2 求证 $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot(1-2\sin^2\alpha)$，其中

$|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$。

证明 联想到对复数 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$运用棣莫弗定理求 z^4 时，等式中出现过$\sin 4\alpha$ 的形式，这就启发我们考虑，把原问题映射到复数问题来解决。设 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，则 $z^4=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha$，将 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4$ 按牛顿二项式形式展开经整理得

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=(\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)+(4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha)i。$$

经比较可知，按复数定义有

$$\sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha-4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha。$$

对上式进一步化简得

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot(1-2\sin^2\alpha)。$$

于是原问题得证。

同一个复数，可以有四种表示形式：代数形式、向量形式、三角形式、指数形式。在应用复数法解决问题时，可根据具体问题的不同，选择适宜的表示形式，如例 1 选择的是代数形式，例 2 选择的是三角形式。这是成功地应用复数法的关键。因此把数学问题映射为复数问题要注意灵活性。

选择法 特殊化的一种方法。选择一个具有所说性质的事物，然后用顺推或逆推的方法来断定对所选择的这个事物所说的事情发生。

例 设$S=\{实数x：x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$T=\{实数x：1\leqslant x\leqslant 2\}$，则有$S=T$。

证明 先证S是T的子集。设 x 是S中的元素，所以 $x^2-3x+2\leqslant 0$，从而 $(x-2)(x-1)\leqslant 0$。这就有：或者 $x-2\geqslant 0$，$x-1\leqslant 0$ 或者 $x-2\leqslant 0$，$x-1\geqslant 0$。但前者不能发生。假若不然，就有 $x\geqslant 2$，$x\leqslant 1$，这是不可能的。由后者推知$1\leqslant x\leqslant 2$，故x在T中。于是有$S\subset T$。再证T是S的子集。设 x 是T中元素，所以$1\leqslant x\leqslant 2$，从而有 $x-2\leqslant 0$，$x-1\geqslant 0$。故$(x-2)\cdot(x-1)\leqslant 0$，即$x$在$S$中，于是 $T\subset S$。综上所述得知$S=T$。

在上面的证明过程中，设 x 是S中的元素，这里运用的就是选择法。因为证明S是T的子集合，必须证明对S中所有的x，有x在T中，这就是要证明对所有具有性质 $x^2-3x+2\leqslant 0$的实数x有$1\leqslant x\leqslant 2$。用选择法时应该在这样的实数中选择一个譬如 x'，它具有所论的性质$(x')^2-3x'+2=0$。由此顺推，然后断定所说的事件发生，也就是有 $1\leqslant x'\leqslant 2$。

选择法适用于证明对于出现量词“对所有的”的命题。

选点法 一种特殊化的方法。它是在一个与函数关系有关的问题中，通过选择自变量若干个特殊值（点）进行分析，以此达到解决问题目的的一种方法。

例 设 $f(x)=1+2\cos x+3\sin x$，若对任意x成立恒等式$af(x)+bf(x-c)=1$，试确定常数 a、b、c。

解 用选点法．取x 的三个值，

$x=0$，π，$\frac{\pi}{2}$，分别得

$$2b\cos c-3b\sin c=1-3a-b, \quad ①$$

$$-2b\cos c+3b\sin c=1+a-b, \quad ②$$

$$3b\cos c+2b\sin c=1-4a-b。 \quad ③$$

①＋②得

$$a+b=1。 \quad ④$$

由②、③、④解得 $\cos c=\frac{b-1}{b}$，$\sin c=0$。利用 $\sin^2 c+\cos^2 c=1$ 得 $b^2=(b-1)^2$。解得 $b=\frac{1}{2}$。

所以 $a=\frac{1}{2}$。由 $\sin c=0$，得 $c=2k\pi$，$(2k+1)\pi$，$k\in z$（其中“z”表示整数集）。但 $c=2k\pi$ 时，$\cos c=1$ 与 $\cos c=\frac{b-1}{b}=-1$ 不符，所以 $c=2k\pi$ 应舍去。因此，$a=b=\frac{1}{2}$，$c=(2k+1)\pi$，$k\in z$。选点法是中学数学中常用的一种方法。利用选点法可以建立经验公式、确定有关方程中的系数、证明方程实根的存在性等问题。

选言推理 间接演绎推理的一种形式。它是根据选言判断的逻辑性质而进行推演的推理，其前提中有一个是选言判断。

选言判断的逻辑性质，是指选言判断 $p\vee q$ 与选言肢 p、q 之间的真假值关系。选言判断分为相容的与不相容的。不排除选言肢同时存在的可能性就是相容的；排除选言肢同时存在的可能性就是不相容的。如果用“1”表示真，用“0”表示假，对于相容选言判断，其真值表为

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

对于不相容选言判断，其真值表为

p	q	$p\vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

从选言判断的真值表可看出，不论是相容选言判断，还是不相容选言判断，当 $p\vee q$ 和 $\overline{p}$ 都为真时，q 必真。由此可得到如下的选言推理：由选言判断 $p\vee q$、$\overline{p}$ 真，推演出其选言肢 q 为真的推理。于是得到其推理规则为

$$\frac{\begin{array}{c}p\vee q\\ \overline{p}\end{array}}{q}$$

例 如果命题 L 小于零或者等于零、L 不等于零都是真的，那么根据推理规则可知，L 小于零为真，即

$$\frac{\begin{array}{l} L \leqslant 0 \\ L \neq 0 \end{array}}{L < 0}$$

类似地，上述推理规则可以推广到由两个以上选言肢组成的选言判断的情况，即

$$\frac{\begin{array}{l} p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \\ \overline{p_1} \\ \overline{p_2} \\ \vdots \\ \overline{p_{n-1}} \end{array}}{p_n}$$

重选原则 见抽屉原则。

顺推法 见综合法。

顺序消元法 见消元法。

待定法 一种逆向思维方法。它是指从问题的结论出发，先设出某个未知数、某个未定形式或某个方案，而后根据条件再对之加以确定的一种方法。例如列方程解应用题，设值法，待定系数法等均属此列。利用待定法要注意其待定值、待定形式和某个方案的存在性，不然可能导致错误的结果。

待定系数法 一种特殊的参数法。其具体含义是：如果可以确定所求结果为含有若干待定系数的表达式，这时可由此建立起恒等式，然后通过恒等式变形或代换，以确定其系数，从而获得问题所要求的结果。

用待定系数法解题的步骤是：

第一步 假定一个含有待定系数的恒等式；

第二步 根据恒等式的性质列方程组；

第三步 解方程组，求出待定系数。

这里所根据的恒等式性质有如下两条：

①若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，则 $a_0=b_0$，$a_1=b_1$，…，$a_n=b_n$。

②若 $f(x)\equiv g(x)$，则用二函数公共定义域内任意值代 x，其左右两边得出的值相等。

例 把多项式 x^3-x^2+2x+2 表示成 $x-1$ 的降幂形式。

解 分如下三步：

第一步 假定含有待定系数的恒等式

$$x^3-x^2+2x+2=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D.$$

第二步 根据不等式的性质列方程组。展开上式，比较两边同次幂系数，得：

$$\begin{cases} A=1, \\ -3A+B=-1, \\ 3A-2B+C=2, \\ -A+B-C+D=2. \end{cases}$$

第三步 解方程。解上述方程得

$$A=1,\ B=2,\ C=3,\ D=4,$$

于是得

$$x^3-x^2+2x+2=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+4.$$

使用待定系数法应当注意有几个参数就应列出几个方程。待定系数法是数学中的常用方法，它适用于需求

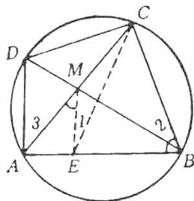
的未知式子的基本形式已确定，只是其中的系数尚属待定。这种方法在初等数学中的因式分解、求函数表达式、把分式分解为部分分式，解方程、求数列之和、求复数的平方根、研究多项式的整除性等问题中都有其用武之地。在高等数学中，求不定积分、级数计算、求解微分方程等问题也用到这一方法。

待定线段法　一种特殊的分解方法。它是通过引入待定的未知线段，而将较复杂的线段比例式问题分解为若干个基本的线段比例式问题，以利于问题最终解决的一种方法。

例　已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于M。求证

$$\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}=\frac{AM}{CM}。$$

分析　如图所示。



设

$$①\frac{AB}{CB}=\frac{AM}{x};$$

$$②\frac{AD}{CD}=\frac{x}{CM}。$$

显然，只要能找到上述 x，则问题便迎刃而解了。作$\angle AME=\angle ABC$，则 $\triangle AME\sim\triangle ABC\Longrightarrow\frac{AB}{CB}=\frac{AM}{EM}$。剩下的关键就是证$\frac{AD}{CD}=\frac{EM}{CM}$。这是一个基本题，不难推证（$E$、$M$、$C$、$B$四点共圆，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，又$\angle ADC=\angle EMC$，$\therefore\triangle ADC\backsim\triangle EMC$）。最后，①×②便是欲证原结论。

待定线段法可用于处理如下类型的线段等式问题以及可归结为这些类型的问题：

①求证$\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{e}{f}$型。

此时可引入待定的未知线段 x，设

i $\frac{a}{b}=\frac{e}{x}$；

ii $\frac{c}{d}=\frac{x}{f}$。

然后在已知图形中，作出满足 i 的未知线段 x，并证明它亦满足 ii。这样由i×ii便可得到欲证结论。

②求证$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$型。

可引入待定的未知线段 x，使

i $x=d-c$；

ii $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$。

先在已知图形中，作出线段 $x=d-c$，然后证明此线段满足ii即可。

③求证$a\cdot b=c\cdot d+e\cdot f$型。

可引入待定的未知线段 x、y，设

i $ax=cd$；ii $y=b-x$；

iii $ay=ef$。

先在已知图形中作出满足等式 i、ii 的x、y，然后证明 y 满足iii，于是由 i、ii、iii便可推知

$$cd+ef=a(x+y)=ab。$$

④求证$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$型。

可引入待定的未知线段 x、y，设

i $\frac{a}{b}=\frac{x}{f}$； ii $y=e-x$；

iii $\frac{c}{d}=\frac{y}{f}$。

先在已知图形中，作出满足 i、ii、iii的线段x、y，然后证明y满足iii，于是由i、ii、iii可知

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{x+y}{f}=\frac{e}{f}。$$

⑤求证$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=1$型。

此可由$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{f-e}{f}$归结成类型④。

有效地运用待定线段法的关键，在于引入恰当的待定线段（将问题进行分解），并将它们在给定图形的适当位置上作出来。

恒等变形法　又称恒等变换法。是借助恒等变形以达到解决问题目的的一种关系映射反演法。

例　设 A、B、C、a、b、c 及 x、y、z 均为实数，且$A+a\geqslant b+c$，$B+b\geqslant c+a$，$C+c\geqslant a+b$，$x+y+z=0$，求证

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2ayz+2bzx+2cxy\geqslant 0。$$

分析　只要进行一系列等式变形，就可以将求证式的左边化为几个非负数之和。由 $x+y+z=0$ 得，$(y+z)^2=x^2$，$(z+x)^2=y^2$，$(x+y)^2=z^2$，于是，

$$a[(y+z)^2-x^2]+b[(z+x)^2-y^2]+c[(x+y)^2-z^2]=0。$$

经展开移项整理，得

$$2ayz+2bzx+2cxy=(a-b-c)x^2+(b-c-a)y^2+(c-a-b)z^2。$$

上面等式两边同加上 $Ax^2+By^2+Cz^2$，右边即可化为三个非负数之和，从而命题得证。

所谓恒等变形是指把一个代数式换成另一个和它恒等的代数式，或者把一个一般的数学解析表达式换成另一个和它恒等的数学解析表达式。恒等变形法在数学中有着广泛的应用。

恒等变换法　见恒等变形法。

差分法　亦称有限差分法。一种常用的数值方法。它是利用差分运算之间的各种关系进行内插的方法。所谓差分，就是自变量按等差数列改变时，对应的函数值之差。设$y=f(x)$的自变量x在定义域中从x_0变到$x_0+\Delta x$，对应的函数增量$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$称为$f(x)$在$x=x_0$的一阶差分，记为Δy_x。一阶差分Δy_x的差分，称为$f(x)$在x的二阶差分，记为$\Delta^2 y_x$。类似地可定 n 阶差分$\Delta^n y_x$。利用差分法可以把微分方程化为对应的差分方程，从而得到微分方程的近似解。插值法是差分法的具体应用。差分法在求高阶等差级数之和，以及在非线

性规划、动态规划的领域中都有广泛的应用。

类比法 见类比推理。

类比推理 又称类比法。它是根据两个或两类对象之间有部分属性相同，而推出它们的某种其它属性也相同的推理。类比推理是从特殊到特殊的推理。类比推理的形式为：

A对象具有性质$E_1, E_2, \cdots, E_n$，F

B对象具有性质$E_1, E_2, \cdots, E_n$

所以B对象也具有性质F

例 1 在平面几何与立体几何之间有很多相似的性质：

平面几何	立体几何
对顶角相等	对棱二面角相等
矩形的对角线 (d)	长方体的对角线 (d)
$d^2=a^2+b^2$	$d^2=a^2+b^2+c^2$
矩形的面积	长方体的体积
$S=ab$	$V=abc$
	棱锥的体积
$S=\frac{1}{2}$底·高	$=\frac{1}{3}$·高·底面积

由平面几何中平行性分线段成比例定理："三条平行线截两条直线，所得的四条线段对应成比例"。用类比法，可以猜想立体几何中平行平面分线段成比例定理："三个平行平面截两条直线，所得的四条线段对应成比例"。

例 2 历史上数学家伯努利(1654—1705)为解决级数$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$的求和问题，曾公开征求解答。直到18世纪上叶，才由欧拉用类比法给出了这一问题的结果。

欧拉首先考虑了只含偶次项的$2n$次代数方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=0 \quad (b_0\neq 0),$$

并假设该方程有$2n$个互不相同的根

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \cdots, \beta_n, -\beta_n。$$

则得

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)。$$

显然x^2项的系数为

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right)。$$

接着，他考察了三角方程

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0,$$

并把它视为只含偶次项的无穷的代数方程。由于这个方程含有根$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，$\cdots$，于是欧拉大胆采用类比法，即仿照上述的$2n$次多项式分解成乘积的形式，得

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots=0。$$

这样一来，把上面等式右边的乘积展开，便可通过比较而得到 x^2 项的系数为

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots,$$

经整理，得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

由于这一结果是通过类比得来的，因此只能是一个猜想。欧拉经过计算，发现两边的数值直到第六位小数都是相同的，因此他确信这一结果是正确的。后来这一结果得到了严格的数学理论证明。

类比方法所推出的结论带有很大的或然性，客观事物之间既有相似的一面，又存在着差异的一面。相似的一面是类比的客观基础，而差异的一面，对类比起限制作用，并使类比的结果带有很大的或然性。为了提高类比的可靠性程度，首先应尽量增加推理中用作类比基础的相同方面的属性，因为相同的属性愈多，推出属性相同的可能性就愈大，结论就愈接近正确。其次是尽可能提高类比属性与推出属性的相关程度，二者联系愈密切，则结论就愈可靠。正由于类比推理的结论具有或然性，因此在使用这一方法时必须要和其它思维方法配合使用，并始终接受实践的检验。在数学中，通过类比获得的结论必须予以严格的理论证明。

类比方法在科学研究中有着重要的作用，它是最富有创造性的一种方法。科学上有不少重要的假说，是通过类比法提出来的。数学中不少重要发现也是通过类比法得出来的。在工程技术中可以受类比法所得的启发而获得创造发明。因此类比法是获取新知识的一个重要工具。

在数学教学过程中，用类比法引导学生进行发现，对于培养学生的创造能力有着重要的意义。事实上，在数学中有不少的定理、法则都可以先用类比法猜想，然后再给出严格证明，例如，数与式之间、平面与空间之间、一元与多元之间、低次与高次之间、相等与不等之间、离散与连续之间、有限与无限之间等等，都可以运用类比推理的方法作出新的预见和发现。

逆推法　见分析法。

逆向归纳法　见数学归纳法。

逆推尝试法　见解数学选择题的方法。

祖暅原理　求立体图形体积的一种方法。该原理的具体内容为：两平行平面间立体图形，若等高处面积相等，则两立体体积相等。

该原理为我国古代数学家祖暅在推导球体积时提出。如图1，在边长为 $2R$ 的正方体纵横两方向作正方体内切正交圆柱。两圆柱公共部分称为

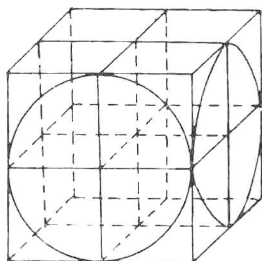
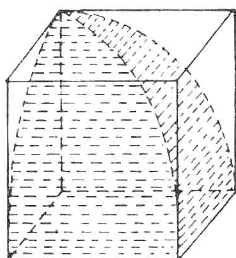
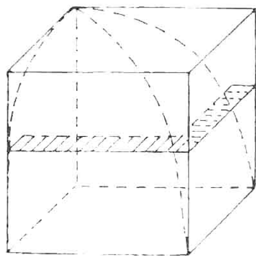


图 1


图 2

牟合方盖，图2表示牟合方盖$\frac{1}{8}$部分。根据截面原理容易求得：V牟合方盖：V球 = $4:\pi$。如图 3，用距离底面 h 的平面截$\frac{1}{8}$部分牟合方盖。这时，可以算出图 3 中阴影部分面积恰好等于边长为R、高为R的正四棱锥 在 h 处截面的面积（图 4）。这里，祖暅提


图 3

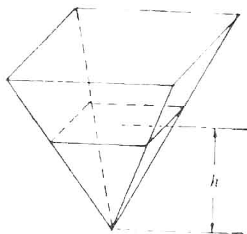


图 4

出其著名定理：“幂势既同，则积不容异”。由此求得$\frac{1}{8}$（V立方体－V牟合方盖）$=\frac{1}{3}R^3$。所以，V球 $=\frac{4}{3}\cdot\pi R^3$。

祖暅原理在西方直到17世纪才由意大利数学家 B·卡瓦列里重新发现。

统计方法 是有关收集和取得数据资料，并对其进行整理、分析，以对所研究的问题作出判断和预测的方法。例如，要调查某县的个体农户在某年每户使用化肥的数量。从这县的农户中抽选出若干户，比如300户，调查出这些户共用化肥27000公斤，户均90公斤，以这个数字作为全县户均化肥用量的估计值。这个例子就是运用的统计方法。统计方法有如下特点：它是从事物的外在数量表现考察事物的规律性；具有部分推断整体、总体的性质；由统计方法得出的结论，可能有错误或误差。统计方法在现代科学技术、工农业生产和社会生活各个领域中有着广泛的应用。用统计方法获取的结论，往往成为当局作出决策的重要依据。学点统计方法的知识，可以培养人们的辩证唯物主义观点，提高人们的文化素质。

统筹方法 从工序流线图出发，先找出主要矛盾线，明确关键工序，然后在保证质量和尽可能不增加人力、物力的前提下，设法缩短关键工序的时间，从而达到缩短工期目的的一种统筹安排方法。

统计分组方法 概率统计方法之一

种。它是根据事物内在特点和统计研究的任务，按照某种标志，把社会的、经济的或其它的现象区分出不同的类型或性质不同的组，以对统计指标作更深刻的阐明、分析其总体的结构、总体各部分之间的区别与联系的一种方法。

秦九韶法　见消元法。

配方法　配凑法的一种。它是把某一个数学式子搭配成某一个式的平方形式。比如对一般的一元二次方程

$ax^2+bx+c=0$，其中$a\neq 0$

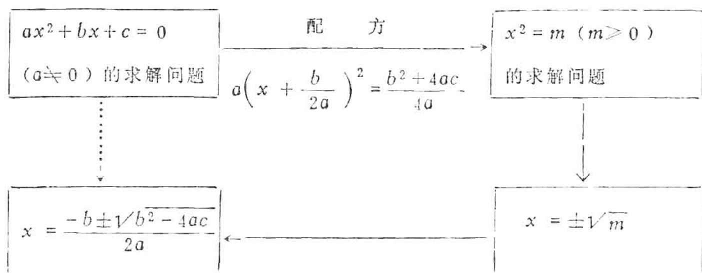
的求解问题，通过配方

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2+4ac}{4a},$$

化归为特殊的一元二次方程

$x^2=m$，$m\geqslant 0$

的求解问题。这种化归方法是通过配方得以实现，因此称为配方法，用框图表示如下



上述配方法的实质是一种特殊的线性变换法，其配方的变换形式为

$$y=x+\frac{b}{2a}。$$

例　讨论抛物线$ax^2+bx-y+c=0$（$a\neq 0$）的性质。

分析　对于标准状态下的抛物线$y^2=2px$或$x^2=2py$的性质是熟悉的，为此可将原方程通过配方法转化为特殊的标准形式。经配方，原方程变为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{1}{a}\left(y-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)。$$

令　$u=x+\frac{b}{2a}$，$v=y-\frac{4ac-b^2}{4a}$，

于是原方程就转化为

$$u^2=\frac{1}{a}v。$$

这正是标准形式的抛物线方程。

配方法是中学数学中的一个常用方法。它在二次函数、方程、最值、不等式等许多领域中有着广泛的应用。

配凑法　根据问题的具体条件设法凑出一个与已知有关或能利用已知条件的式子，以达到解决问题目的的一种恒等变形方法。

例　已知方程$x^2+mx+n=0$的两根为$\mathrm{tg}\alpha$和$\mathrm{tg}\beta$，求$A=\sin^2(\alpha$

$+\beta)+m\sin(\alpha+\beta))\cdot\cos(\alpha+\beta)+n\cos^2(\alpha+\beta)$的值。

分析 由已知及韦达定理得到$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-m$，$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=n$，所以 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\frac{m}{n-1}$。由于欲求式子中没有$\mathrm{tg}\alpha$和$\mathrm{tg}\beta$之类，因此为了解决该题，必须设法将原式进行变形，以便和已知沟通起来。原式$=$原式$\times\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}$

$$=[\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)+m\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+n]\cos^2(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)+m\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+n}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)}$$

$$=n。$$

上述解法只有当$n\neq1$时，方行得通。当$n=1$时$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$，$\therefore$ $\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故$\cos(\alpha+\beta)=0$。$\sin(\alpha+\beta)=1$。从而原式$=1+m\cdot0+0=1$。

配凑法在数学中有着广泛的应用，它主要用在求函数的解析式、不等式的证明、数列、复数、恒等式的证明、求值和化简等方面。

配对原理 用来确定某个集合A所含元素个数的一种方法。设A所含元素的个数为$|A|$，集合B所含元素个数为$|B|$。如果存在集合A到集合B上的双射，则$|A|=|B|$。

例 将正整数n写成三个正整数之和，有多少种写法？

解 用A_n表示将n写成三个正整数之和的所有写法集合。用B_n表示"+"按照如下填法的所有填法集合：将n个1排成一行，两个相邻1之间空出一个空格，共$n-1$个空格：

|□|□|□…□|□|

从$n-1$个空格中取出两个空格，都填上"+"号。设填法$\alpha\in B_n$，此填法中填上"+"的两个格分别是第n_1，n_1+n_2个空格。于是可把α记作(n_1, n_2)。对于填法$\alpha=(n_1, n_2)$，第n_1个格子以前1的个数为n_1，两个填上"+"号的空格之间的1的个数为n_2，第n_1+n_2个格子之后的1的个数记为n_3，则$n_3=n-n_1-n_2$，于是$n=n_1+n_2+n_3$。这是将n写成三个正整数之和的一种写法，记作(n_1, n_2, n_3)。定义集合B_n到A_n的映射φ：$(n_1, n_2)\rightarrow(n_1, n_2, n_3)$。易知此$\varphi$是双射。由配对原理知，$|A_n|=|B_n|$，而$|B_n|=C_{n-1}^2$，故$|A|=C_{n-1}^2$。

配对原理是关系映射反演原则的一种具体表现形式。应用它解决问题的关键在于寻找一个便于计算的集合B，并且可以建立起A到B上的双射。这样一来，求$|A|$的问题就可以转化为求$|B|$的问题。

逐差法 是求数列前n项和的一种方法。其具体含义是：对于一个给定的数列，从构成来看难以求和，如果从其给定的开始一些已知项，逐次求出其差数列，最后可得到一个可求和数列，那么，由此推回去，就得到原数列的通项公式，从而可求得原数列的前n项之和。设数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \quad ①$$

求各相邻两项之差，得一新数列

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\qquad ②$$

这是①的第一差数列。再求出②的每连续两项之差，

$$a_3-2a_2+a_1,\ a_4-2a_3+a_2,\cdots,a_{n+1}-2a_n+a_{n-1},\qquad ③$$

这是①的第二差数列。依次类推。

记 $\triangle a_n=a_{n+1}-a_n$，$\triangle a_n^2=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$，…分别叫做 a_n 的一阶差分，二阶差分，……。如果数列$\{a_n\}$的第k差数列是一个常数列，那么就称这个数列为k阶等差数列。以 a_1 为首项，$\triangle a_1$，$\triangle^2 a_1$，…，$\triangle^k a_1$为各次阶差的首项的k阶等差数列前n项和的公式为

$$S_n=C_n^1\triangle^0 a_1+C_n^2\triangle a_1+\cdots+C_n^{k+1}\triangle^k a_1。$$

例　求和$1+3+6+10+\cdots$

解　第一差数列：2，3，4，…，

第二差数列：1，1，1，…，

于是

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}。$$

逐次逼近法　一个普遍的科学方法。其具体含义是：为了解决一个数学问题而首先从一个与该问题的实质内容有着本质联系的较大范围开始进行解决。再逐步缩小范围，逐步逼近，以至最后达到问题所要求的解。例如π值的计算，我们可从圆内接和外切正六边形开始，然后正十二边形，正二十四边形，…。利用半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad 和$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

进行递推计算。由圆内接和外切正六边形计算出$3<\pi<2\sqrt{3}$，取平均值得$\pi\approx3.2321$。再由圆内接和外切正十二边形去逼近，取平均值得$\pi\approx3.1606$，等等，直到满足实际需要为止。这里用的就是逐次逼近法。

数学中的逐次逼近法基本上可分两类：一类是问题解序列的逐次逼近法，另一类是问题序列的逐次逼近法。所谓问题解序列法，就是给问题一个可行或近似的初始解，然后以此解为基础，按固定的程序给出一个解序列。这个解序列的极限就是该问题的精确解。序列的每一项都是这个问题的近似解。其框图表示如图1所示。

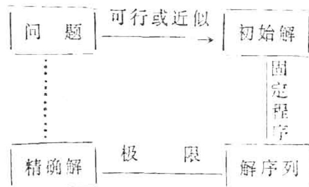


图 1

根据这一方法解决问题，要求所构造的解序列是收敛的，且收敛到问题所要求的精确解。因此，运用这一方法解决问题必须注意所给问题条件。如

果问题的条件不满足使解序列收敛，则这种方法是失效的。另外，在运用这一方法解决问题时还可考虑到方法的有效性，能估计误差项，便于计算机使用等等。

所谓问题序列逐次逼近法，就是从一个与问题实质内容有本质联系的较大范围上的问题开始，逐步缩小问题的范围，通过这一系列问题解决的成果和方法的分析、综合、启发等，从而使原来的问题获得解决的一种方法。其框图表示如图2所示。例如，数学家对比伯巴赫猜想的证明就是采取这种类型的逼近方法。

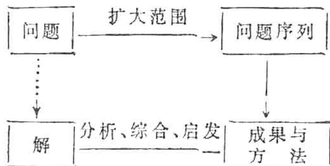


图2

比伯巴赫猜想是这样一个问题：设 $w=f(z)$ 是区域 D 内的正则函数，令

$S=\{f(z)$：$f(z)$ 在单位圆内单叶，$f(0)=0$，$f'(0)=1\}$。若 $f(z)\in S$，对 $f(z)$ 泰勒展开

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,$$

则有

$$|a_n|\leqslant n,\ n=2,\ 3,\ \cdots。$$

1916年，当比伯巴赫本人解决了 $|a_2|\leqslant 2$ 之后，就提出了上述一般问题。对于这个一般结果，人们只能逐步逼近而无法一下子彻底解决，直到1984年上半年，L·de布朗基在前人所取得的成果的基础上，才彻底解决了这个猜想。在这68年当中，数学家是怎样一步一步逼近这个问题的呢？现把有代表性的结果介绍如下。

（1）由特殊到一般，对每个 a_n 逐一进行估计，进展情况是：

1923年，K·勒夫纳 得到 $|a_3|\leqslant 3$；

1955年，P·R·加拉贝迪安 和M·M·席费尔 得到 $|a_4|\leqslant 4$；

1968年，R·N·佩德森和 小沢满 得到 $|a_6|\leqslant 6$；

1972年，R·N·佩德森和席费尔 得到 $|a_5|\leqslant 5$。

（2）将 n 前面乘上一个数 k，即先证明 $|a_n|\leqslant kn$，然后再逐步改进 k，当 $k\to 1$ 问题也就解决了。按这个方向的逐次逼近的进展情况如下：

1916年，比伯巴赫 得到 $|a_n|\leqslant \frac{e^2}{4}n$ $(n=1,2,\cdots)$；

1925年，J·E·李特尔伍德 得到 $|a_n|\leqslant en$ $(n=1,2,\cdots)$；

1965年，И·M·米林 得到 $|a_n|\leqslant 1.243n$ $(n=1,2,\cdots)$；

1972年，C·H·菲茨杰拉尔德 得到 $|a_n|\leqslant\sqrt{\frac{7}{6}}n$ $(n=1,2,\cdots)$；

1984年，L·de 布朗基 得到 $|a_n|\leqslant n$ $(n=1,2\cdots)$。

运用这种类型的逐次逼近法解决数学难题，其最重要的一点就是如何去扩大问题的范围。这有多种不同的途径，但能选一个与问题实质内容有本质联系且较易入手的途径是需要有高度洞察力的。出色的数学家对于一个困难问题善于明察秋毫、见微知著，能够选择变更问题的最好链条，一步

一步地取得一个又一个成果，最后使问题得到彻底解决。

逐次逼近法是对任何科学研究都适用的一种行之有效的研究方法。在数学中，它不仅能用来解决许多复杂数学计算问题，而且对于丰富和发展数学理论也同样起着重要的作用。在数值计算里，当所遇到的函数不便于计算或处理时（例如有时函数关系没有明显的解析表达式，需要根据实验观测或其它方法来确定与自变量的某些值相应的函数值。有时虽然有表达式，但使用起来很不方便，而从实际需要出发，又允许计算结果有一定的误差），采用逐次逼近法往往可以较方便地解决问题。逐次逼近法是解代数方程、微分方程、积分方程、泛函分析、计算数学、概率统计、运筹学中的一些问题的一个很重要的常用方法。它不仅能给出问题的近似解，而且还能用这一方法证明定理。在解决比较困难的数学问题时，逐次逼近法可以起到化难为易、化繁为简的作用。通过对其有联系问题的解决，不但为解决原问题起到启发、铺路的作用，而且在解决的过程中，由于所经过的路程艰难、探索的途径迂迴，因而往往伴随而产生了一些新的数学理论和方法。

逐步淘汰原理　设$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$是集合$A$的子集，则

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}| = |A| - \sum_{1\leq i\leq n}|A_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j| - \sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|。$$

例　在小于1000的正整数中，既不能被5整除，也不能被7整除的有多少个？

解　A表示小于1000的所有正整数集合，A_k表示A中被整数k整除的所有正整数集合，则$\overline{A_5}\cap\overline{A_7}$是$A$中既不被5整除也不被7整除的所有正整数集合。由逐步淘汰原理有

$$|\overline{A_5}\cap\overline{A_7}| = |A| - |A_5| - |A_7| + |A_5\cap A_7|。$$

而$|A| = 999$，$|A_5| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199$，$|A_7| = \left[\frac{999}{7}\right] = 142$，$|A_5\cap A_7| = \left[\frac{999}{35}\right] = 28$，因此，$|\overline{A_5}\cap\overline{A_7}| = 999 - 199 - 142 + 28 = 666$。

这一原理是组合计数的一个重要工具。这一原理与数学中的筛法有密切联系，它在数论中有着广泛的应用，例如用它可证明数论中的著名欧拉函数。

换元法　又叫中间变量法、变量代换法。是关系映射反演原则的一种具体运用。其具体含义是：在解决某一数学问题甲时，可将其中某一式子如$\varphi(x)$作为新的变量y，通过映射σ：$\varphi(x) = y$进行变量代换，借此得到一个易于求解的新问题乙；在乙解出后，借助于逆映射σ^{-1}：$x = \varphi^{-1}(y)$便可求得甲的解。

例 在实数集内解方程

$$\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{14-x}=4.$$

解 设$\sqrt[3]{14+x}=u$，$\sqrt[3]{14-x}=v$，则原方程成为

$$u+v=4。 \quad ①$$

由于$u^3+v^3=14+x+14-x=28$，于是知道

$$uv=3。 \quad ②$$

由①、②解得$u_1=1$，$u_2=3$。再利用σ^{-1}：$x=u^3-14$，得$x_1=-13$，$x_2=13$。经检验，$x=\pm 13$都是原方程的解。

利用换元法解题有很大的灵活性。根据问题的不同，应选的换元形式往往亦不同。常见的变量替换类型有：线性代换、标准量代换、倒数代换、根式代换、指数代换、对数代换、三角代换、复变量代换、增量代换，等等。

有效地利用换元法解题的关键在于变量代换式的适宜选取。在用此法解题时，不要忘记反演步骤的最后施行。

换元法是初等数学乃至整个数学中非常有用的解题方法，具有广泛的应用性。

紧绳法 有时被称为选点法。在实验的基础上获得直线型经验公式的一种方法。其具体步骤为：（1）把变量之间相对应的实验数据作为点的坐标，在坐标平面上描出这些点。（2）观察这些点的位置，若判断为直线型的，则可用一条拉紧的细线在这些点间移动，选择这样一个位置，使直线靠近较多的点，且使直线两边的点数相等。（3）在这条直线上选择两点。把两点的坐标分别代入直线型公式$y=kx+b$，从而确定出k与b，这样经验公式也就确定了。

例 通过实验，测得某种合金的熔点y(°C)和含铅量x(%)之间关系的数据如下表

x(%)	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
y(°C)	181	197	235	270	283	292

根据这些数据，求关于x、y的经验公式。

解 第一步 描点画图。

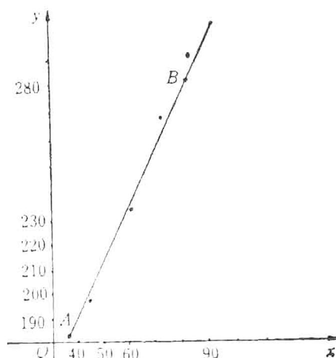
第二步 观察这些点的位置，可以看出它们大致在一条直线上，因此用紧绳法确定出直线。

第三步 在这条直线上选取两点$A(36.9, 181)$、$B(84.0, 283)$代入两点式方程，得

$$\frac{y-283}{283-181}=\frac{x-84}{84-36.9}。$$

经整理，获得经验公式

$$y=2.17x+101.1。$$



剔除法　见淘汰法。

特殊化　数学中的一个普遍思想方法。它是从考虑一般对象集合过渡到考虑包含于其中的一个较小集合的一种带有指导性的思想方法。

例　求证三角形的余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

分析　先考虑问题的特殊情况，即当$A=90°$时的情形：$a^2=b^2+c^2$。这是人们熟知的勾股定理。一般的情形可借此获得解决。

①$A<90°$时，如图1所示，作$CD\perp AB$于D，则

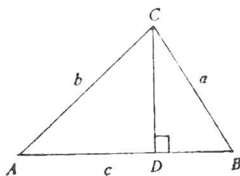


图1

$$\begin{aligned}a^2&=CD^2+DB^2\\&=AC^2-AD^2+(AB-AD)^2\\&=AC^2+AB^2-2AB\cdot AD\\&=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

②$A>90°$时，如图2所示，作$CD\perp BA$于D，则

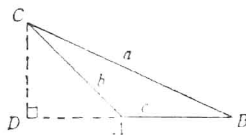


图2

$$\begin{aligned}a^2&=CD^2+DB^2\\&=AC^2-AD^2+(AB+AD)^2\\&=AC^2+AB^2+2AB\cdot AD\\&=b^2+c^2-2bc\cos A。\end{aligned}$$

综上可知，余弦定理普遍成立。

特殊化是对数学问题进行转化的一种常用方法。由于特殊化后的对象和情况之表现形式往往比较简单，因而有些问题从特殊化入手较易获得解决。考虑到特殊启示着一般，且从人类对事物总的认识秩序来说，又总是先特殊而后一般，因此特殊化的方法得到了人们的普遍注意和使用。数学中的标准化以及考虑特例和反例的方法均属特殊化之列。在定值、定点、定向等问题中，这种方法用得较多。这时，人们往往将问题处于某种特殊环境中而把欲求或欲证的定值、定点、定向首先确定下来，然后再在一般情况下对结论予以严格的理论计算或推证。用特殊化的思想方法指导解题，往往是从简单情况和特殊对象两个方面入手，当特殊情形获得解决以后，借助于极限、叠加（组合）等途径便可得到一般问题的解。特殊化的方法既可以帮助人们看清问题，为探索解题途径提供线索和积累经验，以找到解决问题的突破口；又可以帮助人们检验证明。特殊化的方法不仅是解题、检验题的重要方法，而且还是进行创造性思维的有效工具，历来被一些数学大师——如希尔伯特、阿达等——所推崇。

特殊点法　见解数学选择题的方法。

特殊值法　见解数学选择题的方法。

特殊图形法　见解数学选择题的方

法。

特殊化判断法　见解数学选择题的方法。

积分法　指求不定积分和定积分的方法。它包括分部积分法、换元法、递推积分法等。

积分求导法　借助求积分和求导进行映射反演的一种RMI方法。

例　求级数 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$之和，其中$x\neq1$。

解　设 $S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$。对$S(x)$求积分（映射）：

$$\int_0^x S(t)dt$$

$$=\int_0^x(1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1})dt$$

$$=x+x^2+\cdots+x^n$$

$$=\frac{x(x^n-1)}{x-1}。$$

对所得结果求导（反演）：

$$S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'$$

$$=\left(\frac{x(x^n-1)}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{x^n(nx-n-1)+1}{(x-1)^2}。$$

乘一法　组合方法的一种常用技巧。它是指在一个数学式子里，对某一项或若干项，乘上一个数学因子，同时再除上同一数学因子，从而改变原数学问题关系结构形式，以利于问题解决的一种组合方法。

例　证明数列

$$12，1122，111222，\cdots，\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}，\cdots$$

每项都是相邻两整数之积。

证明　$\overbrace{11\cdots1}^{n个}\overbrace{22\cdots2}^{n个}$

$$=11\cdots1\times10^n+2\times11\cdots1$$

$$=11\cdots1(10^n+2)$$

$$=11\cdots1\times3\times\frac{10^n+2}{3}$$

$$=33\cdots3\times\frac{10^n-1+3}{3}$$

$$=\overbrace{33\cdots3}^{n个}\times(\overbrace{33\cdots3}^{n个}+1)。$$

在上面证明的过程中，对于数$11\cdots1(10^n+2)$乘上数3，再除以数3，就等于该数乘上1，从而保证了其值不变。因此这是一个恒等变形。乘3与数$11\cdots1$结合，除3与数(10^n+2)结合，从而得到两个相邻的数$33\cdots3$与$33\cdots3+1$。这就达到了问题所要求的结果。乘一法是数学解题中的一个基本技巧，在数学中有着广泛的应用。有效地运用乘一法的关键在于针对不同的问题，选择1的一种恰当表现形式（如上述的$\frac{3}{3}$）乘到给定的数学式子中去。

借因子法　借助辅助因子进行映射的一种RMI方法。

例　求$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots$

$+\sin\frac{n-1}{n}\pi$ 之值。

解　设 $S=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi$。等式两边同乘以因子 $2\sin\frac{\pi}{2n}$（映射），再对等式右边进行积化和差，得

$$2\sin\frac{\pi}{2n}\cdot S=\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-3}{2n}\pi-\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)。$$

中间项错项相消，剩下两项再进行和差化积，于是得

$$2\sin\frac{\pi}{2n}\cdot S=2\cos\frac{\pi}{2n}。$$

等式两边同除以 $2\sin\frac{\pi}{2n}$（反演），于是得

$$S=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2n}。$$

该题的结构特征是角度成等差的正弦之和的形式，可用借因子法。类似对于角成等差的余弦的和的形式也可应用借因子法。如果在问题中出现其角度成等比数列的余弦之积的形式，也可应用借因子法。例如，化简 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ 只要引入因子 $2^n\sin\frac{x}{2^n}$，连续应用正弦倍角公式，则可迅速求出结果为 $\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$。但对于角度成等比的正弦的积的问题，若不能归结为角度成等比的余弦的积的时候，则不适宜用借因子法。对于两角差为常数的同名三角函数积的倒数的和数化简问题，亦可用借因子法。对于代数问题，如 a_k 成公差为 d 的等差数列，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}},$$

可借助因子 $(\sqrt{a_{k+1}})^2-(\sqrt{a_k})^2$ 得知和为 $\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$。

运用这种方法求和或进行化简的关键在于经过乘以因子使通过变形之后能够使项数逐渐减少，或错项相消，从而达到化简和求和的目的。因此，凡是乘积因子能够达到上述效果的问题都可以采用借因子法。

倒推归纳法　见数学归纳法。

倒数变换法　将一个变量与这个变量的倒数之和设为一个新变量，从而达到解决问题目的的一种变量代换法。

例　解方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$。

解　显然 $x\neq0$，故可将方程两边同除以 x^2，得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$-16=0,$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$，得

$$2y^2+3y-20=0。$$

解此方程得

$$y_1=-4,\ y_2=-\frac{5}{2}。$$

再代入得

$$x=-2\pm\sqrt{3},\ 2,\ \frac{1}{2}。$$

上面的方程结构形式是其系数关于中间项对称，这样的方程叫做倒数方程。这种倒数方程均可用倒数变换法求解。

射线法 测量的一种基本方法。其含义是：当测站能通视各测点并能直接测出该测站到各测点的距离时所使用的测绘方法。其特点是由一个测站向周围各点作方向线，量出测站到各点的距离，并且按预定的比例尺缩绘在图纸上，以确定地面上各点在图纸上的相应位置。

部分元素消元法 见消元法。

部分拼图变换法 见割补法。

高斯消元法 见消元法。

消元法 又称消去法、顺序消元法、秦九韶法、高斯消元法。解线性方程组的主要方法之一。其具体含义是：在解线性方程组时，将某一方程乘以某些常数分别加到其它方程上，以消去这些方程中的某一未知量。重复施行这一过程，就可逐步消去未知量，最后只剩下一个未知量。这剩下的未知量的值求出后，然后经过回代过程而求出所有未知量的值。其具体解题步骤如下：

设线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\qquad ①$$

其中 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，$b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是已知数，$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为未知数。解①分如下两步骤：消去过程；回代过程。

（1）消去过程。不妨设 $a_{11}\neq 0$，将第一个方程分别乘以 $-a_{i1}/a_{11}$ $(i=2, 3, \cdots, n)$ 加到第 i $(i=2, 3, \cdots, n)$ 个方程上，就消去了这些方程中的 x_1，于是方程组化为

$$\begin{cases}a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)},\\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)},\\ \qquad \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \qquad a_{n2}^{(2)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n=b_n^{(2)},\end{cases}\qquad ②$$

为了统一起见，将 $a_{1i}(i=1,2,\cdots,n)$ 和 b_1 分别记为 $a_{1i}^{(1)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_1^{(1)}$。仿照上面的写法，对②的后 $n-1$ 个方程消去 x_2（设 $a_{22}^{(2)}\neq 0$），这样继续做下去，若 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，最后得到

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)}, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}。\end{cases} \quad ③$$

上述过程可表示为：对于 $k=1,2,\cdots,n-1$，

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(n)}}\cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$(i,\ j=k+1,\cdots,n),$$

$$b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\cdot b_k^{(k)}$$

$$(i=k+1,k+2,\cdots,n),$$

其中 $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}$，$b_i^{(1)}=b_i$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$。

（2）回代过程。由③求出 x_n 之值，经过回代过程，求出①的解为

$$x_n=\frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}^{(n-1)}-a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}},$$

………

$$x_1=\frac{b_1^{(1)}-a_{12}^{(1)}x_2-\cdots-a_{1n}^{(1)}x_n}{a_{11}^{(1)}}。$$

例如 求下面方程组的解

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, & ① \\ 2x_1 \qquad +x_3=2, & ② \\ x_1+2x_2+4x_3=5, & ③ \end{cases}$$

解 $①\times\left(-\frac{2}{3}\right)+②$，$①\times\left(-\frac{1}{3}\right)+③$ 可得

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, & ④ \\ -\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=\frac{4}{3}, & ⑤ \\ -\frac{5}{3}x_2+\frac{10}{3}x_3=\frac{14}{3}, & ⑥ \end{cases}$$

⑤×$\frac{5}{2}$+⑥ 得

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ -2x_2-x_3=4, \\ \frac{15}{6}x_3=8。\end{cases}$$

故可得 $x_1=-\frac{3}{5}$，$x_2=-\frac{18}{5}$，$x_3=\frac{16}{5}$。

注意在用消去法的过程中，有时会碰到 $a_{kk}^{(k)}=0$ 的情形，这时若方程组有唯一解，则在 $a_{k+1,k}^{(k)}$，$a_{k+2,k}^{(k)}$，……，$a_{n,k}^{(k)}$ 中至少有一个不为零，不妨设$a_{j,k}^{(k)}$不为零，那么只要将这时的第k个方程与第j个方程互换，即可继续进行消元。在用计算机求解方程组时，为了得到更精确的解，通常采用如下两种消元法：列元素消元法；全主元素消元法。列元素消元法亦称部分元素消元法，即将$|a_{k+1,k}^{(k)}|$，$|a_{k+2,k}^{(k)}|$，…，$|a_{n,k}^{(k)}|$中最大者所在的方程与第k个方程进行交换。所谓全主元素消元法，是在后$n-k+1$个方程的所有系数中找出绝对值最大的，而后进行方程和未知量的交换。但全主元素消元法工作量较大，一般采用列元素消元法。

早在东汉以前，我国《九章算术》中就用了消元法解方程组。

消去法 见消元法。

容斥原理 是组合计数的一个重要工具，用来将A分成子集A_1，A_2，…，A_n的并集，但A_1，A_2，…，A_n不一定两两不相交，通过A_1，A_2，…，A_n来求$|A|$。其具体含义是：设A_1，A_2，…，A_n是集合A的子集，$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，则$|A|=\sum_{1\leq i\leq n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|$。特别当$A_1$，$A_2$，…，$A_n$两两不相交时，容斥原理就退化为加法原理。

例 从1至1000000的正整数中，至少能被3，5，7中一个整数整除的有多少个？

解 用A表示符合题目要求的所有正整数集合，A_k表示A中被整数k整除的所有整数集合。则$A=A_3\cup A_5\cup A_7$。由容斥原理有$|A|=|A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_7|-|A_5\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|$。

易算得：$|A_3|=\left[\frac{10^6}{3}\right]=333333$，$|A_5|=\left[\frac{10^6}{5}\right]=200000$，$|A_7|=\left[\frac{10^6}{7}\right]=142857$，$|A_3\cap A_5|=$

$\left[\frac{10^6}{15}\right]=66666$，　$|A_3\cap A_7|=$

$\left[\frac{10^6}{21}\right]=47619$，　$|A_5\cap A_7|=$

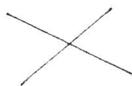
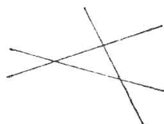
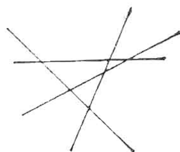
$\left[\frac{10^6}{35}\right]=28571$，$|A_3\cap A_5\cap A_7|=$

$\left[\frac{10^6}{105}\right]=9523$。于是，$|A|=333333+200000+142857-66666-47619-28571+9523=542857$。

递推法　在一个与自然数有关的问题里，通过寻找递推关系，由某初始值递推获得所需结果的方法，叫做递推法。这是一种不完全归纳推理方法。

例　平面上 n 条直线，其中没有两条互相平行，也没有三条或三条以上经过同一点，问平面被这 n 条直线分为多少个区域？

解　用p_n表示平面被所给 n 条直线划分的份数。如图所示，$p_1=2$，$p_2=4$，$p_3=7$，$p_4=11$。

这些数字之间的规律不太明显，因此一下子很难猜出p_n的一般表达式。但是，可从相继两个图图的联系上寻找规律。考察 p_2与p_1、p_3与p_2、p_4与p_3有 $p_2=p_1+2$、$p_3=p_2+3$、$p_4=p_3+4$。一般地，在计算 p_n 时，从已有的 $n-1$ 条直线按题设要求，再添加一条直线 l，l 必与这 $n-1$ 条直线相交，且其交点为 $n-1$ 个，这 $n-1$ 个交点把 l 划为n个区间，各个区间分别把原图中的p_{n-1}区域一分为二，所以应有

$$p_n=p_{n-1}+n\quad(n=2,3,\cdots)。\qquad ①$$

这样，就找到了一个从p_{n-1}计算p_n的递推公式。由$p_1=2$，就可以计算任何一个p_n了。

由①和初始值$p_1=2$，可求出p_n的直接表达式，过程如下：

$$\begin{array}{rl} & p_2=p_1+2 \\ & p_3=p_2+3 \\ & \vdots \\ + & p_n=p_{n-1}+n \\ \hline & p_n=p_1+2+3+\cdots+n \end{array}$$

所以　$p_n=\frac{n(n+1)}{2}+1$。　　②

②式可用数学归纳法证明。

递推法是人们通过有限认识无限的重要思路，一般适用于与自然数有关的命题。应用递推法解题关键在于找出递推公式。有了递推公式和初始值，就能通过递推达到解题的目的。由于递推关系又往往是通过经验归纳法而推得的，因此，递推关系的正确性尚需要进行严格的证明。

递归方法 数理逻辑方法的一种。它是运用递归函数解决问题的方法。

诺模图 见算图。

调和平均 对一组数取平均的一种方法。其具体步骤是：设有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n。取这n个数各自的倒数的算术平均的倒数，记其为

$$\overline{x_n} = \left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}.$$

调和平均在计算并联电路的总电阻、透镜和平镜公式、混合问题、作功问题、速度问题、音乐中音符、矩形面积与半周长之比、线性函数与它的反函数的交点等中都有用。

展开法 一种降维法。其具体含义是：把立体几何问题设法使其图形展开在平面上，从而转化为平面几何问题。

例 如果 A，B，C，D 表示空间中的四个点，AB表示 A 和 B两点之间的距离，等等。证明

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2 \geqslant AB^2+CD^2。(*)$$

证明 A、B、C决定一平面α，A、B、D决定一平面β，以A、B 联线为轴，旋转平面β，使之与 α 合成一个全平面。设D旋转后的位置为D'，如图 1 所示。易知 $AD'=AD$，$BD'=BD$，$CD'>CD$。因此若对平面上的四边形$ACBD'$能证明

$$AC^2+BD'^2+AD'^2+BC^2 \geqslant AB^2+CD'^2 \quad (*,*)$$

成立，则（*）必能成立。

现证不等式(*,*)。令O为AB与CD'之交点，如图 2 所示。设$\angle AOC=\theta$，$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，$OD'=d$，则有：

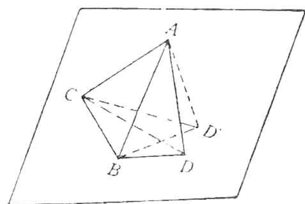


图 1

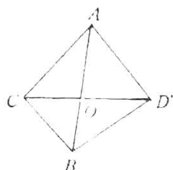


图 2

$$AC^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta,$$
$$BD'^2=b^2+d^2-2bd\cos\theta,$$
$$AD'^2=a^2+d^2+2ad\cos\theta,$$
$$BC^2=b^2+c^2+2bc\cos\theta,$$

故

$$\begin{aligned}&AC^2+BD'^2+AD'^2+BC^2\\&=(a+b)^2+(c+d)^2\\&\quad+(a-b)^2+(c-d)^2\\&\quad-2(a-b)\cdot(c-d)\cdot\cos\theta\\&\geqslant AB^2+CD^2。\end{aligned}$$

利用这种方法可求长方体、棱柱、棱锥以及圆柱、圆锥等可展曲面上两点间的最短路线，可解决立体图形中某些不等量关系以及等量关系所确定的性质。

弱抽象 亦称为概念的扩张式抽象。它是指从原型中选取某一特征，并减弱对这一特征的限制加以抽象，从而

获得比原结构更广泛的结构的过程。原型是其弱抽象物的特例。弱抽象是通过缩小原概念的内涵，来建立新概念的数学抽象方法。例如，全等形具有面积相等，形状相似的性质，如果从这一概念出发，减弱对“面积相等”的限制，保留“形状相似”的属性，利用弱抽象法，就可以获得相似形的概念。这时全等形成为相似形的特例。如果放宽对“形状相似”的限制，保留“面积相等”的属性，利用弱抽象法，就可以获得等积形的概念。这时全等形又是等积形的特例。再如，欧氏几何具有“合同性与距离不变”的性质，若放宽其限制，保留“相似性与线段之比不变”的性质，就获得了抛物几何。同样，减弱对“相似性与线段之比不变”的限制，保留“平行性与单比不变”，就获得了仿射几何。进而，再减弱对“平行性与单比不变”的限制，保留其“结合性与交比不变”，就获得了射影几何。上述概念外延的逻辑包含关系为：欧氏几何⊂抛物几何⊂仿射几何⊂射影几何。抛物几何、仿射几何、射影几何可看作分别在欧氏几何、抛物几何、仿射几何的基础上借助弱抽象得来的。

一般说来，最先被人们认识的一些较具体、较直观的事物对象如果其内容结构非常丰富，这时可采用弱抽象的方法，引入新概念。

理想化抽象　建立数学概念的最基本的一种数学抽象方法。其具体含义为：在纯粹理想化的形态下，对客观事物或现象进行简单化、完善化的加工处理，撇开事物的某些具体内容，排除其次要的、偶然的因素，抓住一般的、本质的属性，抽象出相应的数学概念。例如，几何中的点、线、面等基本概念的引进，就是进行理想化抽象的结果。当然，通过理想化抽象得到的数学概念未必与现实原型相符。譬如，在现实世界中，根本找不到没有大小的点、没有厚度和宽度的线、没有厚度的面，但这些点、线、面的数学概念更加深刻、正确、完全地反映着客观事物，因为它们抓住了事物的本质。因此它不是远离开事物，而是更加接近于事物。由此看来，理想化抽象是主观的抽象形式与客观的具体内容辩证的统一。这种方法不仅对于引进数学概念是十分重要的，而且对于建立数学模型也是必不可缺少的。欧拉把哥尼斯堡七桥问题转化为一笔画问题的数学模型就是利用了理想化抽象的方法，

理想化抽象的结果，在数学中表现出各种不同的结构形式，既有图形，又有解析表达式；既有具体的数字，又有一般的抽象符号系统。有些实际问题，表面看来不象是数学问题，但对问题赋予“数字”或“图形”以后，就可以用数学方法求解。这种赋予“数字”和“图形”的理想化抽象，称为“数字化”和“图形化”。“数字化”和“图形化”是理想化抽象的两种常用技巧，在解答实际问题时有着重要的作用。下面来看两个例子。

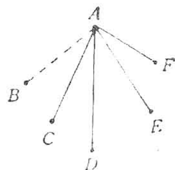
例1　有9枚硬币，有字的一面全朝上。其中6枚翻转过来（字面朝上的变为朝下，或字面朝下的变为朝上）称为一次“运动”。试问，是否

能经过有限次运动，使得硬币的字面全部朝下？

采用理想化抽象的方法，把问题"数字化"，对硬币字面朝上或朝下赋予数学意义。不妨把字面朝上记为$+1$，字面朝下记为-1。每次运动将其中6个数改变符号，这相当于将其中6个数各乘以-1。这里的$+1$或-1，显然满足普通算术中乘方的运算规则：$(+1)^n=+1$，$(-1)^{2n}=+1$，$(-1)^{2n+1}=-1$ （$n\in N=\{1,2,\cdots\}$）。经过这样的处理，上述的问题就相当于：能否经过有限次运动将9个$+1$变为9个-1？由于开始时字面全朝上，因而对应数皆为$+1$，其积为$+1$。每作一次运动，相当于将6个数各"乘以"-1。注意到$(-1)^6=+1$，所以不论经过多少次运动，9个数的乘积保持不变，仍然为$+1$。另一方面，字面全朝下相当于9个数全为-1，其积为-1。这就表明，经过有限次运动，9个$+1$决不会变为9个-1。因此，经过有限次运动，不能使9枚硬币的字面全部朝下。

例2 任何6个人聚会，其中总有三个人彼此相识或不相识。

采用理想化方法，把问题"图形化"。用平面上6个点A、B、C、D、E、F表示6个人，且无三点共线。用两点间的实连线表示某两个人相识，用两点间的虚连线表示某两个人不相识。经过这样的处理以后，上述问题就相当于证明存在一个"实"三角形或"虚"三角形。不妨取点A来考虑，如果点A与其他各点连结的都是实线段或者都是虚线段，易知原命题是正确的。这样，点A与其他各点连线的情况还剩以下四种：①一虚四实（一条虚线、四条实线）；②二虚二实；③三虚二实；④四虚一实。其中①与④、②与③分别对偶，故只证①、②即可。出现①的情况，如图1所示，这时C与D、D与E、E与F之间只能连虚线（否则，存在一实三角形，问题已得证）。但当D与E、E与F连虚线后，则D与F间不论连实线或虚线，都必出现一个实三角形或虚三角形，因此在这种情况下原命题成立。②的情况同理可证。这样，应用平面图形就证明了命题的正确性。



在利用理想化抽象解决实际问题时，要注意掌握好简单化与完善化的分寸，既不能把问题抽象得过于简单，以致使之与客观实际不相符，又不能使得抽象后的问题过于复杂，以致于失去了典型性的意义。为了提高这方面的能力，可多做些应用题。

黄金分割法 见0.618法.

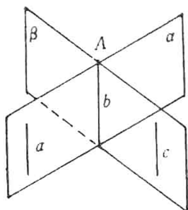
描点法 作函数图象的一种方法。其步骤为：（1）把自变量和函数的一系列对应值列成表。（2）把这些对应值作为坐标，在坐标平面内描写出相应的点。（3）按自变量取值由小到大的顺序，把这些点连成平滑的曲

线。

排他法　见淘汰法。

辅助面　借助于添加辅助面以达到解决问题目的的一种构造图形法。其具体含义是：在立体几何中，为了沟通已知和未知的联系，除了添加辅助线、辅助角外，还需要考虑添加辅助面，以达到问题的解决。

例　已知直线$a /\!/ c$，$b /\!/ c$，求证$a /\!/ b$。

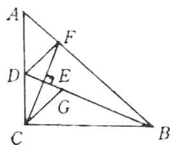


证明　如果a，b，c三条直线在同一平面内，则平面几何中已证。如果a，b，c三条直线不在同一个平面内，则在直线b上任取一点A，过直线a与点A作平面α，过直线c与点A作平面β。通过这两个辅助面进而就可以推证结论的正确性。

辅助角　借助于添加辅助角以达到解决问题目的的一种构造图形法。

例1　已知BD为等腰Rt△ABC的腰AC上的中线，$CE\perp BD$，且分别交BD、AB于E、F，连结DF。求证$\angle ADF=\angle CDB$。

分析　如图所示。欲证$\angle ADF=\angle CDB$，可以考虑用两个三角形相等或相似来证明。但从图形上观察，含这两个角的两个三角形，既不相等又不相似，为此需要添加辅助线，使之构成全等三角形。这就要找以AD、DC为对应边，以$\angle ADF$、$\angle CDB$为对应角的全等三角形。考虑到$\angle BAC=45°$，故需作辅助角$\angle DCG=\angle BAC=45°$，辅助角作出之后，那么问题也就解决了。

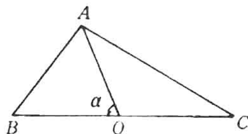


要利用好辅助角法必须充分挖掘题设隐含条件，巧设未知辅助角，以利用三角形知识达到解决几何问题的目的。

例2　在△ABC中，AO是BC边上的中线。求证

$$AB^2+AC^2=2(OA^2+OC)^2。$$

证明　如图所示。设$\angle AOB=\alpha$，则$\angle AOC=180°-\alpha$，分别在△AOB和△AOC中应用余弦定理，得出两式，然后相加并注意到$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$，就可推出所须证明的结论。



上面题中$\angle AOB$和$\angle AOC$拚成一平角，则此两角互补，故设其中一个角为α，另一个角为$180°-\alpha$，利用两个互补角的三角函数值关系，会出现同角的同名三角函数，这样消去后，便得到所需要的结论。我们知道平行四边形的两邻角互补，圆内接四

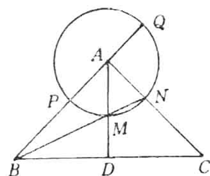
边形对角互补，诸如此类的问题都可以借助设辅助角方法达到解决问题的目的。另外还可以借助利用互余两角的三角函数关系、同角三角函数关系去设辅助角，以解决几何中的问题。这种解题方法在平面几何、立体几何及解析几何中都有它的应用。这种方法的实质是形数变换法，它把形的问题转化为数的问题，通过三角知识以求得问题的解决。

辅助圆 借助于添加辅助圆以达到问题解决的一种构造图形法。其具体含义是：有许多平面几何问题，虽然表面上与圆关系不大，但把已知条件和欲求结论联系起来进行认真的分析、思考即可发现，如果能设法找出图中已知的和隐含的共圆点，添加辅助圆，利用圆的性质，就能巧妙地找到解题途径。添加辅助圆，常用到四点共圆的性质。判定图中四点是否共圆，常用的判定方法有如下几种：①与一个定点等距离的四点共圆；②对角互补的四边形的顶点共圆；③有一个外角等于其内对角的四边形的顶点共圆；④同底、同侧顶角相等的两个三角形的顶点共圆；⑤有公共斜边的直角三角形的顶点共圆；⑥若两条线段被一点内分（或外分）成两条线段的乘积相等，则这两条线段的四个端点共圆。

例 已知Rt△ABC，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，BN为$\angle ABC$的平分线。求证

$$BN\cdot BM=AB^2-AN^2。$$

证明 由题设条件可推知$\angle AMN=\angle ANM$，故有$AM=AN$。以A为圆心、AM为半径作辅



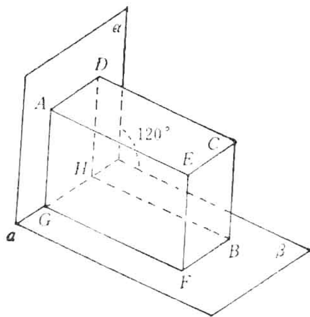
助圆交AB于P、交BA的延长线于Q，于是有$BP\cdot BQ=BM\cdot BN$，即$BN\cdot BM=(AB-AN)\cdot(AB+AN)=AB^2-AN^2$。

利用添加辅助圆可解决几何中有关角度和线段相等、直线平行与垂直、比例式与乘积式的一些证明题，还可解决一些有关几何中的计算题、极值问题。由于辅助圆的添加技巧性强，因此有益于发展智力，培养创造性的能力。

辅助体法 借助于添加辅助体解题的一种构造图形法。

例 在120°的二面角$\alpha—a—\beta$的两个面α和β内分别有点A和点B，已知点A和点B到棱a的距离分别是2和4，且线段$AB=10$，求直线AB和棱a所成的角。

解 作一个辅助平行六面体。过点A作一平面垂直于棱a，作另一个



平面平行于平面β；过B作一个平面垂直于棱a，作另一平面平行于平面α，使得平行六面体$AECD-GFBH$中$BH=4$，$AG=DH=2$，$\angle DHB=120°$。于是根据余弦定理有

$$BD=\sqrt{2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos120°}=2\sqrt{7}。$$

因为a垂直于平面$BCDH$，且$AD\parallel a$，所以AD垂直于平面$BCDH$。由此有$AD\perp BD$，故有

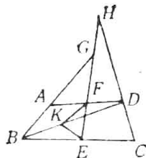
$$\sin\angle BAD=\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{5}。$$

因此直线AB和棱a所成的角为

$$\arcsin\frac{\sqrt{7}}{5}。$$

辅助线法　借助添加辅助线进行解题的一种构造图形法。这是几何证明中的基本方法之一。添加辅助线的途径和常用方法为：①从命题条件出发；②从命题结论得到启示；③利用几何变换法，如平移、旋转、对称等。

例　如图所示。已知线段$AB=CD$，连结BC、AD，分别取其中点E、F，连结E、F，EF的延长线与BA、CD的延长线分别相交于G、H，求证　$\angle AGF=\angle DHF$。



证明　作辅助线BD，取BD的中点K；作辅助线KF、KE，则$KF\parallel AB$，$KE\parallel DC$，故$\angle KFE$可视作由$\angle AGF$平移而得，$\angle KEF$由$\angle DHF$旋转而得。因此问题归结为只要证明$KF=KE$即可。这由三角形中位线定理，联系到$AB=DC$即可获证。

辅助方程法　借助于添加方程达到解决问题目的的一种构造法。

例　解方程

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9。\quad ①$$

解　作辅助方程

$$(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=45。\quad ②$$

②÷①得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5。\quad ③$$

①+③得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7。$$

解此方程得原方程的根为$x=3$或$x=-\frac{5}{3}$。

辅助函数法　借助于添加辅助函数达到解决问题目的的一种构造法。

例　已知a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7均为正数，求证

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}+\frac{a_3+a_4+a_5+a_6}{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}>\frac{a_1+a_2+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6+a_7}。$$

证明　作辅助函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$。

因为$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}<0$，所以$f(x)$在$[0，+\infty)$上是严格单调下

降的。又

$$\frac{a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3+a_4}<\frac{a_4+a_5+a_6+a_7}{a_1+a_2},$$ 故有

$$\frac{1}{1+\frac{a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3+a_4}}>\frac{1}{1+\frac{a_4+a_5+a_6+a_7}{a_1+a_2}},$$ 即

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}>\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6+a_7}。 \quad ①$$

又 $$\frac{a_2+a_7}{a_3+a_4+a_5+a_6}<\frac{a_1+a_2+a_4+a_7}{a_5+a_6},$$

故有

$$\frac{1}{1+\frac{a_2+a_7}{a_3+a_4+a_5+a_6}}>\frac{1}{1+\frac{a_1+a_2+a_4+a_7}{a_5+a_6}},$$

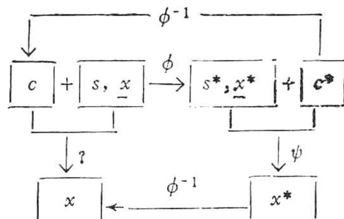
即

$$\frac{a_3+a_4+a_5+a_6}{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}>\frac{a_5+a_6}{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6+a_7}。 \quad ②$$

①+②，即得所证。

辅助函数法在解方程、证明不等式和等式问题、求值及数列求和等方面有着广泛的应用。

辅助命题法 一种构造命题的方法。其具体含义是：为了协助映象关系结构定映，可以外加在映象结构系统上一个命题，这个命题称之为辅助命题；这个辅助命题反演回去就是原象关系结构系统的一个外加条件。用这种方法解决问题的过程可用如下框图表示



例 设 $m, n\in N$，且 $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$，求证

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{m\cdot n}。$$

分析 由于在原象关系结构系统（s，$\underline{x}$）中直接确定原象目标 $\underline{x}$ 很困难，因此采取等价变换的办法进行映射，即

$$\sqrt{7}>\frac{m}{n}\to 7n^2>m^2,$$

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{m\cdot n}\to 7n^2>m^2+2+\frac{1}{m^2}。$$

于是得到映象关系结构系统（s^*，$\underline{x}^*$）：“已知 $m, n\in N$，$7n^2>m^2$，求证 $7n^2>m^2+2+\frac{1}{m^2}$。在（s^*，$\underline{x}^*$）中仍然很难确定映象目标 $\underline{x}^*$。为此引一辅助命题 c^*：“若 m，

$n\in N$，试证明：$7n^2\neq m^2+1$ 且 $7n^2\neq m^2+2$。”该命题是基于下面的想法而构造出来的。因为 m，$n\in N$，故必有 $7n^2$，$m^2\in N$，所以由 $7n^2>m^2$，得 $7n^2\geqslant m^2+1$。若能证明 $7n^2\neq m^2+1$，则必有 $7n^2\geqslant m^2+2$，又若能证明 $7n^2\neq m^2+2$，则必有 $7n^2\geqslant m^2+3>m^2+2+\frac{1}{m^2}$，于是命题获证。但命题获证是建立在 $7n^2\neq m^2+1$ 及 $7n^2\neq m^2+2$ 的基础上的。所以必须预先证明 c^*。如果 c^* 获证，在 c^* 的协助下，$(s^*,\underline{x}^*)$ 才能定映。同时，c^* 的原象 c 也必是 $(s,\underline{x})$ 中原象目标成立的基础。下面就来证明 c^*。欲证 $7n^2\neq m^2+1$，$7n^2\neq m^2+2$，只要能证明 m^2+1 和 m^2+2 不是 7 的整数倍即可。事实上，任何自然数 m 都可表为 $7k$，$7k\pm1$，$7k\pm2$，$7k\pm3$ 七种形式之一。若 $m=7k$，则 $m^2=(7k)^2=7\cdot7\cdot k^2\overset{令}{=\!=}7M_1$，于是 $m^2+1=7M_1+1$，$m^2+2=7M_1+2$ 都不是 7 的整数倍。若 $m=7k\pm1$，则 $m^2=(7k\pm1)^2=7(7k^2\pm2k)+1\overset{令}{=\!=}7M_2+1$，于是 $m^2+1=7M_2+2$，$m^2+2=7M_2+3$，同样也不是 7 的整数倍。同理可以证明当 $m=7k\pm2$ 或 $m=7k\pm3$ 时，m^2+1 与 m^2+2 也都不是 7 的倍数。

常量与变量转化法　一种辩证的转化方法。在有些问题里，可以把其中的常量视作变量或者把其中的变量看成常量，以此为出发点，从而达到解决问题目的的一种转化方法。

例　解方程

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0。$$

分析　这是关于 x 的四次方程，其中 a 为常数。为了解此方程可以把 a 视作变量，而把 x 看作常量，从这一观点出发，问题就转化为关于 a 的二次方程

$$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0。$$

解此二次方程，得

$$a=x^2-6x，或 a=x^2-4x-2。$$

至此，再变换看问题的角度，把 a 看作常量，x 看作变量，解关于 x 的二次方程，得

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}，$$

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}。$$

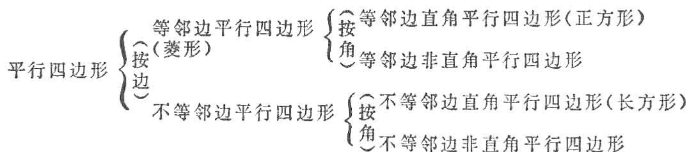
通过上述两次转换看问题的角度，从而得到问题的解。

逻辑方法　亦称形式逻辑方法。它是根据事实材料，遵循逻辑规律、规则来形成概念、作出判断和进行推理的思维方法，包括比较、分析、综合、抽象、概括、定义、划分、演绎、归纳等。运用逻辑方法对已有的判断和概念加以整理，就能获得新的、深刻而全面的知识。

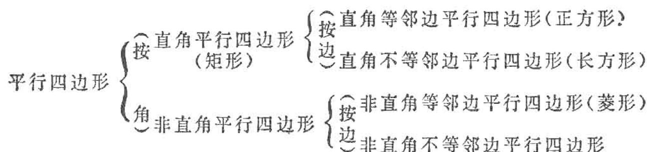
逻辑分类方法　见逻辑划分方法。

逻辑划分方法　亦称逻辑分类方法。是揭示概念外延的逻辑方法，也就是把属概念划分为各个种概念来明确概念的逻辑方法。例如，三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形三类。把三角形属概念划分为三个种

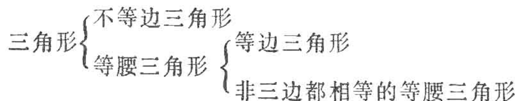
概念。任何划分都由三个要素组成：划分的母项（即被划分的属概念），划分的子项（即划分后所得的种概念），划分的根据（即划分所依据的事物的某一属性）。上例中，划分的母项是三角形，子项为"锐角三角形"、"直角三角形"、"钝角三角形"，划分的依据为三角形最大内角的大小。如果根据边的大小关系，可把三角形划分为"不等边三角形"、"等腰三角形"。划分分为一次划分和多次划分。被划分的对象只划分一次，称为一次划分。如果一次划分满足不了需要，可把划分的子项作为母项，再进行划分，直到满足需要为止，这种划分称为多次划分。如果依据划分的根据来分又可把划分分为二分法和非二分法。二分法是按概念的对象有无某一属性来进行划分，也就是把属概念一贯地分为两个互相矛盾的种概念，一直分到满足为止。例如，平行四边形可用二分法划分如下：



或者



有些概念的划分情况比较复杂，这时宜采用非二分法。不是二分法的划分叫做非二分法划分。划分的基本原则是不重不漏，具体说来，应遵循如下三条原则：①母项划分后各子项应当互不相容。例如，将三角形划分为不等边三角形、等腰三角形、等边三角形，犯了子项相容的错误，因为等腰三角形是等边三角形的属概念，这两个概念是从属的概念。正确的划分为



②母项的外延等于划分后各子项外延的总和。例如，自然数分为素数和合数两类，这犯了子项的外延的总和不等于母项的外延，因为自然数还包括1。1既不是素数，也不是合数。因此，划分后的子项外延的总和小于母项的外延。正确的划分应当是自然数分为1、素数和合数三类。③每次划

分应用同一划分标准。例如，把三角形分为不等边三角形、等腰三角形、锐角三角形、直角三角形和钝角三角形五类，就不符合这一规则，因为在这里同时使用了两个划分标准，一个是三边长短的比较，一个是三角形最大内角的大小。这样的划分是混乱的，不能达到准确地揭示外延的目的。因为等腰三角形可以是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形中任何一个；而钝角三角形既可以是等腰三角形，也可以不是等腰三角形。一般地来说，在母项的属性里取出一个作为划分的标准，就能达到准确地揭示外延的目的。如果用集合的观点来看，所谓划分，就是按照某种属性S，将母项的外延集合A分成若干个满足下列条件的非空子集A_1，A_2，…，A_n：

①$A_i \subset A$，$i=1,2,\cdots,n$；

②$A_i \cap A_j = \phi$，$i \neq j$，i、$j=1,2,\cdots,n$；

③$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$。

显然，这样划分得到的子项A_1，A_2，…，A_n必然满足划分的三条原则。

移植法 灵感思维的一种方法。它是将一个学科领域中已经发现的理论、方法，引入到另一个学科领域中去，为解决该学科领域的问题提供启示和帮助的方法。其客观依据在于事物间存在着相似性。它的基本工具是类比推理。例如，笛卡尔将数与形进行联系类比，借助坐标系，将代数方法引入到几何中来，从而发现了新的数学方法，创建了新的学科——解析几何学；在数学中，把分析的方法移植到数论中，产生了解析数论；把微积分的方法移植到几何中，产生了微分几何。当代由于移植法在数学领域中的广泛应用，大大加强了数学综合化发展的趋势。移植法不仅有助于数学新分支的创立、数学的发展，甚至在整个科学领域中，它都是一个重要的方法。

第一换元积分法 也叫凑微分法。是求不定积分的一种方法。其关键是将被积式$f(x)dx$凑成微分$g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$的形式，然后进行变量替换，令$u=\varphi(x)$，再积分，即

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

$=\int g(u)du=F(u)+c$，最后将$u=\varphi(x)$代入$F(u)$得所求的不定积分。

例如，$\int \mathrm{ctg}x dx=\int \frac{1}{\sin x}\cos x dx$

$=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\sin x|+c$。

第一数学归纳法 见数学归纳法。

第二换元积分法 积分法的一种。其具体含义是：在所给不定积分$\int f(x)\cdot dx$中，令$x=\varphi(t)$，则$dx=\varphi'(t)\cdot dt$，代入，再对t积分，即$\int f(x)\cdot dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+c$，然后以$x=\varphi(t)$的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$

代入$F(t)$即得所求的不定积分。例如，为计算$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$，令$x=t^2$（$t>0$），则$dx=2t\,dt$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{1}{1+t}2tdt$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t-2\ln|1+t|+c=2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+c。$$

第二数学归纳法　见数学归纳法。

假言推理　间接演绎推理的一种形式。它是根据假言判断的逻辑性质进行推演的推理，其前提至少有一个是假言判断。

假言判断的逻辑性质，是指假言判断$p\to q$与它的前件p、后件q之间的真假值关系。用“1”表示真，用“0”表示假，这种真假值关系由下面真值表给出：

p	q	$p\to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

从上面的真值表可以看出：当$p\to q$和p真时，q必真；当$p\to q$和$\overline{q}$真时，$\overline{p}$必真。据此，可得到假言推理两种基本推理形式：肯定式和否定式。

从肯定假言判断$p\to q$的前件p，从而肯定它的后件q的推理叫做肯定式假言推理，其推理规则为

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{p\qquad\quad} \\ q \end{array}$$

例 1　若α和β是同位角，则$\alpha=\beta$。

$$\frac{\alpha\text{和}\beta\text{是同位角}}{\alpha=\beta}$$

从否定假言判断$p\to q$的后件q，从而否定它的前件p的推理叫做否定式假言推理，其推理规则为

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{\overline{q}\qquad\quad} \\ \overline{p} \end{array}$$

例 2　若α和β是同位角，则$\alpha=\beta$。

$$\frac{\alpha\neq\beta}{\alpha\text{和}\beta\text{不是同位角}}$$

在上述推理规则的后面一个推理规则中，如果大前提$p\to q$用它的等价命题$\overline{q}\to\overline{p}$来代替，就有

$$\begin{array}{l} \overline{q}\to\overline{p} \\ \underline{\overline{q}\qquad\quad} \\ \overline{p} \end{array}$$

这样就把后面的推理规则转化为前面的肯定形式的推理规则。

假设调整法　一种分解方法。其含义是：对于求解的问题，可先给出满足题目部分条件的解，然后对解进行调整，直到满足问题全部条件为止。

例　今有甲种糖果每斤价4元，乙种糖果每斤价2元，将甲乙两种糖

果混合50斤出售，每斤价3元，问需要甲、乙两种糖果各多少？

解　设需甲种糖果x斤，乙种糖果y斤，则有

$$\begin{cases} x+y=50, & ① \\ 4x+2y=3\times 50。 & ② \end{cases}$$

先给出满足①的一组解$x=10$，$y=40$，但$4\times 10+2\times 40=120$。不满足②。由②知甲种糖果少了，这时可用1斤甲种糖果换2斤乙种糖果。由于差$150-120=30$，于是换

$(150-120)\div(4-2)=15$

次，就可满足条件②。这样最后得解$x=10+15=25$，$y=40-15=25$，就满足题目所要求的所有条件。

这种先给定满足问题部分条件的解，然后再经过一定的程序进行调整，最后达到满足问题全部条件的解的解题方法在数学中有着广泛的应用，特别是在高等数学中是一个具有普遍指导意义的思想方法。

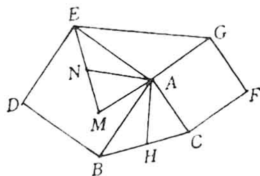
鸽舍原则(原理)　见抽屉原则。

旋转法　利用旋转变换作为映射解决数学问题的一种RMI方法。将平面图形F绕这平面内一个定点M旋转一个定角α得到图形F'，这样的合同变换称为旋转变换。M叫做旋转中心，α叫做旋转角。特别，当旋转角$\alpha=180°$时的旋转变换叫做中心对称变换，这时的旋转中心M叫做对称中心。

例　以$\triangle ABC$的边AB、AC分别向外作正方形$ABDE$和$ACFG$，AH为$\triangle ABC$中线，求证

$EG=2AH$。

分析　如图所示。注意到$AE=AB$，将$\triangle ABC$绕着顶点A旋转$90°$到$\triangle AEM$的位置，AH变为AN，易知M、A、G在同一直线上，且$AM=AG$。又因为$EN=NM$，故AN为$\triangle MGE$的中位线，所以$NA=\frac{1}{2}EG$，即有$EG=2AH$。



对于图形具有等边特征的几何题，如等腰三角形、正方形等，一般都可考虑用旋转变换变更元素的位置。当问题涉及到有一圆及一定长线段时，可试将该线段绕圆心旋转到方便的位置上。当问题涉及到某线段的中点或以O点为对称中心的中心对称图形，可试做关于O点的中心对称变换。施行旋转变换时要注意确定旋转中心，旋转角的大小及旋转方向。在解析几何中应用旋转变换可用来讨论曲线的性质，化简曲线方程。

凑微分法　见第一换元积分法。

减元与增元　数学中常用的思维方法。减元是指将多变元的问题转化为少元问题的一种化归方法。

例

设$\dfrac{\cos^3\theta}{\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\sin^3\theta}{\sin(\alpha-3\theta)}=a$，

求证：$1+a\cos\alpha=3a^2$。

分析　上题条件中含有三个变元θ、α、a，而结论里只有两个变元a、

a，如能设法消去条件中的变元θ，可望达到证题的目的。

解 $$a=\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{\sin\theta\cos(\alpha-3\theta)}=\frac{\cos\theta\sin^3\theta}{\cos\theta\sin(\alpha-3\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos^3\theta+\cos\theta\sin^3\theta}{\sin\theta\cos(\alpha-3\theta)+\cos\theta\sin(\alpha-3\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin(\alpha-2\theta)}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}2\theta}{2(\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}2\theta)},$$

所以 $$\mathrm{tg}2\theta=\frac{2a\sin\alpha}{1+2a\cos\alpha}。\quad①$$

又 $$a=\frac{\cos^4\theta}{\cos\theta\cos(\alpha-3\theta)}=\frac{\sin^4\theta}{\sin\theta\sin(\alpha-3\theta)}$$

$$=\frac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{\cos\theta\cos(\alpha-3\theta)-\sin\theta\sin(\alpha-3\theta)}$$

$$=\frac{\cos^2-\sin^2\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}=\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{tg}2\theta},$$

所以 $$\mathrm{tg}2\theta=\frac{1-a\cos\alpha}{a\sin\alpha}。\quad②$$

由①、②得

$$\frac{2a\sin\alpha}{1+2a\cos\alpha}=\frac{1-a\cos\alpha}{a\sin\alpha},$$

于是有 $1+a\cos\alpha=2a^2$。

减元是数学变形中常用的方法。它的作用在于缩小考虑问题的范围，从而有利于问题的解决。减元又称消元，常用的消元方法有加减消元法、乘除消元法、代入消元法、利用有关数学公式消元等。

增元 是指将少元问题转化为多元问题的一种化归方法。

例 2 解方程

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}。$$

解 显然 $x=0$ 是原方程的解。当$x\neq0$时，原方程变形为

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{5}。$$

设 $u=\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$，$v=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$，则上述无理方程可化为如下二变元的方程组

$$\begin{cases}u+v=\sqrt[3]{5},\\ uv=(\sqrt[3]{5})^{-1}\end{cases}$$

的求解问题。由此，可求得原方程的解为 0，$\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$。

增元也同样是解决数学问题的常用方法，数学中的参数法、增量法、辅助线、辅助角等都是一种增元的思想。增元不但可以起一个铺路搭桥的

作用，同时由于增加了自由度，拓广了视野，使得问题的解决具有更大的灵活性。减元与增元既是对立的，又是紧密联系的、相辅相成的。有时，一个问题既要增元，同时又要减元，例如用参数解决解析几何问题时，有时先设参数，再消参数，通过一设一消从而达到解决问题的目的。

淘汰法　亦叫排他法、筛选法，剔除法。其具体含义是：在探索问题求解时，可能有多种解题思路和结果，很难断定哪个思路能够成功或结果正确，这时可进行试验，逐个进行筛选，排除不能成功的思路和不正确的结果，直到成功或结果正确为止。

例　如果凸($n\geqslant 3$)边形F的所有对角线都相等，则有（　）成立。

(A) $F\in$ {四边形}；

(B) $F\in$ {五边形}；

(C) $F\in$ {四边形} $\cup$ {五边形}；

(D) $F\in$ {边长相等的多边形} $\cup$ {内角相等的多边形}。

分析　从四边形考虑：因为正方形的对角线相等，所以排除(B)；从五边形考虑：因为正五边形的对角线相等，所以排除(A)；从等腰梯形考虑：因为等腰梯形的对角线相等，但等腰梯形既不是边长相等的多边形，又不是内角相等的多边形，因此排除(D)。由单项选择题的唯一性，故选(C)。

综合法　有下面几种含义：

（1）在分析的基础上把事物的各个方面在思维中结合成一个统一整体进行考察的逻辑方法。例如，对于正数、零、负数、有理数、无理数的意义、性质和运算认识之后，把它们综合起来作为实数集整体来研究，从而认识了实数可以进行代数运算，具有交换律、结合律，分配律，可以比较大小，具有连续性等性质，这就是综合方法。综合在概念的形成过程中，对认识事物的发展规律及其表现形式有着重要的作用。因为它把零散的无系统的个别认识通过综合而提高到规律性的认识，这是认识过程质的飞跃。因此，适时运用综合法，在科学研究上可产生重大的突破。例如，在20世纪中期，数学家把集合论中集合与映射，群论中的群与群同态，拓扑学中的拓扑空间与连续映射等的研究对象综合在一起成为一个总体，从而概括出一种高度抽象的数学系统——范畴，因而一门高度综合性的新数学学科产生了。

（2）在数学中，综合法被看成是从原因推导出原因产生的结果的一种思维方法。简单地说，综合是“由因到果”。在数学证明中，为了找到证明的途径，如果推理的方向是从已知到求证。这种思考方法由于是“由因导果”，因此，被称之为综合法，有的称为顺推法。

例　设$a>0$，$b>0$，$a\neq b$，求证$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。

证明　因为$a\neq b, a>0$，$b>0$，所以$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$，即$a+b>2\sqrt{ab}$。两边除以2，得$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。

综合法是数学解题中常用方法之一，数学中绝大多数问题的证明过程最终都是采用综合法书写。这是因为综合法文字精炼，占的篇幅少。

（3）在数学中，综合法视作是从质量方面研究客观事物的性质为基础的研究方法。例如，综合几何主要是从几何图形的性质方面来研究问题，这就是综合法。

综合除法 是长除法的一种。其具体含义是：一元n次多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 除以一次因式$x-b$，它的商设为$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$，余数为 r，则有

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n$$
$$=(x-b)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})+r,$$

把上式右端展开，比较等号两边x同次幂的系数，根据恒等式的性质，得

$b_0=a_0$，所以$b_0=a_0$；

$b_1-bb_0=a_1$，所以$b_1=a_1+bb_0$；

$b_2-bb_1=a_2$，所以$b_2=a_2+bb_1$；

$\cdots$ $\cdots$

$b_{n-1}-bb_{n-2}=a_{n-1}$，所以 $b_{n-1}=a_{n-1}+bb_{n-2}$；

$r-bb_{n-1}=a_n$，所以 $r=a_n+bb_{n-1}$。

根据上列等式，可用如下简洁的格式来求出商

a_0	a_1	$\cdots$	a_2	a_{n-1}	a_n	
	bb_0	$\cdots$	bb_1	bb_{n-2}	bb_{n-1}	b
$a_0=b_0$	$a_1=bb_0=b_1$		$a_2+bb_1=b_2\cdots$	$a_{n-1}+bb_{n-2}=b_{n-1}$	$a_n+bb_{n-1}=r$	

在上述的格式中，b_0就是a_0，只要照抄下来即可；把b_0与 b 之积bb_0加到a_1上就得到b_1；b_1与 b 之积bb_1加到a_2上就得到b_2，如此进行下去，可求得b_3，b_4，$\cdots$，b_{n-1}。最后把 b 与b_{n-1}之积加到a_n上就得到余数r。

上述计算商的系数和余数的过程实质上是利用了递推公式：

$$b_0=a_0,\ b_{i+1}=a_{i+1}+bb_i,$$

$i=0，1，\cdots，n-2$。

例 求 $2x^3-3x^2+4x-5$ 除以 $x-2$ 所得的商与余数。

解	2	-3	4	-5	
+)		2×2	2×1	2×6	2
	2	1	6	7	

所得的商为 $2x^2+x+6$，余数 $r=7$。

这个方法可用于求多项式除以多项式的商和余数；求多项式的值；多项式的因式分解；解高次方程；把多项式$f(x)$表示成$F(x-a)$的形式，因而也就可化$\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}$为多项式与最简部分分式之和的形式，这在计算有理分式的积分时有用；化简$f(x-a)$等。

综合除法计算简便、容易掌握、程序性强，便于在电子计算机上实现。

在应用综合除法时，应将被除式按降幂排列，如果缺项应以 0 补位。除式的常数项在综合除式相应的位置

应变号。

联言推理 间接演绎推理的一种形式。它是根据联言判断的逻辑性质而进行推演的推理，其前提或结论为联言判断。

联言判断的逻辑性质，主要是指联言判断$p\wedge q$与它的联言肢p、q之间的真假关系。用"1"表示真，"0"表示假，这种真假值关系，可用下面的真值表给出：

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

从上面的真值表可以看出，当且仅当p、q都为真时，$p\wedge q$才为真，其余皆为假。据此，可以得到联言推理的两种基本推理形式：分解式和组合式。

由联言判断$p\wedge q$为真，推演出它的肢判断p、q为真的推理叫做联言推理的分解式，其推理规则为

$$\frac{p\wedge q}{p},\quad \frac{p\wedge q}{q}$$

例1 3是奇数且3是素数为真（联言判断），依推理规则，3是奇数（判断肢之一）；3是素数（判断肢之一）皆是真命题。即有

$$\frac{3\text{是奇数且}3\text{是素数}}{3\text{是奇数}}$$

和

$$\frac{3\text{是奇数且}3\text{是素数}}{3\text{是素数}}$$

由肢判断p、q全为真，推演出其联言判断$p\wedge q$为真的推理叫做联言推理的组合式，其推理规则为

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p\wedge q \end{array}$$

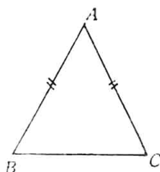
例2 如果已知前提 $x\geqslant 2$（判断肢之一）、$x\leqslant 16$（判断肢之一）皆为真，则由上面推理规则可知，其联言判断$\{2\leqslant x\leqslant 16\}=\{x\geqslant 2\}\wedge\{x\leqslant 16\}$为真命题，即

$$\begin{array}{c} x\geqslant 12 \\ x\leqslant 16 \\ \hline 12\leqslant x\leqslant 16 \end{array}$$

类似地，可以把两个以上的判断肢用$\wedge$联结起来构成一个新的联言判断。显然，当且仅当所有的判断肢为真时，其联言判断为真，否则为假。

提取公因式法 见分解因式的方法。

揭分法 一种数学对象变换法。它是将给定问题中的某个抽象数学对象看成重叠在一起的二个甚至多个（与之相同的）数学对象，因此可以根据需要把该对象揭分出若干个相同的对象，然后通过对这些对象间的关系以及它们与其它对象间的关系的考察来发现解题途径的思想方法。例如，求证等腰三角形的两底角相等。对这一问题，公元3世纪希腊数学家帕普斯给出了以下的证明：将等腰$\triangle ABC$看作$\triangle ABC$与$\triangle ACB$叠合的结果，在这两个三角形中，由于$AB=AC$，$AC=AB$，且$\angle BAC=\angle CAB$，因此$\triangle ABC\cong\triangle ACB$，故$\angle ABC=\angle ACB$。这里



采用的便是揭分法：将$\triangle ABC$揭成$\triangle ABC$和$\triangle ACB$。数学对象可以"揭分"的根据在于对象自身的理想化抽象性。譬如数学中的"点"、"直线"等概念都是对有关事物进行理想化抽象的产物。"点"没有大小，一个点便可以看作是重叠在一起的多重点；"直线"没有宽度，一条直线便也就可以看作是重叠在一起的多重直线。抽象的数学对象是一和多的统一。因而，揭分法也反映着一和多的统一。

插入法 见插值法。

插值法 亦称插入法、内插法。它是在已知的函数表中，插入一些表中没有列出的所需要的中间值的一种差分方法。若函数$f(x)$在自变量x的一些离散值所对应的函数值为已知，则可以确定一个函数$p(x)$，使得$p(x)$在这些离散值所取的函数值，就是$f(x)$的已知值。从而可以用$p(x)$来估计$f(x)$在这些离散值之间的自变量所对应的函数值。插值法是误差理论和实验数据处理中的基本方法，有着重要的作用。

最小二乘法 测量和科学实验中数据处理的一种方法。其具体含义是：通过测量和实验，得到自变量和因变量的一组对应值$\{x_i, y_i\}(i=1,2,\cdots,n)$，可以此来确定函数$f(x)$的关系式，比如是线性函数$f(x)=ax+b$，或者是二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$等，使之在观测点的值$x_1$，$x_2$，…，$x_n$所取的值$f(x_1)$，$f(x_2)$，…，$f(x_n)$与观测值$y_1$，$y_2$，…，$y_n$在某种尺度下最为接近。最常用的一种尺度和处理方法是：取偏差的平方$\triangle_i^2=[f(x_i)-y_i]^2$（$i=1,2,\cdots,n$），使$\triangle_1^2+\triangle_2^2+\cdots+\triangle_n^2$达到最小值。从而确定出函数$f(x)$中的末定参数。

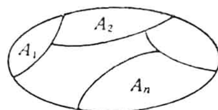
最小二乘法的思想在概率统计及应用数学领域中有广泛的应用。

等价抽象 一种特殊的数学抽象方法。它是指借助于等价关系给出已知集合的一个划分，然后将其中等价的元素"同一化"而得到一个新集合的一种方法。其具体含义是这样的：如果集合S中的一个二元关系R满足下述三条：

①自反性 对任意的$a\in S$，a和a有关系R，即aRa；

②对称性 若aRb，则bRa，其中$b\in S$；

③传递性 若aRb，bRc，则aRc，其中$c\in S$。则称R为S上的一个等价关系。由此可以得到S的一个划分，使得S被表成若干个"等价类"A_i的并。等价的元素位于同一等价类，不等价的元素位于不同的等价类之中。然后将同一等价类中元素



"同一化"，即将等价的元素在抽象意义下看作同一个东西，这样，一个等价类形象上便凝聚成了一个新的抽象元素。由所有这些新元素就构成了一个新集合，即S关于R的商集S/R。由S到S/R的过程便是等价抽象的过程。

例如，在初等数论里，若整数a和b用d除有相同的余数，则称a和b是对模d同余的，记作$a\equiv b(\bmod d)$。显然同余关系是建立在整数系统上的等价关系。因而可利用等价抽象来构造出由同余类构成的新系统。对于模$d=5$的情形，有以下五个剩余类：

$[0]=\{x\mid x\in Z,\ x\equiv 0\ (\bmod 5)\}$；

$[1]=\{x\mid x\in Z,\ x\equiv 1\ (\bmod 5)\}$；

$[2]=\{x\mid x\in Z,\ x\equiv 2\ (\bmod 5)\}$；

$[3]=\{x\mid x\in Z,\ x\equiv 3\ (\bmod 5)\}$；

$[4]=\{x\mid x\in Z,\ x\equiv 4\ (\bmod 5)\}$。

在商系统$\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$中引进以下的加法和乘法运算，则可得一有限代数系统：

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

×	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

等价抽象方法是建立新的数学系统的常用手段之一，在数学研究中具有十分广泛的应用，而且数学中很多重要概念的出现都是因此而导致的，或者可由它而产生的。譬如有理数可看作整数偶的等价类；实数可看作有理数序列的某种等价类；借助于(超)滤子的概念，非标准数亦可看作有理数序列的某种等价类，等等，都表明了这一点。除此之外，这种方法在解题中往往亦可发挥其效力。这点可从下面的例子中看出。

例　设m、n是正整数集A中的任意两个数，则m、n、$m-n$、$m+n$中至少有一个数能被3整除。

证明　把正整数集A中每一个数用3去除，按所得结果，可把A分成三类：$A_0=\{3K\mid 3K\in A\}$，$A_1=\{3K+1\mid 3K+1\in A\}$，$A_2=\{3K+2\mid 3K+2\in A\}$。①若$m$或$n\in A_0$，则本题得证；②若$m$、$n$属同一类$A_1$或$A_2$，则$m-n$能被3整除；③若$m$、$n$分属$A_1$和$A_2$的不同类，譬

如 $m\in A_1$，$n\in A_2$，则$m+n$能被3整除。故，综上可知，原命题普遍成立。

值得说明的是，在解题中利用等价抽象法，主要是用“等价类”或划分部分，而非这一方法的全部含义。

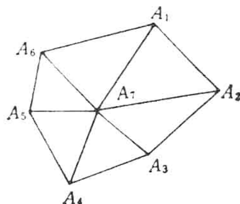
等价命题法 一种构造命题的方法。其具体含义是：如果直接证明原命题较困难，可以构造一个比原命题更易定映的且与原命题等价的命题，通过等价命题的解决达到原命题的解决。

例 有n个村庄、其间的距离皆不相等，如果每一个村庄都开一辆汽车到离它最近的村庄去，试证明每个村庄所开进的汽车不会超过五辆。

分析 如果$n\leqslant 6$，问题的结论明显成立。但若$n>6$，那就不易处理，当n足够大时，其结论似乎不可思议。可考虑一下$n=7$的情况。从许多村庄中找出六个村庄，各开出一辆汽车到离它最近的第七个村庄去，似乎是可能的。然而问题的结论又恰恰是不可能的。不妨把这七个村庄抽象为平面内七个点A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7。于是当$n=7$时，可构造一个与原命题等价的命题如下：

“试证平面内不存在这样的点A_7，它到其余六个点的距离比这六个点彼此间的距离都短”。

这个命题比原命题容易证明。可用反证法予以证明。假设存在这样一个点A_7，那么如图所示，在$\triangle A_7A_1A_2$中，A_1A_2为最长边，故$\angle A_1A_7A_2>60°$同理可知：$\angle A_2A_7A_3>60°$，$\angle A_3A_7A_4>60°$，$\angle A_4A_7A_5>60°$，$\angle A_5A_7A_6>60°$，$\angle A_6A_7A_1>60°$，



于是这些角之和大于360°，与周角定义矛盾。可见这样的A_7是不存在的。

同理，对于一般的$n>7$的情形也可给出相应的证明。

等积变换法 借助于等积变换以解决问题的一种化归方法。将一个图形变到与它等积的图形，这样的变换就叫做等积变换。等积变换分两种类型，一种是剖分拚图变换，另一种是变形变换。将一个已知图形，剖分成若干个较小图形，然后用这些较小图形重新拚合而成另一图形，这种变换就叫做剖分拚图变换。这种变换的特点是剖分的小图形的形状和大小不变，只改变其相对位置。一个图形变到另一图形不需要剖分和拚合，只要保持面积不变的图形，这样的等积变换就是变形变换。在面积理论和数学游戏中常用剖分拚图变换，而在初等几何中常用变形变换。

等值变形法 一种特殊的恒等变形法。它是指数学式子在变形过程中保持其值不变的一种方法。

例 计算1的n个n次方根（复数集内）连乘积($n\in N=\{1,2,\cdots\}$)。

解 1的n个n次方根为

$$W_{k+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$k=0, 1, 2, \cdots, n-1$。

$$M=1\cdot W\cdot W^2\cdots W^{n-1}$$

$$=W^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$=\cos\left[\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]+i\sin\left[\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$=\cos(n-1)\pi+i\sin(n-1)\pi$$

$$=\begin{cases}+1, & n\text{为奇数},\\ -1, & n\text{为偶数}。\end{cases}$$

在用这种方法进行求值时，要注意变形是否遵循了数与式的运算法则。否则，就会得到不正确的结果。由于在不同的数集里其运算法则往往亦有所不同，因此，在进行等值变形时，还要注意求值所属的范围。

等式与不等式转化法 将等式问题转化为不等式问题，或者反过来，将不等式问题转化为等式问题的一种化归方法。

例 1 解方程

$$\left(3^{2x}+\frac{1}{81}\right)(3^{2y}+3)(3^{2z}+27)=8\cdot 3^{x+y+z}。$$

分析 这是一个含有三个未知数的指数形式的不定方程问题，不能用一般的方法求出其解。对于上述这类特殊形式的不定方程问题可以将其转化为不等式问题来求解。对于形如$a^2+b^2=2ab$的等式问题可转化为不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$的问题进行讨论，再利用不等式取等号的定解条件就达到解决等式问题的目的。而上述类型的等式问题可以视作上面提到的简单情况的组合，这就有下面的解法。

解 由 $3^{2x}+3^{-4}\geqslant 2\cdot 3^{x-2}$，

$$3^{2y}+3\geqslant 2\cdot 3^{y+\frac{1}{2}},$$

$$3^{2z}+27\geqslant 2\cdot 3^{z+\frac{3}{2}},$$

得

$$\left(3^{2x}+\frac{1}{81}\right)(3^{2y}+3)(3^{2z}+27)\geqslant 8\cdot 3^{x+y+z}。$$

上式取等号的定解条件为

$$3^x=3^{-2},\ 3^y=3^{\frac{1}{2}},\ 3^z=3^{\frac{3}{2}}。$$

由此可得 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$，$z=\frac{3}{2}$。

例 2 已知$\triangle ABC$，求证

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}。$$

证明 设 $x=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，于是有

$$x=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2},$$

即 $$\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}+2x=0。$$

这是一个关于 $\cos\frac{A+B}{2}$ 的一元二次

方程问题。而 $\cos\frac{A+B}{2}$ 是实数，故其判别式

$$\Delta=\cos^2\frac{A-B}{2}-8x\geqslant 0,$$

即 $x\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}$。而 $\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant 1$，所以有 $x\leqslant\frac{1}{8}$，此即为所证。

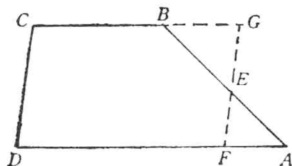
上面的不等式的证明转化为方程求解问题，由方程的判别式推知所证明的不等式。这是通过等式证明不等式的问题。

利用等式与不等式的转化解决数学问题是一个非常有用的思想方法，数学中有很多问题可以用这种方法来解决。例如，欲证明两个集合 A、B 相等，可证明 $A\subset B$，$B\subset A$，这样就可断定 $A=B$。对于某些超越方程，利用超越方程所含函数的有界性质，例如正弦函数的有界性，可以将求解问题转化为不等式的解集的讨论。某些与判别式有关的方程式问题可转化为判别式的判断问题，这也是不等式问题的讨论；反之，由判别式的不等式问题转化为方程求解问题。对某些无理方程的解法也可转化为不等式问题来讨论。

筛选法 见淘汰法。

割补法 亦称剖分拚图变换法，也叫出入相补原理。它是一种等价变换法，是分解组合法的典型表现形式。其具体含义为：将给定图形的一部分割下来，经过移位，拚补到剩下的那部分图形上去，这样得到的新图形，有利于问题的解决。

例如如图所示的梯形 $ABCD$。为推求其面积公式，从 AB 的中点 E 开始分割出一个三角形 AEF，其中 $EF\parallel CD$，然后将其拚补到 BEG 的位置。这样就得到了新图形 $CDFG$，易知它是一平行四边形，而平行四边形的面积已会求，于是借此便可得出梯形的面积公式。



出入相补原理（又称以盈补虚法）是三国时魏人刘徽在其《九章算术注》中首先发展并系统化了的一种方法，是中国古代数学中处理几何问题的重要手段。其思想基础在于平面图形（立体图形）的面积（体积）在刚体运动下的不变性。它常被用来直接解决一些有关几何图形的面积（体积）的问题及间接解决一些能化归为此类问题的题目，诸如开平方、开立方、解二次方程等。

强抽象 亦称为强化结构式抽象。它是指通过引入新特征强化原结构来完成抽象，从而所获得的新结构为原结构的特例。也就是说，强抽象是通过扩大原概念的内涵，来建立新概念的抽象方法。

例如，由任意三角形概念出发，若加强对“边”的属性的限制，要求二边相等或三边相等，这样就获得等腰三角形和等边三角形的两个新概念；若加强对“角”的属性的限制，

比如，要求一个角为直角，通过这样的强抽象，就可获得直角三角形的新概念；若加强对“角”与“边”的限制，要求二边相等，一角为直角，则可得到等腰直角三角形的新概念。再如，在函数概念中引进连续性概念，就构成了连续函数概念。显然函数包含了连续函数。

一般说来，如果人们认识的事物对象其内容结构形式非常贫乏或不够丰富，这时可采用强抽象的方法引入新概念。当然，还可以根据弱抽象与强抽象思维方式完全相反的特点，用来分析数学概念的层次结构，理解数学知识间的相互联系。例如，在四边形中，增加“两组对边分别平行”这个条件，通过强抽象可得到平行四边形的概念；从平行四边形的概念中去掉对“两组对边分别平行”的限制，由弱抽象便得到四边形的概念。可见，初等几何中平行四边形的概念在各种四边形的概念中占有特别重要的地位：它既是对任意四边形、梯形等强抽象的结果，又是另外一些新概念如矩形、菱形、正方形等强抽象的出发点。同时，它还是梯形、任意四边形等弱抽象的出发点。

强命题法　一种构造命题的方法。所谓比原命题更强的命题是指这样一种命题。它的结论是原命题结论的充分条件。例如：命题A：“$f(x)$能被5整除”与命题B：“$f(x)$能被15整除”，两者相比较，命题B是强命题，因为$f(x)$能被15整除，则更能保证它也可被5整除。一般说来，强命题比原命题更难定映，甚至还有这种情况：原命题为真，但比它更强的命题为假的情况。对于上述情况，我们当然不能借助强命题来解决原命题。但也有的情况，强命题较易定映。在这种情况下，借助于强命题以解决原命题的构造命题法就称之为强命题法。

例　设$n\geqslant 2$，一个$n\times n$数表中，每两行都不完全相同，证明一定可以删去一列，剩下的数表中的每两行仍然都不完全相同。

分析　这个问题直接用数学归纳法证明很困难，因为从$n=k+1$归结到$n\leqslant k$这一步难以实现。为此我们构造如下的强命题：“一个$m\times n$（$2\leqslant m\leqslant n$）的数表中，如果每两行都不完全相同，那么一定可以删去$(n-m+1)$列，删去这些列之后，每两行仍然不完全相同”。对于这个强命题我们可对m进行归纳证明。当$m=2$时，命题显然成立。设命题对$m=k$成立，今考虑数表$(k+1)\times n$（$2\leqslant k+1\leqslant n$）的前$k$行，即考察数表$k\times n$，根据归纳假设，必可删去$(n-k+1)$列，剩下数表$k\times(k-1)$每两行均不相同。不失一般性，不妨设数表中左上角$k(k-1)$，现在增添第$k+1$行，若最后一行与$k\times(k-1)$中各行不完全相同，则命题显然成立。若与某一行前面的$k-1$个数完全相同，则与该行的后面的$(n-k+1)$个数中，位于同一列的数至少有一个不相同，不妨设第k列的两个数不相同。由此就得到$(k+1)$行×前k列数表，每两行不全相同，于是强命题成立。由于强命题的结论是原命题结论的充分条件，故原命题成立。

强化结构式抽象　见强抽象。

概括方法　思维的重要方法。共有三种含义：

（1）把事物的共同特点归结起来的方法。例如正弦的特殊角的值 $\sin 0^\circ = 0$，$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$，$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 90^\circ = 1$，为了便于记忆，可列成如下表格

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

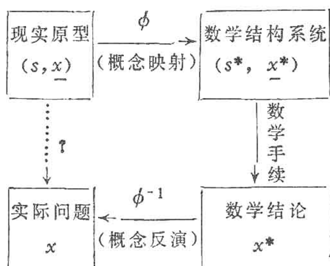
这里运用的就是概括方法。

（2）是指由认识个别事物的本质属性，推广到认识同类事物的共同本质属性的方法。这种类型也称为一般化的方法。例如，从研究一元二次方程的性质扩大到研究一元 n 次方程的性质即属此列。

（3）是指去消被研究对象的一部分或全部条件限制而对“同一”对象加以研究的一种方法。它是一种由局部到整体的方法。例如，在某一区间，如 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上研究三角函数的性质，进而去消这一限制，而在整个实数范围内研究三角函数性质的方法，就是这种“去消型”的概括方法。

概括方法是符合人们的认识规律的。人们认识客观事物，一般是先从认识个别事物开始，然后逐步扩大到认识一般的事物，由认识事物的局部到认识事物的整体，并将对事物零散的认识总结起来。这一方法既有助于拓广人们的认识，又有助于系统化人们的认识。它使得数学中借此得出的规律和方法具有广泛的应用性，它对数学的研究有着极其重要的作用。

概念映射法　亦称抽象分析法。它是由抽象原则派生出来的各种具体方法的总称。其过程可用框图表示如下：



概念映射系指将一组事物及其关系，借助于数学语言或符号，抽象成数学概念及概念间的相应关系这一抽象过程而言的。它具有双向性，一是从具体到抽象的顺向映射；一是指从抽象返回具体的逆向映射。一般地，数学模型法、公理化方法，就是利用了这种双向性的概念映射法。概念映射法具有两个显著特征：一是特殊的抽象形式。在数学抽象概念思维中，仅保留了对象的量的特征，而舍弃了其质的内容。二是特殊的抽象高度。数学的抽象程度远远超过了自然科学中的一般抽象。所谓直接抽象是指直接从现实的客观事物中抽象出相应的空间形式和数量关系。所谓间接抽象是指在已有数学概念之上抽象出更高层次的数学概念。

例如　有七个城市，它们之间的距离都不相等，如果每个城市都出动

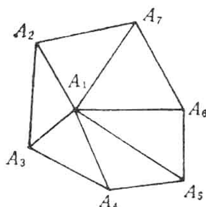
一架飞机到离它最近的城市降落，试证明，每一个城市所降落的飞机不会多于五架。

可以按概念映射法来解决这一问题。首先七个城市与它们之间不等的距离及每座城市出动一架飞机到离它最近的城市降落之间的关系，便构成了关系结构系统 S，而每座城市所降落的飞机是否多于五架便是与 S 相联系的未决问题 $\underline{x}$。

引用概念映射 ϕ：把七座城市对应为平面内七个点，把各城市之间的距离对应为十二条线段。下面就按照

$$(S,\ \underline{x}) \xrightarrow{\phi} (S^*,\ \underline{x^*}) \xrightarrow{\psi} x^* \xrightarrow{\phi^{-1}} x$$

程序来求解问题。显然作为映象关系结构的 S^* 可表示为下图所示的平面几何图形。原问题便对应为平面内是否存在这样的点 A_1，它到其余六个点的距离比这六个点彼此间的距离都短的问题 $\underline{x^*}$。



解此问题采用的数学手续 ψ 为下述的反证法推理过程：假设存在这样一个点 A_1，那么如图所示，在 $\triangle A_1A_2A_7$ 中，A_7A_2 为最长边，则有 $\angle A_7A_1A_2 > 60°$。同理有 $\angle A_2A_1A_3 > 60°$，$\angle A_3A_1A_4 > 60°$，$\angle A_4A_1A_5 > 60°$，$\angle A_5A_1A_6 > 60°$。于是这六个角的和大于360°，与周角定义矛盾。故这样的点 A_1 不存在。也即是说，问题的答案 x^* 不存在。由此对应地翻译回去，也就是对 x^* 施行逆映射 ϕ^{-1}，便求得原问题的答案 x 是：每个城市所降落的飞机，不会多于五架。

概率论方法　数学中的重要方法之一。它是从量的方法研究对象的偶然性与必然性关系的一种方法。

概念的扩张式抽象　见弱抽象。

零点分段法　一种特殊的分段讨论法，是解决含有绝对值符号问题的一种分解方法。其具体含义为：首先求出每个绝对值符号内代数式等于零的变量 x 的值，以这些 x 值为分点把数轴划分为若干段，然后将问题逐段讨论，最后通过综合而得出整个问题的解。

例　证明：对任意实数 t，复数 $Z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|Z|$ 适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$。

证明　由题设知

$r=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}$，令 $|\cos t|=0$，$|\sin t|=0$，解此二方程，得

$t=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$t=n\pi$ $(n\in Z)$，其中 Z 表示整数。对原问题分成如下四段予以讨论：

①当 $t\in\left[2k\pi,\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时

（其中，$k\in Z$）

$$r=\sqrt{\cos t+\sin t}$$

$$=\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\leqslant\sqrt[4]{2}；$$

②当 $t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi\right)$ 时（其中 $k\in Z$），

$$r=\sqrt{\sin t-\cos t}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\leqslant\sqrt[4]{2};$$

③当 $t\in\left[2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 时（$k\in Z$），

$$r=\sqrt{-(\cos t+\sin t)}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{5\pi}{4}\right)}$$
$$\leqslant\sqrt[4]{2};$$

④当 $t\in\left[2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2(k+1)\pi\right)$ 时（$k\in Z$），

$$r=\sqrt{\cos t-\sin t}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$\leqslant\sqrt[4]{2}。$$

综上可知，对任意实数 t，皆有 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$。

零点分段法是解决含有绝对值符号的方程问题及不等式问题等的常用手段。

微分法 计算微分或导数的方法。

解析法 见坐标法。

解方程的方法 根据不同类型的方程，分述其方法。

一元一次方程 $ax=b$ 的解法 若 $a\neq 0$，得 $x=\frac{b}{a}$；若 $a=0$，$b\neq 0$，方程无解；若 $a=0$，$b=0$，方程有无穷多解。

线性方程组的解法 常用的有代入消元法、加减消元法、高斯消去法、克莱姆法则。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解法 一是公式法，求根公式 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；二是分解因式法，将 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的右式分解因式，化成同解方程 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，则 x_1，x_2就是原方程的根。

一般三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq 0$）的解法 将方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的两边同除以 a，并设 $x=y-\frac{b}{3a}$，则原方程可化为 $y^3+py+q=0$ 的形式，解出y。再由 $x=y-\frac{b}{3a}$求出原三次方程的三个根。

二项方程的解法 形如

$ax^n+b=0$（n 为自然数，$a\neq 0$，$b\neq 0$）

的方程称为二项方程。它的解法是先将原方程化为 $x^n=-\frac{b}{a}$，再把 $-\frac{b}{a}$ 用复数的三角式表示，设为 $-\frac{b}{a}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，原方程的 n 个根就是 $-\frac{b}{a}$的n次方根：

$$x_{k+1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right.$$

$+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\Big]$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$。

三项方程的解法　形如

$ax^{2n}+bx^n+c=0$（其中a、b、c均不为零，n为自然数）的方程，称为三项方程。它可用换元法解，即令$y=x^n$，将原方程化为

$$ay^2+by+c=0。$$

解这个方程，可求出它的两个根，设为y_1，y_2，得两个二项方程

$$x^n=y_1;\ x^n=y_2。$$

再解之，即可求出原三项方程的根。

倒数方程的解法　倒数方程有三类：第一类，分别与首末二项等距离的项的系数都相同，首项系数和常数项也相同的整系数一元n次方程叫第一类型倒数方程，或标准型倒数方程。一般形式为$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+cx^2+bx+a=0$。第二类，分别与首末二项等距离的项的系数都互为相反数，首项系数与常数项也互为相反数的整系数一元n次方程叫做第二类型的倒数方程。一般形式为$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+\ -cx^2-bx-a=0$。第三类，分别与首末二项等距离的偶次项系数相同，而奇次项的系数互为相反数（常数项规定为偶次项）的整系数一元n次方程叫第三类型的倒数方程。解倒数方程首先要根据倒数方程根的性质：①倒数方程无零根；②在第一、二类倒数方程中，若x_0是它的根，则$\frac{1}{x_0}$也是它的根；③在第三类方程中，若x_0是它的根，则$-\frac{1}{x_0}$也是它的根；④奇次倒数方程必有一个根为1或－1。然后运用综合除法和换元法求解。对于第一类方程，它的解法是：当n为偶数时，令$n=2k$，因为$x\neq0$，将方程两边同除以x^k，将x^i与$\frac{1}{x^i}$（$i=1,2,\cdots,k$）结合起来，再令$y=x+\frac{1}{x}$，则原方程可化为y的k次方程。解此方程得y的值。然后再由$y=x+\frac{1}{x}$求出x。当n为奇数时，必有一个根为－1。因此可将方程左边的多项式用综合除法除以$(x+1)$，转化为偶数次倒数方程求解。对于第二类方程，它的解法是：当n为偶数时，它有两个根为±1；当n为奇数时，它有一个根为1。因此可分别利用综合除法降次，化为第一类型的偶次方程来求解。对于第三类倒数方程，它的解法类似第一类倒数方程的解法。

高次方程的解法　无一般方法，根据方程特点，寻求特殊解法，以降次为思考的出发点，常将高次方程转化为一次方程或二次方程的求解问题。常用的转化方法有换元法、常量与变量转化法、因式分解法等。对于整系数高次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

（其中a_0，a_1，$\cdots$，a_n是整数），其解法是：如有有理根，先求出它的有

理根x_0，再用综合除法将方程左边的多项式用$x-x_0$去除，所得商式为$n-1$次的多项式，设为$\varphi(x)$。解方程$\varphi(x)=0$，就可求出原方程的其余根。它的理论依据是整系数高次方程有理根$\frac{p}{q}$（p、q互质）的性质：p为常数a_n的约数，q为最高次项的系数a_0的约数。据此，先定a_0、a_n的约数，合成分数$\frac{p}{q}$，再用综合除法试根，求出它的有理根$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_m}{q_m}$（$m \leqslant n$）。若$m<n$，将方程的左式除以$\left(x-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(x-\frac{p_2}{q_2}\right)\cdots\left(x-\frac{p_n}{q_n}\right)$得商式。令商式等于零，求出原方程的其余根。

求一般高次方程的近似实根常采用迭代法、牛顿法等。

无理方程的解法　解无理方程的基本思路是：去根号，将无理方程化为有理方程或三角方程，常用的方法有乘方法、换元法、有理化根式法和三角代换法等。在作无理方程的变换时，要注意：①得到的有理方程的次数要尽可能降低，且它的根包含原方程的根；②得到的有理方程，未知数的允许值的范围可能扩大，有可能产生增根。所以，在求出新得的有理方程的根之后，必须检验是不是原方程的根。所谓乘方法，是将无理方程的两边乘以适当的自然数次方，消去根号，化成有理方程。将方程两边奇数次方后得到的方程与原方程同解，而将方程两边偶数次方后得到的方程，一般说来，不等价于原方程，应验根。有理化根式法是指：若$f(x)$、$g(x)$是有理式，则$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$和$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$互为有理化根式。若无理方程中出现了其中的一个根式，常在方程两边同乘以另一个根式，将新方程与原方程组成一个方程组

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=k_1(x), & ①\\ \sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=k_2(x)。 & ②\end{cases}$$

①+②，得$2\sqrt{f(x)}=k_1(x)+k_2(x)$。解此方程，可求得原方程的解。

解特殊的无理方程

$$\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}=k \quad (k\text{为常数})$$

的方法是：若$k=0$，将一个根式移到方程右边，两边平方，转化为有理方程求解。若$k\neq 0$，将方程两边同乘以有理化根式$\sqrt{ax+b}\mp\sqrt{cx+d}$，整理得

$$\sqrt{ax+b}\mp\sqrt{cx+d}=\frac{a-c}{k}x+\frac{b-d}{k}。$$

原方程与新方程相加，整理得

$$2\sqrt{ax+b}=\frac{a-c}{k}x+\frac{k^2+b-d}{k}。$$

两边平方，得二次方程

$$4(ax+b)=\left(\frac{a-c}{k}x+\frac{k^2+b-d}{k}\right)^2。$$

解此方程，即可求出原方程的根。

解二元二次方程组的方法 形如

$$\begin{cases}A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,\\A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}$$

（其中A_1，B_1，C_1，A_2，B_2，C_2不同时为零）的方程组，叫做二元二次方程组。它又有两种类型，第一种类型是由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，一般形式为

$$\begin{cases}D_1x+E_1y+F_1=0, & ①\\A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0。 & ②\end{cases}$$

常用的解法有：（1）代入消元法；（2）分解因式法。

将方程②分解因式为

$$(A'x+B'y+C')(A''x+B''y+C'')=0,$$

则方程组 $\begin{cases}D_1x+E_1y+F_1=0,\\A'x+B'y+C'=0\end{cases}$

与 $\begin{cases}D_1x+E_1y+F_1=0,\\A''x+B''y+C''=0\end{cases}$

的解集的并集就是原方程组的解集。第二种类型是由两个二元二次方程组成的方程组，常用的解法有加减消项法和分解因式法。（1）加减消项法有下面三类方程组：第一类是可以消去一个未知数的。如果两个方程中的某个未知数的对应项的系数成比例，就可以用加法消去法，消去这个未知数，变成一元二次方程。解之，得一个未知数的值。再代入原方程组中的一个方程，求出另一个未知数的值，得原方程组的解，第二类是可以消去二次项的。如果两个方程对应的二次项的系数成比例，可用加减消项法消去二次项，得到一个一次方程。将此方程与原方程组中的一个方程组成新方程组，解之，即可求出原方程组的解。第三类是可以消去一次项和常数项的。如果两个方程都不含一次项，或两个方程对应的一次项系数和常数项成比例，则通过方程的同解变换，可消去常数项，得到一个二次齐次方程，设为

$$ax^2+bxy+cy^2=0。$$

则此方程可分解因式为

$$\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}y\right)\cdot\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}y\right)=0。$$

由此方程，分解出两个一次方程，与原方程组中的任一方程组成两个新方程组。解这两个方程组，就得原方程组的解。（2）分解因式法 若方程组中的一个方程可以分解出两个一次方程，则可将这两个一次方程分别与原方程组中的另一个方程组成两个新方程组；若方程组中的两个方程经过

同解变换后，新方程能分解出两个一次方程，则可将这两个一次方程分别与原方程组中的一个方程组成两个新方程组，这两个新方程组的解组成的集合，就是原方程组的解。

解三角方程的方法　解三角方程就是通过三角变换和代数变换，把原方程化成最简三角方程，然后运用最简三角方程的解集，求出它的所有解。解三角方程的常用方法有：减元法、降幂法、升幂法、分解因式法、代数法。

（1）减元法　运用三角公式和代数公式，减少不同的角和不同的三角函数，从减元中寻求解题思路和解题方法。

（2）降次法　亦称降幂法。利用三角公式，将三角函数的高次幂降为低次幂、在降幂中发现思路，找出求解方法。

（3）升幂法　解三角方程一般是由三角函数的高次幂降为低次幂。但是，也有一些三角方程，为了求得角的一致，或为了减元，将三角函数的低次幂升到高次幂。在升幂中求得方程的解。

如，解三角方程

$$\cos^3\theta\sin3\theta+\sin^3\theta\cos3\theta=\frac{3\sqrt{3}}{8}。$$

为了求得角的一致，利用三倍角公式升幂，得

$$\cos^3\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)+\sin^3\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=\frac{3\sqrt{3}}{8}。$$

得解为 $\theta=\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}$

$(n\in Z)$。

（4）分解因式法　将三角方程化为一边为零，另一边可以用因式分解或和差化积化为几个因式相乘的形式，将解原方程转化为解最简三角方程或较简单的三角方程。

（5）代数法　用辅助未知数表示某三角函数或三角函数式，把三角方程化成代数方程、解此代数方程，将解原三角方程，转化成解最简三角方程或较简单的三角方程。

例如，解三角方程 $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$。

可令 $\sin x+\cos x=t$，则

$$t^2=1+2\sin x\cos x,$$

$$\therefore\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}。$$

将原方程转化成代数方程，得

$$t^2+2t-3=0。$$

解之，得 $t_1=-3$，$t_2=1$。于是得原方程的解

$$x=2k\pi \text{ 或 } x=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$(k\in Z)$。

解特殊三角方程的方法　根据方程不同形式有：

（1）两个同名三角函数相等的方程，它的解可由代数方程给出。如，方程 $\sin(nx+\alpha)=\sin(mx+\beta)$，$\cos(nx+\alpha)=\cos(mx+\beta)$，$\mathrm{tg}(nx+\alpha)=\mathrm{tg}(mx+\beta)$，$\mathrm{ctg}(nx+\alpha)=\mathrm{ctg}(mx+\beta)$ 的解，分别由代数方程 $nx+\alpha=k\pi+(-1)^k(mx+\beta)$，$nx+\alpha=2k\pi\pm(mx+\beta)$，$nx+\alpha=$

$k\pi+(mx+\beta)$，$nx+\alpha=k\pi+(mx+\beta)$（$k\in Z$）给出。分别解这些代数方程，就得各三角方程的解。

（2）形如$a\sin x+b\cos x=c$的三角方程，一般用辅助角的方法解。

（3）关于 $\sin x$，$\cos x$ 的齐次三角方程的解法。形如

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x+\cdots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0$$

的三角方程，叫做关于 $\sin x$、$\cos x$ 的齐次三角方程。因为 $\sin x$、$\cos x$ 不能为零，所以在方程的两边可以同除以$\cos^n x$（或$\sin^n x$），使原方程变为关于$\mathrm{tg}x$（或$\mathrm{ctg}x$）的n次方程

$$a_0\mathrm{tg}^n x+a_1\mathrm{tg}^{n-1}x+a_2\mathrm{tg}^{n-2}x+\cdots+a_{n-1}\mathrm{tg}x+a_n=0$$

$$(\text{或}a_n\mathrm{ctg}^n x+a_{n-1}\mathrm{ctg}^{n-1}x+\cdots+a_2\mathrm{ctg}^2 x+a_1\mathrm{ctg}x+a_0=0)。$$

用代数方程解此方程，就可将解原方程问题转化成解最简三角方程问题。

（4）只含同角同名三角函数的方程的解法。这类三角方程由辅助未知数可化成代数方程，解代数方程，将原方程化为最简三角方程。

解分式方程的方法　解分式方程的一般方法为：第一步，将方程两边同乘以各分母的最低公倍式，化为整式方程；第二步，解整式方程；第三步，验根。由分式方程化为整式方程后，未知数的允许值扩大了。因此，解整式方程得到的根，可能是分式方程的增根，必须验根。

根据分式方程不同的特点，解分式方程还有不同的特殊方法。例如，解分式方程

$$\frac{8}{x^2+2x+1}+\frac{11}{x^2+2x+4}=\frac{12}{x^2+2x-1},$$

可令　$x^2+2x+1=y$予以换元。

再如，解分式方程

$$\frac{M(x)}{N(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad ①$$

可利用合分比定理，经变形得

$$\frac{M(x)+N(x)}{M(x)-N(x)}=\frac{P(x)+Q(x)}{P(x)-Q(x)},\qquad ②$$

但用此法既可能引起增根，也可能引起失根。引起失根的充要条件是

$$\begin{cases}M(x)-N(x)=0,\\P(x)-Q(x)=0\end{cases}$$

有公共根，且使 $N(x)\neq0$，$Q(x)\neq0$。产生增根的充分必要条件是

$$\begin{cases}N(x)=0,\\Q(x)=0\end{cases}$$

有公共根，且使

$$\begin{cases}M(x)-N(x)\neq0,\\P(x)-Q(x)\neq0。\end{cases}$$

因此，用合分比法解分式方程应通过求

$$M(x)-N(x)=0,$$
$$P(x)-Q(x)=0$$

的公共根，且使 $N(x)\neq0$，$Q(x)\neq0$，找回失根。并通过代入方程 $N(x)=0$ 或$Q(x)=0$中去验根，若方程成立，则为增根。

在分式方程中，如果某分式的分子、分母相同部分较多，或对应项的系数成比例的较多，则通过加减某一

常数，进行通分合并，可将此分式的分子化简，由此得到一个比较简单的分式方程。用这种方法解分式方程，叫做分子化简法。

对于方程

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}+\frac{2x-2}{x+6}$$

$$=\frac{3x-3}{x+9},$$

可先分解因式，得

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)}+\frac{2(x-1)}{x+6}$$

$$-\frac{3(x-1)}{x+9}=0,$$

然后约简，提公因式，最后解得方程的根为

$$x_1=1, \quad x_2=-4\frac{1}{2}。$$

如果能把分式方程整理成

$$af(x)+\frac{b}{f(x)}$$

$$=ag(x)+\frac{b}{g(x)} \qquad ①$$

（其中$f(x)$为关于x的多项式，$g(x)$是关于x的函数或常数）的形式，则原分式方程的解一定是方程

$$f(x)=g(x) \text{ 或}$$

$$af(x)=\frac{b}{g(x)} \qquad ②$$

的解。这种方法叫做倒数构造法。

解绝对值方程方法　绝对值符号内含有未知数的方程，叫做绝对值方程。它的一般解法是：利用绝对值的定义，分区间去掉绝对值符号，把绝对值方程化为不含绝对值符号的方程，再解这些方程，得原方程的解。用这种方法要注意：分区间去绝对值符号后，所得的方程的解，必须属于分段区间；否则，不是原方程的解，应舍弃。这种方法的步骤是：第一步，确定分段区间：求出使各绝对值等于零的未知数的值，设由小到大排列为x_1，x_2，…，x_n，若未知数的允许值范围是R，则可分区间为$(-\infty,x_1]$，$(x_1,x_2]$，…，$(x_{n-1},x_n]$，$(x_n,+\infty)$；第二步，在各分段区间内，利用绝对值定义，去掉绝对值符号；第三步，在各分段区间内，解去掉绝对值符号的方程，得原方程的根。

解指数方程的方法　底为常数，幂指数里含有未知数的方程，叫做指数方程。解指数方程的思路是化成代数方程。常用的转化方法有：

（1）同底幂法　把指数方程化成$a^{f(x)}=a^{g(x)}$（$f(x)$为关于x的代数式，$g(x)$为关于x的代数式或常数，且$a>0$，$a\neq1$）的形式，根据同底幂相等，其指数相等的性质，将指数方程转化为代数方程$f(x)=g(x)$。解此代数方程，就可求出原方程的解。

（2）取对数法　把指数方程化为$a^{f(x)}=b^{g(x)}$（$f(x)$为关于x的代数式，$g(x)$为关于x的代数式或常数，$a>0$，$b>0$，$a\neq1$，$b\neq1$）的形式，再在方程两边取对数，将指数方程化为代数方程　$f(x)\cdot\lg a=g(x)\cdot\lg b$，解此方程，就可求出原方程的解。

（3）换元法　在指数方程中，

如果含有共同的指数式$a^{f(x)}$ ($a>0$，$a\neq1$)，则常用换元法。将$a^{f(x)}$用一个辅助未知数表示，将原指数方程化成代数方程，解此代数方程，求出辅助未知数的值，设为 b。再由同底幂法或取对数法解方程 $a^{f(x)}=b$，求出原方程的解。有些指数方程，经过换元，可化成一元二次方程。如用y代换指数方程

$$Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}+C=0 \quad ①$$

中的 $a^{f(x)}$，可将方程①化为一元二次方程

$$Ay^2+By+C=0。$$

如令$y=a^{f(x)}$，则$a^{-f(x)}=\frac{1}{y}$，用y代换 $a^{f(x)}$，用$\frac{1}{y}$代换 $a^{-f(x)}$，指数方程

$$Aa^{f(x)}+Ba^{-f(x)}+C=0 \quad ②$$

可化为代数方程，

$$Ay+\frac{B}{y}+C=0，$$

去分母，得一元二次方程

$$Ay^2+Cy+B=0。$$

如将方程

$$Aa^{2f(x)}+B(ab)^{f(x)}+Cb^{2f(x)}=0 \quad ③$$

的两边，同除以$b^{2f(x)}$，得

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+C=0。\quad ④$$

令 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$，用$y$代换方程④中的$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$，得

$$Ay^2+By+C=0。$$

解对数方程的方法　在对数符号里含有未知数的方程，叫做对数方程。它的解题思路是将解对数方程问题逐次化成解代数方程问题，由于对数方程中的真数必须大于零，底数大于零且不等于1，所以在变形中常使未知数的允许值范围扩大或缩小，导致增根或失根。因此解对数方程必须验根，去掉增根，并找回失根。解对数方程的常用解法有：

（1）同底对数法　把对数方程化成$\log_a f(x)=\log_a g(x)$的形式，根据同底的对数相等，则真数相等的性质，将对数方程转化为代数方程$f(x)=g(x)$。解此代数方程，经验根，可得原方程的解。

（2）指数式法　把对数方程化成$\log_{g(x)}f(x)=n$的形式，根据对数定义，得代数方程$[g(x)]^n=f(x)$。解之，并验根，可得原方程的解。

例　解方程

$$\log_{2x+1}x^2=2。\quad ①$$

可由原方程，得

$$(2x+1)^2=x^2。\quad ②$$

解之，得 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{3}$。验根知$x_1=-1$是增根，舍去。$x_2=-\frac{1}{3}$是原方程的根。增根的原因是由①到②未知数允许值范围扩大了。方程①中的$2x+1$必须为正，且不等于1，而方程②中的$2x+1$可以为负，也可等于1。由②解得$x_1=-1$，恰使$2x+1$为负，所以产生了增根。如果将原方程变形为

$$\log_{2x+1}x=1,\qquad ③$$

得代数方程$2x+1=x$，解得$x=-1$（舍去），这就失去了原方程的根$x=-\frac{1}{3}$。失根的原因是由①到③未知数允许值的范围缩小了，在$2x+1>0$且$2x+1\neq1$的前提下，①中的x可以为负，而③中的x不能为负，这就导致了失根。这种变换应慎重，由①应变化为$\log_{2x+1}|x|=1$就不会失根了。

（3）换元法　把对数方程中含有未知数的对数式，用辅助未知数表示，使对数方程变形成代数方程，这就是解对数方程的换元法。用换元法解对数方程，必须先将方程中含有未知数的不同底的对数式，用换底公式$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$换成同底对数式，然后再换元。

例　解方程

$$2\sqrt[3]{2\log^2_{16}x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0。$$

解　由换底公式，得

$$\log_{16}x=\frac{\log_2 x}{\log_2 16}=\frac{\log_2 x}{4}。$$

代入原方程，得

$$\sqrt[3]{\log_2^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0。$$

令$\sqrt[3]{\log_2 x}=y$，换元得

$$y^2-y-6=0。$$

最后得方程的根为

$$x_1=2^{27},\quad x_2=2^{-8}。$$

解数学选择题的方法　数学选择题是客观性试题。它是由条件（题干）和若干个判断性结论（题支）组成。选择题有两种类型，一种是单项选择题，题支中只有一个结论是正确的；另一种是多项选择题，题支中的结论不止一个正确。解选择题不要求表述得出结论的过程，只要求利用各种思维方式迅速正确地作出选择。解单项选择题的常用方法有：直接推演法，特殊化判断法，淘汰法，代入验证法，逆推尝试法，图象观察法等。

（1）直接推演法　是直接从题设条件出发，通过推理运算，得到供选择结论中的某一结果，从而作出正确选择的一种方法。

例1　若$0<a<1$，$ab>1$，则$\log_a\frac{1}{b}$，$\log_a b$，$\log_b\frac{1}{b}$这三个数之间的大小关系是（　）。(A)$\log_a\frac{1}{b}<\log_a b<\log_b\frac{1}{b}$；(B)$\log_a b<\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$；(C)$\log_a b<\log_a\frac{1}{b}<\log_b\frac{1}{b}$；(D)$\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}<\log_a b$。

分析　由$0<a<1$，$ab>1$，得$b>\frac{1}{a}>1$。$\log_a\frac{1}{b}=\log_a 1-\log_a b=-\log_a b>0$，$\log_b\frac{1}{b}=\log_b 1-\log_b b=-1$，$\log_a b<\log_a\frac{1}{a}=$

-1，所以$\log_a b<\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$。

这种方法常用于解如下方面的选择题：函数性质的研究，充要性的探讨，算式的计算，图形的面积、体积、距离、夹角的计算，曲线方程的探求和有关计算等。

（2）淘汰法　亦称筛选法，又叫排除法，还叫剔除法。对于单项选择题，可根据题设条件与各选项的关系，逐个淘汰与条件矛盾的选项，也可利用选项之间的蕴涵关系或等价关系，淘汰部分选项。排除所有错误的选项，最后剩下的一个选项，就是正确的答案。常用的淘汰法有，缩小范围淘汰法，蕴涵关系淘汰法，等价关系淘汰法等。

1）缩小范围淘汰法　利用题设条件的特点，推出正确结论的范围；排除此范围以外的选项，剩下的一个选项，就是正确的答案。

例2　图1上画出了复平面上的几个数，那个圆是圆心在原点的单位圆，这些数当中有一个是F的倒数，哪一个是？$(A)A$；$(B)B$；$(C)C$；$(D)D$；$(E)E$。

分析　设$F=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

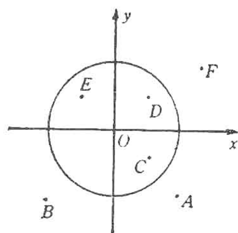


图1

则$\frac{1}{F}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{r}$〔$\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$〕。图中$F$在单位圆外，故有$r>1$，于是得$\frac{1}{F}$的模的范围$0<\frac{1}{r}<1$。因而可排除$A$、$B$两点。又从图中看出$F$的幅角主值$\theta$为锐角，所以$\frac{1}{F}$的幅角主值$-\theta$为负锐角（范围），因而可排除$D$、$E$两点，最后只剩下正确的结论$C$点。

2）蕴涵关系淘汰法　对于单项选择题，如果由一个选项A的成立，可以推出另一个选项B也成立，则可淘汰选项A。

例3　若$M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{y|y=x+1,\ x\in M\}$，则M与N的关系是(　　)。$(A)M\subset N$；$(B)M=N$；$(C)M\neq N$；$(D)M\supset N$。

分析　如果选项(A)与(D)成立，则选项(C)一定成立，故应淘汰(A)和(D)。由条件知M与N有不同元素，故应淘汰(B)。因此选(C)。

3）等价关系淘汰法　对于单项选择题，如果有两个选项A和B是等价关系，即A真B亦真，B真A亦真。则可淘汰A和B两个选项。

例4　如果$0<a<b<1$，那么能成立的不等式是(　　)。$(A)-\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$；$(B)\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；$(C)-\frac{1}{a}<$

$-\frac{1}{b}$；$(D)-b>-a$。

分析 选项(A)和(B)是等价关系，因此淘汰(A)和(B)。只需在(C)和(D)中选其一，显然选(D)。

4）特例淘汰法 亦称反例淘汰法。通过举出适合条件，而使选项不成立的例子，逐一淘汰不适合条件的选项。

例5 如果凸$n(n\geqslant 3)$边形F的所有对角线都相等，则有（ ）成立。(A) $F\in$\{四边形\}；$(B)F\in$\{五边形\}；$(C)F\in$\{四边形\}$\cup$\{五边形\}；$(D)F\in$\{边长相等的多边形\}$\cup$\{内角相等的多边形\}。

分析 因为正五边形的所有对角线相等，所以淘汰(A)。因为长方形的对角线相等，所以淘汰(B)。因为等腰梯形的对角线相等，所以淘汰(D)。故应选(C)。

对于直接计算较繁琐，或直接验证有困难的选择题，常利用淘汰法。利用淘汰法有时不能一次全部排除不正确的选项，那么可以逐步排除，直至剩下唯一正确的选项。运用排除法的关键在于发现矛盾、排除矛盾。

（3）代入验证法 简称验证法，又叫逆证法，还叫猜测验证法。其具体含义是：把可能成立的选项，代入适合条件的值或式进行验证，从而作出正确的选择。

例6 一个凸多边形，除一内角外，其余内角之和是2570°，则这一内角的度数是（ ）。$(A)90°$；$(B)105°$；$(C)120°$；$(D)130°$。

分析 因为凸多边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$，所以内角和可被9整除。被9整除的数的性质是：各位数字之和可被9整除。因为2570的各位数字之和是14，所以只需选出数字之和为4的选项(D)进行验算。经验算$2570°+130°=(17-2)\cdot 180°$，故选$(D)$。

对于方程和不等式的选择题，常用此法。特别其解是有限的情况，更能收到较好的效果。

（4）特殊化判断法 就是根据题目条件特点，通过对特殊状态的考察，判断一般结论的正确性，从而选出正确的选项。常用的特殊化判断法有：特殊值法，特殊点法，特殊图形法等。

1）特殊值法 在题设条件允许的范围内，选取特殊值代入验算，从而作出正确的判断。

例7 若$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，则$2^{|\log_2|\sin\theta||}$可化简为（ ）。$(A)-\sin\theta$；$(B)\sin(\theta-\pi)$；$(C)-\csc\theta$；$(D)\csc(\pi-\theta)$。

分析 在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$中取$\theta=\frac{7\pi}{6}$，代入$2^{|\log_2|\sin\theta||}$中得2，代入各选项中得$(A)\frac{1}{2}$；$(B)\frac{1}{2}$；$(C)$ 2；$(D)-2$。故选(C)。

2）特殊点法 是取特殊位置的点，进行检验，作出判断的方法。

例9 $A(a,b)$，$B(c,d)$是直线$y=kx+m$上的两点，那么这两点的

距离$|AB|$等于（　　）。
(A) $|a-c|\cdot\sqrt{1+k^2}$；(B) $|a-c|\cdot(1+k^2)$；(C) $|a-c|\cdot k$；(D) $\frac{|a-c|}{\sqrt{1+k^2}}$。

分析　因为题设与结论中的字母具有一般性，因此取字母的特殊数值仍能成立。取直线方程的特例为 $y=x$（其中 $k=1$，$m=0$），取这直线上两特殊点为 $A(0,0)$，$B(1,1)$（其中 $a=b=0$，$c=d=1$）。代入验算，显然 $|AB|=\sqrt{2}$。代入(A)中得$\sqrt{2}$，代入(B)中得2，代入(C)中得1，代入(D)中得$\frac{1}{\sqrt{2}}$，故选(A)。

3）特殊图形法　是对变化着的图形，选一特殊情形进行判断的方法。

例10　设函数$y=f(x)$有反函数，则函数$y=f(x)$与$y=-f^{-1}(-x)$的图象的对称关系是（　　）。(A)关于y轴对称；(B)关于原点对称；(C)关于直线$y=x$对称；(D)关于直线$y=-x$对称。

分析　取特殊函数$f(x)=2x+1$，则$-f^{-1}(-x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$。作$y=2x+1$和$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$的图象，

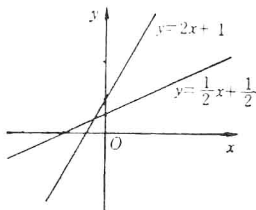


图 2

从图象看(A)、(B)、(C)都不正确，故应选(D)。

对于带有普遍性结论的选择题，一般地宜用特殊化判断法来解决。用此法解选择题时，必须细心观察，善于分析，选取适当的特殊值、特殊点和特殊图形，才能迅速地得到正确的答案。

（5）图象观察法　是利用图象或几何图形，对照各选项作出判断的方法。

例11　对于每个实数x，若$f(x)$是$4x+1$、$x+2$和$-2x+4$三个函数中的最小值，那么$f(x)$的最大值是（　　）。(A)$\frac{1}{3}$；(B)$\frac{1}{2}$；(C)$\frac{2}{3}$；(D)$\frac{8}{3}$。

分析　作$y=4x+1$、$y=x+2$、$y=-2x+4$的图象，则粗黑线就是$f(x)$的图象。显然M点的纵坐标就是$f(x)$的最大值。解方程组

$$\begin{cases} y=x+2, \\ y=-2x+4, \end{cases}$$

得$y=\frac{8}{3}$。因此选(D)。

对于函数和方程的选择题，常用此法解决。借助直观，确定正确的选项。

在选择题的求解过程中，有时可以用某一方法单独完成，但更多的问

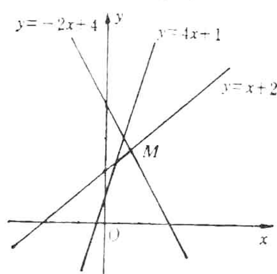


图 3

题要几种方法配合使用，才能迅速准确地作出选择。

对于多项选择题，因为供选择的结论不止一个正确，所以一般不宜采用特殊化判断法和淘汰法。应视具体情况，采用直接推演法或其他方法。

数学方法 科学方法的一种。它是把客观事物的状态、关系及过程用数学语言表述出来，进行推断、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的一种方法。它既具有一般科学方法的特征，又具有横向移植的特征。在整个科学领域中有着广泛的应用。数学方法渗透到一切科学领域，与各学科的具体方法相结合，进一步揭示各门学科的研究客体的本质与发展规律。现代科学中，运用数学的程度，已成为衡量一门科学的发展程度，特别是其理论成熟与否的重要标志。

数学方法的另一含义是指数学本身的一些方法。

数学观察 数学中的基本方法之一。它是人们有目的、有计划对数学对象的视觉感知。

例 设u是正奇数，求方程 $4u=x^2+y^2+z^2+w^2$ 的正奇数解的数目。

分析 由于u的一般性，一下子很难求出问题的解。为了找出问题的解，可对一些特殊的u值进行考察。取$u=$ 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，得下表

u	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
正奇数解数目	1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31

仔细观察上表，就会发现正奇数解数目与u之间的关系，从而得到猜想：正奇数解的数目等于u的因子和（重因子只加一次）。

数学观察在数学中有着广泛的应用，它能帮助人们理解数学，发现数学定理，检验数学猜想，解决数学问题。数学观察常见的途径有图示、列表、计算、实验。在观察过程中应做到如下几点：①明确观察的目的；②充分调动大脑储存的有关信息，从而使观察有明确的计划性。③对观察对象来讲，应将其作多种形式的变化；④要善于从联系中进行观察，从比较中发现对象的特征。

数学猜想 依据某些已知事实和数学知识。对未知的量及其关系所作出的一种似真的推断。它既有一定的科学

性，又有某种假定性。它的真伪性，一般说来，是难以一时解决的，它是数学研究的一种常用的科学方法，又是数学发展的一种重要的思维形式。

提出数学猜想的方法大体有如下几种：

（1）不完全归纳法 比如，哥德巴赫猜想就是用这种方法提出的。哥德巴赫首先发现对于较小的自然数，把一偶数拆成若干组两个奇数的和，其中至少有一组是两个奇素数之和。例如，$6=3+3$，$10=3+7$，$28=5+23$等，于是猜想：所有每个大于4的偶数都可表示为两个奇素数之和。提出数学猜想，不仅可在一些具体计算的基础上概括出来，而且还可在某些特殊的理论推断的条件下确立起来，比如，已知$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$（a，b，x，y均为正实数），易证$ax+by\leqslant 1$成立。同样，已知$a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$（a,b,c,x,y,z均为正实数），可以证明$ax+by+cz\leqslant 1$。基于前面两个推断，可提出如下猜想：已知$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=1$，$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=1$（$a_1,a_2,\cdots,a_n$，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$均为正实数），则$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$成立。利用不完全归纳法提出数学猜想，也还有时是在某些实验事实的启发下形成的。例如，在场站设置的实际问题中，人们归结出这样一个数学问题：对于平面上的已知n个点，把这n个点连结起来，如何连线才能使其总长度最短？为了解决这个问题，人们曾想到用物理模拟的方法。先选定一块大小适当的细铁丝网，并在给定的n个点的位置上各插一大头针，然后把它放在肥皂水里，最后再轻轻地将铁丝网取出。这时，如果从垂直于铁丝网的方向看去，便可清楚地看出铁丝网上形成一些网状线，而且从具体测定发现这些线与线之间的结点角（从某一点出发的射线间的夹角称为关于这一点的结点角）不小于120°。过去有人把这个实验称之为"皂膜实验"。在这个实验的展示下，人们提出"在一个平面上n点连线总长度最短时其连线间的结点角皆不小于120°"的猜想。当$n=3$时，可以证明此推断中的条件是充分必要的。但对于$n>3$时，其条件仅是必要的，至于充分条件至今尚未找到。

（2）类比法 我们知道，在平面几何中，一个三角形的任意二边之和必大于第三边，人们在反复计算试验的基础上，并在上述事实的启发下，类似地提出了如下猜想：如果x，y为大于1的自然数，则$\pi(x)+\pi(y)\geqslant\pi(x+y)$其中$\pi(x)$，$\pi(y)$和$\pi(x+y)$分别表示不超过$x$，$y$和$x+y$的素数的个数。这个猜想正确与否，至今没有结论。

（3）减弱定理条件法 例如，古希腊欧几里得证明了"素数有无穷多个"这一定理之后，人们通过减弱这个定理的条件又提出种种猜想，其中孪生素数猜想是其中一个。若p是素数，$p+2$亦是素数，则称（p，$p+2$）为一对孪生素数，如，3，5；5，7；11，13；101，103等都是孪生素数。人们对素数加以限制，提出"孪生素数有无穷多个"的猜想，是前述定理条件的减弱而得，这一猜想

至今尚未定论。类似地，后来人们又提出了所谓三生素数（p，$p+2$，$p+4$）有无穷多个的“三生素数猜想”等等。

（4）从猜想到猜想　在数学中，有些猜想长期不能肯定正确与否，对这类猜想有时可先假定其正确性，然后在这个假定的基础上再提出新的似真推断，从而从已有的猜想又提出了新的猜想。例如“孪生素数有无穷多个”是一个猜想，“三生素数有无穷多个”也是一个猜想，人们在假定这两个猜想是正确的前提下，进而提出“n 生素数猜想”。

判定数学猜想的方法　有如下几种常用方法：

（1）反例法　对于一个可判定命题，要么证明它正确，肯定它；要么证明它是不成立的，否定它。对某个数学猜想，如果能举出一个反例，那么该数学猜想便被否定了。例如，1664年法国数学家费马研究了形如 $f(n)=2^{2^n}+1$ 的数，并发现当 $n=0,1,2,3,4$ 时，分别有 $f(0)=3$，$f(1)=5$，$f(2)=17$，$f(3)=257$，$f(4)=65537$ 均为素数。据此，费马猜想：对任何自然数 n，形如 $f(n)=2^{2^n}+1$ 的数都是素数。但是，1732年欧拉举出了 $f(5)=2^{2^5}+1$ 是合数这一反例，从而否定了费马猜想。

（2）逐次逼近法　数学猜想中有不少是世界著名难题，对于这些世界难题，人们常常设法先证明它的一种减弱命题，然后一步一步地向它逐渐逼近。例如，对于哥德巴赫猜想的研究就是采取这样的步骤。1920年，挪威数学家布龙迈出了重要的一步，他首先证明了每个充分大的偶数都可表示为素因子的个数不超过9的两个正整数之和，记为偶数=（9＋9），然后逐步缩小范围。1924年，德国数学家拉德马哈证明了偶数＝（7＋7）；1932年，英国数学家爱斯特曼证明了偶数=（6＋6）；1938年，苏联数学家布赫斯塔勃证明了偶数=（5＋5）；1940年，布赫斯塔勃又证明了偶数=（4＋4）；1950年，苏联数学家维诺格拉多夫证明了偶数=（3＋3）；1957年，我国数学家王元证明了偶数=（2＋3）；1962年，我国数学家潘承洞证明了偶数=（1＋5）；同年，王元和潘承洞证明了偶数=（1＋4）；1965年，布赫斯塔勃、维诺格拉多夫和朋比科都证明了偶数=（1＋3）；1966年，我国数学家陈景润证明了偶数=（1＋2）。如果再能证明偶数=（1＋1），那么哥德巴赫猜想就解决了。

（3）机械化证明　对有些猜想亦可借助电子计算机给予证明。例如，著名的“四色猜想”就是这样解决的。1840年，德国数学家麦比乌斯提出如下猜想（即四色猜想）：在平面上或球面上画地图，只要有四种颜色就能保证相邻区域不用同一颜色。1976年，由美国数学家阿佩尔、哈肯和考西，利用高速电子计算机花了1200多个小时证明了这一猜想。这时“四色猜想”就转为“四色定理”。

（4）其它方法　判定数学猜想还有其它一些方法。有时可借助于等

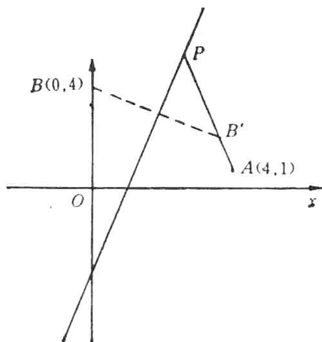
价命题来研究，比如，1934年，为了证明“连续统假设”，谢尔品斯基曾列举了十二个与它等价的命题；也有时为了证明某一数学猜想，先证明它的可判定性问题，如果已经证明其为不可判定命题，然后再寻找其它解决途径。

数学猜想的作用　数学猜想对数学发展有着积极的推动作用。这不仅因为它在建立和发展数学理论的过程中，起着“桥梁”的作用，假若某个猜想最后被证明是正确的，那么它就转化为数学理论，从而丰富了数学成果。而且还因为有时即使一个猜想并未最后解决，但却在研讨的过程中获得一些新的、其它方面的成果，同样也丰富了数学的内容。伟大的数学家牛顿曾说过：“没有大胆的猜测就作不出伟大的发现。”著名数学家、教育家波伊亚也说：“数学事实首先是被猜想，然后是被证实”，并又指出：“对视野广阔的哲学家来说，所有聪明才智的获得往往是通过猜想游戏的。在科学中，同在日常生活中一样，当面临新情况时，我们就从某个猜想开始。”由此看来，猜想可以激发人们对数学的兴趣，产生求知的欲望，从而获得探求知识的方法。猜想可以启迪人们去探索知识的奥秘，从而培养思维能力，特别是培养人们的发散性的思维能力。因此在数学教育过程中，强化数学猜想教育，是培养人们创造思维，发现问题、分析问题和解决问题的一个重要途径。

数形结合法　在一个数学问题中，同时借助于解析方法和几何方法，以达到解题目的的一种方法。

例　在直线 $3x-y=1$ 上求一点，使它到 $A(4,1)$、$B(0,4)$ 的距离之差的绝对值最大，并求其最大值。

分析　如图所示。将位于直线两



侧的点化为同侧来考虑，即作 B 的关于直线的对称点 B'。由平面几何知识易知，这时所要求的 P 点即为同侧两点 A、B' 的连线与已知直线的交点。借助几何方法探明了解题思路之后，再用代数方法进行具体的计算。为此先求点 $B(0,4)$ 关于直线 $3x-y=1$ 的对称点为 $(3,3)$，再求出 AB' 的方程为 $2x+y-3=0$。将该方程与已给定的直线方程 $3x-y=1$ 联立，则得 P 点的坐标为 $(2,5)$。其最大值为 $\sqrt{5}$。

若对上面的问题仅从解析方法考虑，则解法甚繁，而将数形结合起来考虑，解法很简洁。因此在解题过程中若能多灵活地综合运用一些方法，可以简捷地达到解题的目的。

数形转化法　将数的问题转化为形的问题，或形的问题转化为数的问题的方法。例如，复数法、坐标法、向量

法、图象法等都是数形转化法。

数学归纳法 证明与数的无限集合特别是正整数集合有关的命题的一种方法。其常见形式有：第一数学归纳法、第二数学归纳法、反向数学归纳法和二重数学归纳法。

第一数学归纳法的理论根据是皮亚诺公理的第五条——数学归纳原理：任何一个自然数集合A，如果

（1）′ $1\in A$；

（2）′ 若某个自然数属于A，则紧跟在它后面的自然数也属于A。

那么，A和整个自然数集合$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$相等。

第一数学归纳法 设$P(n)$是依赖于自然数n的命题。如果

（1）$P(n)$当$n=1$时成立；

（2）在$P(k)$成立的假定下，可以证明$P(k+1)$成立。

那么，$P(n)$对任意自然数n皆成立。

证明 由A表示使命题$P(n)$成立的自然数集合，则由（1）知$1\in A$，且由（2）知$k\in A\Rightarrow k+1\in A$，故$A$满足条件（1）′、（2）′，所以$A$＝自然数集$N$，即$P(n)$对任意自然数$n$皆成立。

用第一数学归纳法证明问题需完成下述两个步骤：

第一步 证明当$n=1$时，$P(1)$成立；

第二步 假设当$n=k$时，$P(k)$成立，借此推证$n=k+1$时，$P(k+1)$亦成立。

之后，便可断言：此命题$P(n)$对一切自然数n皆为真。

例1 试证$1^2+2^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ①$$

对一切自然数n都成立。

证明 第一步，当$n=1$时，左边$=1^2=1$；右边$=\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)=1$ $\therefore n=1$时，①式成立。

第二步，假设$n=k$时，①式成立，那么，当$n=k+1$时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=(1^2+2^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3),$$

即$n=k+1$时，①式亦成立。

综上可知，对任意自然数n，①式皆成立。

数学归纳法的第一步是奠基步骤，是命题立论的基础；第二步是归纳步骤，是判断命题的正确性能否由特殊推广到一般。二者缺一不可。事实上，如果只有奠基步骤，而无归纳步骤，那就属于不完全归纳法，因而论断的可靠性就得不到保证。例如，当$n=1,2,3,4,\cdots,9,10$时恒有$\frac{n^{1000}}{2^{n-1}}\geqslant 1$，可否由此就断言“对一切自然数$n$，都有$\frac{n^{1000}}{2^{n-1}}$

$\geqslant 1$”呢？不能。因$n=20001$时，有$\frac{20001^{1000}}{2^{2000}}<1$。同样，如果只有归纳步骤，而无奠基步骤，则归纳步骤的假定就失去了依据，从而使这一步的证明失去了意义。当然，由此也就不能保证所推论断的真。例如，证明$n^2+(n+1)^2$可被4整除。为此，设$n=k$时，命题正确，则当$n=k+1$时，$n^2+(n+1)^2=(k+1)^2+(k+1+1)^2=k^2+(k+1)^2+4(k+1)$，显然亦被4整除，即命题真，但这并不表明上述命题确是真的。因$n^2+(n+1)^2$恒为奇数，它不可能被4整除。以上证明错误的原因在于没验证$n=1$的情况。

应用第一数学归纳法解题，不一定都从自然数1开始，只要从问题所涉及数的最小值开始即可。经此一般化变形的数学归纳法程序如下：

设$P(n)$是依赖于自然数n的命题，如果

（1）″ $P(n)$对某自然数n_0成立；

（2）″ 在$P(k)(k\geqslant n_0)$成立的假定下，可以证明$P(k+1)$成立。

那么，$P(n)$对任意自然数$n\geqslant n_0$有$P(n)$为真。

例2　求证n边形（$n\geqslant 3$）之n个内角之和等于$(n-2)\pi$。

证明　当$n=3$时，命题是正确的。假设当$n=k$（$k\geqslant 3$）时，命题为真，现在来考察$n=k+1$时的情况。设$A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$是$k+1$边形的顶点。作线段$A_1A_k$，它把这个$k+1$边形分成两部分：$k$边形$A_1A_2\cdots A_k$和三角形$A_kA_{k+1}A_1$。显然，$k+1$边形内角之和$=A_1\cdots A_k$内角和$+A_kA_{k+1}A_1$内角和$=(k-2)\pi+\pi=[(k+1)-2]\pi$。故命题在$n=k+1$时亦真。因而综上知，对任意$n\geqslant 3$，$n$边形内角和等于$(n-2)\pi$。

数学归纳法有着广泛的应用，如可以用它来研究排列和组合的公式、差分方程，严格地证明一些代数恒等式、不等式等等。

在用数学归纳法解题时，既要注意奠基步骤的验证，又要关键处理好归纳步骤。在由k到$k+1$的递推过程中，要注意针对不同的问题，灵活运用添加项、拆项、换元、一般化等多种技巧。问题在$k+1$和k两种情形于结构上的一致对于论证的顺利进行有时起着十分重要的作用。奠基、归纳两步完成以后，不要忘记最后下一个总结归纳性的结论。

第二数学归纳法又叫做串值归纳法，它的依据是最小数原理（又称自然数的良序原则）。现将这一原理叙述如下：自然数的非空集合A中一定含有最小者，即A中存在一个自然数a，使对于A中任意x，均有$a\leqslant x$。

此原理可如下证明：在集合A中任取一自然数m。由于从1到m共有m个自然数，所以集合A中不超过m的数最多有m个。在这不超过m的有限个数中必有一最小的，记为a，于是显然a便是A中最小者。

第二数学归纳法　设$P(n)$是依赖自然数n的命题，如果

（1） $P(n)$当$n=1$时成立；

（2） 在$P(m)$对于所有适合$1\leqslant m\leqslant k$的自然数m成立的假定下，可以证明$P(k+1)$成立。

则$P(n)$对任意自然数n成立。

证明　假定$P(n)$不是对所有自然数都成立，则使$P(n)$不成立的那些n所成的集合A非空。由最小数原理，A中必有最小数，记为a。依(1)知$P(1)$成立，$\therefore 1\notin A$，即$a\neq 1$。从而必有$k\in N$满足$a=k+1$ $(k\geqslant 1)$。这就表明，有一自然数k，使得$P(m)$ $(1\leqslant m\leqslant k)$成立，而$P(k+1)$即$P(a)$不成立，这与(2)矛盾。故$P(n)$对任意自然数$n$成立。

当然，由于很明显第二数学归纳法的条件包含了第一数学归纳法的条件，因此由第一数学归纳法亦可推出第二数学归纳法。

用第二数学归纳法证题包含以下二个基本步骤：

第一步　证明当$n=1$时，$P(n)$成立；

第二步　假定当$1\leqslant n\leqslant k$时，$P(n)$成立，证明当$n=(k+1)$时，$P(n)$亦成立。

之后便可断言：$P(n)$对任意自然数n皆真。

例3　证明对于任意的自然数n，$n+1$可被一素数整除。

证明　当$n=1$时，$n+1=2$能被素数2整除，命题成立；假设$k<n$时，$k+1$能被一素数整除，则对$n+1$，要么它本身是素数，要么它是合数，而能被形如$k+1$的数整除，其中$k<n$。但根据归纳假设，$k+1$能被一个素数整除，该素数也就整除$n+1$。根据第二数学归纳法，命题得证。

应用第二数学归纳法证明对于一切自然数n都成立的命题时，如果归纳假定是在$n\leqslant k$ $(k\geqslant r)$的条件下作出的，那么在第一步中必须验证$n=1,2,\cdots,r$时命题的真实性。否则，即使第二步已证出，仍不能保证命题的正确性。

例4　已知递推公式

$$a_{k+1}=2a_k+3a_{k-1}\ (k\geqslant 2), \quad ①$$

且$a_1=1$，$a_2=7$，试证

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}+(-1)^n\ (n=1,2,\cdots)。\quad ②$$

证明　第一步　当$n=1,2$时，由②得

$$a_1=2\cdot 3^0+(-1)=1,$$

$$a_2=2\cdot 3^1+(-1)^2=7,$$

所以命题此时成立。

第二步　假设当$n\leqslant k$ $(k\geqslant 2)$时命题成立，那末，当$n=k+1$时，依①式和归纳假定，有

$$a_{k+1}=2a_k+3a_{k-1}$$

$$=2\cdot 3^{[(k+1)-1]}+(-1)^{k+1}。$$

这就表明，当$n=k+1$时，命题也成立。

综上可知，对任意自然数n，②恒成立。

利用第二数学归纳法解题时，要根据具体问题的情况，把第一步与第二步结合起来考虑。根据第二步的需要，确定第一步所验证情况的多少。在此顺便指出，从理论上可以证明，数学归纳原理、第一数学归纳法、最小数原理、第二数学归纳法以及下述的反向归纳法皆是彼此等价的。

反向归纳法　亦称逆向或倒推归纳法，其含义是：设$P(n)$是依赖于自然数n的命题，如果

(1)有无穷多个自然数使$P(n)$成立；

（2）在 $P(k+1)$ 成立的假定下，可以推出 $P(k)$ 成立。

那么，对任意自然数 n，$P(n)$ 恒成立。

证明 假设归纳法的条件满足，而 $P(n)$ 不是对所有的自然数 n 皆成立，记使 $P(n)$ 不成立的那些 n 所成的集合为 A，则 A 非空。任取 $a\in A$，据条件知，必有 $b>a$，使 $P(b)$ 成立。以 B 记这种 b 所成集合，则其中存在最小数，设为 m。由归纳条件，$P(m-1)$ 成立。若 $m-1>a$，则与 m 的取法矛盾；若 $m-1=a$，则与 $P(a)$ 不成立矛盾。故 A 应空，即 $P(n)$ 恒成立。

用反向归纳法证题的步骤为:

第一步 证明有无穷多个自然数使 $P(n)$ 成立；

第二步 假设当 $n=k+1$ 时，$P(k+1)$ 成立，证明 $P(k)$ 亦成立。

之后，便可断言，$P(n)$ 普遍成立。

例5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数，求证

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}。\qquad ①$$

证明 可以用第一数学归纳法证明，当 $n=2^m$（$m=1,2,\cdots$）时，①式成立。这就完成了第一步的证明。下面证第二步。

假设当 $n=k+1$ 时，①式成立，即有

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geqslant(a_1\cdots a_k a_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}。$$

令 $A_k=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$，

那么有

$$A_k=\frac{kA_k+A_k}{k+1}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+A_k}{k+1}$$

$$\geqslant(a_1a_2\cdots a_kA_k)^{\frac{1}{k+1}}。$$

上式两边乘方 $k+1$ 次，得

$$A_k^{k+1}\geqslant a_1\cdots a_kA_k,$$

即 $A_k^k\geqslant a_1a_2\cdots a_k$，

从而

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\geqslant(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}。$$

综上可知，①式普遍成立。

数学归纳法可推广到 n 重情形，下述二重数学归纳法即为其一例。

二重数学归纳法 设有依赖于两个独立自然数 m、n 的命题 $P(m,n)$，如果

（1）$P(m,1)$ 及 $P(1,n)$ 对所有的 m、n 成立；

（2）对任意自然数 k、l，假设 $P(k+1,l)$ 及 $P(k,l+1)$ 成立，能推出 $P(k+1,l+1)$ 亦成立。

则，$P(m,n)$ 对任意自然数 m、n 皆成立。

证明 把 $P(m,n)$ 的全部命题排列为一个无穷方阵，有

$$\begin{matrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,l) & P(1,l+1) & \cdots \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,l) & P(2,l+1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots \\ P(k,1) & P(k,2) & \cdots & P(k,l) & P(k,l+1) & \cdots \\ P(k+1,1) & P(k+1,2) & \cdots & P(k+1,l) & P(k+1,l+1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

由（1）可知，第一行和第一列的所有命题皆成立。

由（2）可推出第二行所有命题皆成立，即$P(2,n)$对任意自然数n都成立。事实上，由（1）知$P(2,1)$成立。假设$P(2,l)$成立，由（1）知$P(1,l+1)$成立，依（2）由$P(2,l)$和$P(1,l+1)$真可推出$P(2,l+1)$的真，即$P(2,l)$成立可推出$P(2,l+1)$成立。故由第一数学归纳法，$P(2,n)$对一切n皆真。

同样可以证明$P(3,n)$对任意自然数n皆成立。一般地，可以证明$P(k,n)$对任意n成立，其中$k=1,2,\cdots$。总上所述$P(m,n)$恒真。

用二重归纳法证题时，包括以下两个基本步骤:

第一步　证明$P(1,n)$、$P(m,1)$恒真；

第二步　假设$P(k+1,l)$、$P(k+1,l+1)$真，推出$P(k+1,l+1)$亦真。

之后，便可断言，$P(m,n)$普遍成立。

例 6　设m、$n\in N$，求证不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m \quad ①$$

的非负整数解的组数为

$$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}。\quad ②$$

证明　第一步　当$m=1$时，①成为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1。\quad ③$$

显然，③的非负整数解为

$(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,0,\cdots,1)$。

共有n组。而$\frac{(1+n-1)!}{1!(n-1)!}=n$，所以$P(1,n)$成立。

当$n=1$时，②成为

$$x_1=m。\quad ④$$

显然，此时④仅有一组解，而

$$\frac{(m+1-1)!}{m!(n-1)!}=1,$$

所以$P(m,1)$亦恒成立。

第二步　假设$P(k+1,l)$和$P(k,l+1)$成立，即假设不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_l=k+1 \quad ⑤$$

的非负整数解的组数为

$$\frac{(k+l)!}{(k+1)!(l-1)!}。$$

不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_l+x_{l+1}=k \quad ⑥$$

的非负整数解的组数为

$$\frac{(k+l)!}{k!l!}。$$

现在来考察不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_l+x_{l+1}=k+1 \qquad ⑦$$

的非负整数解的组数。上述方程可分两类:

（1）当 $x_{l+1}=0$ 时，⑦变为⑤，所以⑦满足 $x_{l+1}=0$ 的非负整数解的组数为

$$\frac{(k+l)!}{(k+1)!(l+1)!}。$$

（2）当 $x_{l+1}>0$ 时，令 $x_{l+1}=x'_{l+1}+1$（$x'_{l+1}\geqslant 0$），则方程⑦变为

$$x_1+x_2+\cdots+x_l+x'_{l+1}=k。 \qquad ⑧$$

⑧与⑥实为同一方程，故⑦满足 $x_{l+1}>0$ 的非负整数解的组数为

$$\frac{(k+l)!}{k!l!}。$$

由（1）与（2）得方程⑦的非负整数解为

$$\frac{(k+l)!}{(k+1)!(l-1)!}+\frac{(k+l)!}{k!l!}$$

$$=\frac{[(k+1)+(l+1)-1]!}{(k+1)![(l+1)-1]!}。$$

这就表明，命题 $P(k+1,l+1)$ 成立。

综上可知，对任意自然数 m、n，$P(m,n)$ 成立。

历史上第一个正式使用数学归纳法的是意大利人毛罗利库斯，他在1575年《算术》中，用这个方法证明了若干结果，其中有

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2,\quad k\in Z。$$

第一个明确而清晰地阐述这个方法的是法国数学家帕斯卡(1623—1662)。他用这个方法证明了帕斯卡三角形各种性质。这个方法的名称是由英国哲学家、数学家 A·德·摩根（1806—1871）所确定的。19世纪，德国数学家格拉斯曼利用这个方法证明了自然数的加法和乘法的交换律和结合律。在此基础上，意大利数学家皮亚诺（1858—1932）为数学归纳法建立了理论基础。以后，作为一种必然的方法，数学归纳法在数学中得到了广泛的应用。

数学实验法　数学的基本方法之一。它是根据数学研究的目的以及数学对象本身的特征，人为地、模拟地创设有利于观察与思考的条件，从而把数学对象的本质与规律暴露出来的一种方法。例如，有关圆锥曲线的一些性质（焦点、抛物线等名称所反映的某些性质等），便是通过一定的物理实验得到的。这里人为设置的条件便是相应的物理实验，揭露的便是圆锥曲线的一些性质。数学实验的方法可用来发现或说明数学对象的性质及对象本身，并可用来检验所研究的数学性质或结果是否正确。圆锥体的体积等于与它等底等高的圆柱体的体积的 $\frac{1}{3}$，这一公式便是通过液体试装的实验首先确定下来，然后进行理论证明而得到的。对于一个复杂的几何图

形，可通过几何方法求出其重心，而后再用物理实验的方法对其予以验证。有些实际的数学问题是用实验的方法予以解决的。例如，在计算一个不规则的物体的体积时，可将物体放入有刻度的盛有适量水的圆柱量桶中，根据水上升的度量便可得知欲求体积。再如，在计算平面上一些曲线围成的面积时，可用透明方格纸盖上，然后通过数方格的多少，根据四舍五入的原则，便可得到问题的一个近似解。数学实验另一含义是根据其描述公式对客体和现象所作的计算。

数值代换法 把某一数值用等值的其它形式的表达式予以替换，从而解决问题的一种方法。

例 求证$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)。$$

分析 把求证的式子化为

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right),$$

用$\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$，代入上式左边，从而即得上面等式右边的形式。

数值代换法在数学中，特别在三角解题中是一个常用技巧。其中数值1的代换法不但在三角中而且在整个数学中都有广泛的应用。比如1可代换成$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$、$a^0$（$a\neq0$）、$\frac{m}{m}$（$m\neq0$）、$\lg10$、$C_n^n$、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$、$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$等等。

数学抽象方法 一种科学抽象方法。它是从考虑的问题出发，通过对各种经验事实的观察、分析、综合和比较，在人们的思维中撇开事物现象的、外部的、偶然的东西，抽出事物本质的、内在的、必然的东西，从空间形式和数量关系上揭示客观对象的本质和规律，以达到认识事物本质和规律的目的的一种数学研究方法。例如，几何中的“点”的概念是从现实世界中的水点、雨点、起点、终点等具体事物中抽象出来的，它舍弃了事物的各种物理性质，不考虑其大小，仅仅保留了其表示位置的性质。点是纯观念性的东西，它在几何中，除了表示位置外，还有其他作用，比如点的集合可构成直线、曲线、平面、空间等。再如群的概念是在一系列已有数学知识的基础上，经过较高层次的抽象而提炼出来的。由此可看出，数学抽象有三个基本特征：①有着明确的目标。它都是撇开对象的具体内容，仅仅考虑其空间形式或数量关系及其关系结构。②有着广泛的适用性。它既可应用于表征性抽象的数学概念，又可应用于原理性抽象的数学理论。③有着丰富的层次性。它既可以从现实世界客观事物中抽象，又可以在已有数学知识的基础上进行抽象，数学抽象的常用方法有理想化抽象、等价抽象、强抽象与弱抽象、存在性抽象等。进行数学抽象要注意如

下四点：①要分辨事物的真象与假象，不要被假象所迷惑，要抓住真象。②要撇开与所考虑问题无关的内容，排除掩盖事物发展普遍规律的干扰因素。③要分清主要矛盾与次要矛盾，深入事物的内部，发掘决定事物性质的基本内容。④要从基本的东西出发，把事物各种属性和关系综合起来，以完整的体系把事物的本质抽象出来。

数学定义方法　给概念下定义的方法。概念的定义是阐述概念内涵的逻辑方法。一切定义都由被定义项、定义项和定义联项三部分组成：被定义项是概念所反映的对象、是需要明确的概念。定义项是用来揭示被定义概念的内涵部分，即用来明确被定义项的概念。定义联项是用来联结被定义项和定义项的语词。例如，平行四边形是两组对边分别平行的四边形。这里，“平行四边形”是被定义项，“两组对边分别平行的四边形”是定义项，“是”为定义联项。常用的定义联项有“是”、“就是”、“也就是”、“叫做”、“称为”等。数学中常见的定义方式有下面几种：

（1）属加种差定义　其公式为

属＋种差＝被定义项。

这是数学中最常用的一种定义方式。例如，平行四边形的定义种差为“两组对边分别平行”，属为“四边形”。用属加种差定义应注意如下两点：一是要找出被定义概念的最邻近的属，二是要确定种差。对于同一对象来说，种差可能不唯一，因此，对同一概念可能有几种不同的定义。例如，平行四边形除了上面提到的定义外，还可有“一组对边且相等的四边形叫做平行四边形”、“对角线互相平分的四边形叫做平行四边形”等等。尽管一个数学概念可有多种定义，但在同一数学体系中，一般只能采用一种定义，其它可作为由定义推出的性质、定理。

（2）发生定义　它是把只属于被定义概念，而不属于其它任何事物的发生或形成的特有属性作种差的定义。例如，角的定义是这样的：平面上的射线绕它的端点旋转所成的图形。它的种差是形成角的情况，它的属概念是图形。发生定义其叙述一般都较长，但形象生动。

（3）外延定义　它是通过列举概念的全部对象来下定义。例如，整数和分数统称为有理数。一般说来，某个属概念划分后所得的各个种概念为已知时，可以用这些种概念给这一属概念下外延定义。

（4）关系定义　它是一种特殊的属加种差定义，其种差是事物之间的关系。例如，能被2整除的整数叫做偶数，这是关于偶数的关系定义，其种差是偶数与2的一种关系。

（5）约定式定义　它是根据数学上的特殊需要，通过约定的方式来下的定义。这种定义方法一般是利用意义确定的表达式，给新引入的表达式的意义作出规定，例如，为了使组合数公式 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 在 $m=n$ 时仍有意义，把“n零阶乘”的概念规定为：$0!=1$。需要指出的是，这种定义不是随便进行约定，它应符合客观规律。

（6）递归定义　它是通过递推关系式给概念下定义的。例如，定义函数$f(n)$，这里$f: N\to N$，且满足$f(1)=2$，$f(k+1)=f(k)+3k$ $(k\in N)$。这种给函数$f(n)$下定义的方法，因为其中用到了递推关系式，所以被称为递归定义。

（7）描述性定义　它是用描述性语言给概念下定义。一些原始的概念可用这种方法下定义，如点、线、面、集合等概念。

（8）隐定义　亦称公理法定义，通过一组公理来界定概念的含义，也就是说概念隐含在一组公理之中。例如，通过皮亚诺公理来规定自然数，希尔伯特在《几何基础》中通过五组20条公理来阐明几何中点、线、面等概念，再如，群、环、域等概念都是通过公理化方法来阐明的。

各种各样的定义是数学不可缺少的一部分，它在数学中起着很大的作用。具体说来，有如下两点：①定义是建立数学理论体系的前提。数学研究对象极其丰富，如果不能给每一个对象一个确切的定义，人们就很难形成关于这些对象的共同认识，也很难保证在不同的地方使用的同一概念具有相同的含义，因而也无法建立起数学理论体系。②定义有助于人类思想表达经济化、使数学变得简洁。例如，多边形相似的数学定义：边数相同的两个多边形，若它们的内角依次相等，且对应边成比例，则称两个多边形相似。在这个定义中包含了许多概念，如“顺序（依次）”“角相等边数相等”和“比例”，在这些概念中又包含了许多其它概念。对于这样一个具有如此丰富内容的概念仅用两个字“相似”就非常准确地刻划出其含义，非常经济、省事。

作出正确的定义必须遵守如下规则：①定义项的外延与被定义项的外延必须相等。例如，“等边三角形是三边都相等的三角形”，该定义的被定义项是等边三角形，定义项是三边都相等的三角形。显然，两者的外延是相等的，这是一个正确的定义。违反这条规则就要犯“定义过宽”和“定义过窄”的错误。例如，把“平行线”定义为“两条不相交的直线”，就犯了定义过宽的错误，因为定义项所确定的外延包括了异面直线。又如，把“无理数”定义为“开不尽的方根”,该定义犯了定义过窄的错误，因为π、e等也是无理数。②定义项中不能直接地或简接地包括被定义项。实质上，下定义就是用明确的定义项去明确不明确的被定义项，如果定义项直接或间接地包括了不明确的被定义项，那么被定义项仍然是不明确的，因此达不到下定义的目的。违反这条规则就犯了“同语反复”或“循环定义”的错误。例如。若用两直线成直角来定义垂直，同时又用两条直线垂直来定义直角，这样的定义就犯了循环定义的错误。③定义项一般不用否定形式。否定概念是反映事物不具有某种属性的概念，它不能指明事物具有某种属性。如果定义项中包含了否定概念，就不能达到明确被定义项的目的。例如，“无理数就是不是有理数的数”。该定义包含了否定概念，它不能揭示无理数的本质属性，也不能确定它的外延，达不到下

定义的目的。不过，数学中有些概念的内涵很贫乏，甚至只能用否定形式加以界定。这时，可采用否定形式来下定义，例如，“平行线就是在同一个平面内两条不相交的直线”。④定义应简洁。在定义中不应列举非本质属性或有多余的话。

数学美学方法　借助于数学美的特征，如简洁性、统一性、对称性、整齐性、奇异性等，以发现数学规律，提出解题思路的一种数学认识方法。例如，当人们研究了一元一次方程有一个根、一元二次方程有两个根、一元三次方程有三个根、一元四次方程有四个根之后，就提出一元 n 次方程有 n 个根的猜想。这一猜想的证实就得到了代数基本定理。人们为什么会提出一元 n 次方程有 n 个根的猜想呢？人们根据对一些特殊方程的研究，发现根的个数与未知元次数之间具有一致性，而人们对于这个一致性（即齐一性）的追求，就把对特殊问题的研究结果推广到一般问题上来。从数学规律的寻求角度来考虑，数学中各种各样的推广正是数学家追求整齐美的结果。从问题表述来看，它是数学家追求简洁美的结果。因为任何自然的推广，使问题减少了假设条件。统一性的美学方法在数学发现中同样起着重要的作用。数学家追求数学的统一性，在数学的发展史上做出了卓越的贡献。例如，克莱茵的《埃尔兰根纲领》用变换群的观点统一了19世纪发展起来的各种几何学，指出各种几何学所研究的，只不过是在相应的变换群下的一种不变量，从而为几何学的发展树立了时代的里程碑，因而得到了人们的赞美。在这里从种种性质不同的数学素材和方法中寻求统一的意向，乃是克莱茵思维方式的特点。克莱茵的这一思想方法和埃尔兰根纲领，不仅在几何发展中是一种划时代的贡献，而且还进一步导致了诸如拓扑变换下的不变性、不变量等研究方向以及一些新学科的诞生。寻找牛顿二项式 $(1+x)^n$ 展开式的系数规律，运用枚举归纳法，采用竖式乘法，经过列表，通过数学简洁、对称、整齐美的追求，从而得到了由二项式系数组成的杨辉三角形。具体过程如下：

首先求出 $(x+1)^2$。从中抽象出不含字母x的竖式乘法：

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ \times)\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1 \\ +)\ 1\ 1\ \ \ \\ \hline 1\ 2\ 1 \end{array}$$

在此基础上，继续枚举：

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 1 \\ \times)\ \ \ 1\ 1 \\ \hline 1\ 2\ 1 \\ +)\ 1\ 2\ 1\ \ \ \\ \hline 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 3\ 1 \\ \times)\ \ \ \ \ 1\ 1 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 1 \\ +)\ 1\ 3\ 3\ 1\ \ \ \\ \hline 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \end{array}$$

由上可见，每次乘以 $x+1$，因为两个系数都是1，相当于被乘式重复写一次，但向左错一位。这样一来，乘法就不需要写下去，只保留加法，把这些竖式衔接起来，得如下表（表1）：

$(x+1)$ 展式(系数)	1 1	(1)
	+) 1 1	(1′)
$(x+1)^2$展式	1 2 1	(2)
	+) 1 2 1	(2′)
$(x+1)^3$展式	1 3 3 1	(3)
	+) 1 3 3 1	(3′)
$(x+1)^4$展式	1 4 6 4 1	(4)
	+) 1 4 6 4 1	(4′)
$(x+1)^5$展式	1 5 10 10 5 1	(5)
	+) 1 5 10 10 5 1	(5′)
$(x+1)^6$展式	1 6 15 20 15 6 1	(6)
	+) 1 6 15 20 15 6 1	(6′)
$(x+1)^7$展式	1 7 21 35 35 21 7 1	(7)
……		

表 1

考察（1）、（2）、（3）、（4）、…的来龙去脉，(1′)、(2′)、(3′)、(4′)、…均可省略，再考虑其对称性表1可转化为表2：

```
1                       1 (1)
1         2             1 (2)
1      3       3        1 (3)
1  4       6       4    1 (4)
1 5    10     10     5  1 (5)
……
```

表 2

为了解决表2中越来越拥挤的问题，也为了使其整齐划一，将表2转化成表3的形式:

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
……
```

表 3

综上所述，数学美学方法在数学中占有重要的地位和具有重要的应用，它是数学发展的内驱动力，是评价数学理论的重要标准之一。在数学教学中，合理地运用数学美学方法，对学生进行数学审美教育，能够激发他们学习数学科学的兴趣，增强他们的数学发明创造能力。

数学推理方法 运用推理进行数学思维的一种方法。所谓推理，就是从一个或几个已知的判断，得出另一个新的判断的一种思维形式。例如，“若两角是对顶角，则此两角必相等，所以，若两角不相等，则此两角不是对顶角”就是数学推理，其中“若两角是对顶角，则此两角必相等”是已知判断，而“若两角不相等，则此两角不是对顶角”这一新的判断是由逆否命题等效原理推出来的。一切推理都由前提和结论组成。在推理中，由之而得出一个判断的若干判断叫做判断的前提，得出的那个判断叫做推理的结论。前提说明已知的知识是什么，结论则说明推出的知识是什么。一切推理都包括形式结构和推理内容两个方面。形式逻辑是研究推理形式结构的性质、真假情况及其规律性。数学

中的推理既要求推理形式正确，又要求推理内容符合客观实际。推理内容的真假问题由数学科学本身去解决。逻辑对推理的基本要求是：在进行推理时要合乎推理形式，遵守推理规则。根据不同的划分标准，推理可分许多类型。根据推理所表现的思维进程的方向性，可把推理分为演绎推理、归纳推理和类比推理。根据推理中前提的数目，可把推理分为直接推理和间接推理。只有一个前提的推理，叫做直接推理。有两个或两个以上前提的推理，叫做间接推理。根据推理繁简不同，推理又可分为简单推理和复合推理。复合推理是由两个或两个以上的简单推理组成的推理、数学推理方法在数学中占有重要的地位，它是寻求数学新结果，由已知推进到未知的基本方法，是解答数学问题，进行数学证明的基本工具。

数学模型方法　简称MM方法。是把所考察的问题构造相应的数学模型，通过对数学模型的研究，使问题得以解决的一种数学方法。

（1）数学模型的含义　所谓数学模型，粗略说来，乃是针对或参照某种事物系统的主要特征或主要数量相依关系，采用形式化语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构。这里所说的数学结构，有两个具体要求：首先，这种数学结构，必须是一种纯关系结构，也就是已经扬弃了一切与关系无本质联系的属性，只保留了与研究目的有关系的本质特征；其次，这种数学结构，必须是借助于数学概念和符号刻划出来的结构形式。数学模型是以现实世界中抽象出来的，是对客观事物的某些属性的一个概括的或近似的反映。

例　哥尼斯堡七桥问题。哥尼斯堡有一条布勒尔河，这条河两个支流，在城中心汇合成大河。河中间有一小岛，河上有七座桥，如图1所示。哥尼斯堡的大学生傍晚散步时，总想一次不重复地走过这七座桥。可是试来试去总是办不到，于是便写信给当时著名的数学家欧拉，欧拉想了几天，彻底解决了这一问题。欧拉是怎样解决这一问题的？欧拉是通过构造数学模型的方法予以解决的。他想，既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点，两岸的陆地也是桥梁通往的地点，那么就不妨把这四处地点抽象为数学中的点，把连接四个地点的七座桥抽象为七条线，这样抽象并不改变问题的实质。于是，人们步行过这些地点和七座桥的问题，就相当于如图2所示的一笔画问题。哥尼斯堡七桥问题是一个具体的实际问题，属于数学模型的现实原型，经过理想化抽象所得到的如图2所示的一笔画问题，

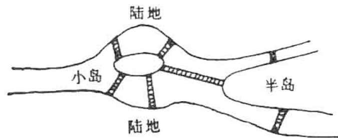


图1

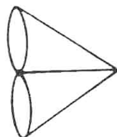


图2

便是哥尼斯堡七桥问题的数学模型。容易看出，在一笔画的模型里，只保留了与桥与地点联结的方式，而其它一切属性则全部扬弃了。所以，从总体上来说，数学模型只是近似地表现了现实原型中的某些属性，而就所要解决的实际问题而言，它是更深刻、更正确、更完全地反映着现实。也正由于此，对一笔画问题经过一定的逻辑推理，得到无解的结论之后，才可以返回到哥尼斯堡七桥问题，得出七桥问题无解的解答。

对于“数学模型”的含义，通常有广义和狭义两种解释。从广义上讲，一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式，各种函数关系、以及由公式系列构成的算法系统等等都可以叫做 MM，因为它们都是从各自相应的现实原型中抽象出来的。但按狭义的解释，只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构，像上面所举的例子，才叫做MM。在现代应用数学中，数学模型都作狭义的解释，而构造MM的目的，主要是为了解决具体的实际问题。

（2）数学模型的类型　按照不同的标准，从各个不同的角度分类，数学模型有很多类型。例如，就人们对MM的认识过程来说，可分为描述性MM和解释性MM。描述性MM是从特殊到一般，它是从分析具体客观事物及其状态开始，最终得到一个数学模型，客观事物之间的关系通过数学模型被概括为一个具体的抽象结构之中。如上面所谈的一笔画问题，便是哥尼斯堡七桥问题的描述性MM。解释性MM是由一般到特殊，它是从一般的公理系统开始，借助于数学客体，对公理系统给出正确解释的一种MM。例如，罗巴切夫斯基几何（简称罗氏几何）刚发现时，被人们认为是一种纯抽象的几何体系。这种几何体系，在逻辑上推不出任何矛盾。但与人们的直观相差甚远，与传统的看法相悖。1868年，意大利数学家 E·贝尔特拉米在近似高音喇叭，其高斯曲率为负常数的特殊曲面(伪球面)上证明了：伪球面的内蕴几何与罗氏几何是一致的，一个伪球面可以解释成罗氏几何一个平面的一部分。这就为罗氏几何提供了一个解释性的MM。在描述性MM中，如果再按数学所研究的客观对象分，又可分为明晰性MM和不明晰性MM（即模糊性MM）。在明晰性MM中，如果再按MM所相应的实体对象分，又可分为确定性MM和随机性MM；还有兼具有确定性和随机性或随机性和模糊性的混合型MM。然而从客观事物量的变化特征来分，又分为连续性MM和不连续性MM。不连续性MM又分为离散性MM和突变性MM。

（3）数学模型的构造过程及特点　本节是仅对狭义的MM而言的。一般说来，构造MM的基本过程可分如下几个步骤：首先，对所研究的实际问题即现实原型进行分析，了解问题所涉及的量的关系，弄清哪些是常量，哪些是变量，哪些是已知量，哪些是未知量，分析其对象与关系结构的本质属性，以便确定其MM的类型。其次，确定问题所涉及的具体

系统，分析系统的矛盾关系。为了使用MM方法，须考察问题所属的具体系统。在确定系统的过程中有时还须从大系统中分离出子系统来。为了建立MM，还必须从问题的特定关系和具体要求出发，根据有关的科学理论，抓住主要矛盾，考察主要因素和量的关系。再次，进行数学抽象。对事物对象及诸对象间的关系进行抽象，并利用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表现数学的对象及关系。如果现有的数学工具不够用时，可以根据实际情况，大胆创造新的数学概念和数学方法表现MM。上述三个步骤是相互联系的，其中后面两个步骤是构造MM的基本步骤。当一个数学模型被构造出之后，一般说来，还必须对其进行理论和实践的检验。所谓理论检验就是考虑理论上的表达能否真正表达现实原型的本质关系和结构；理论自身的问题是否可以解决。若达不到要求，需进一步修改MM。所谓实践的检验，就是检验MM上分析得出的理论解答能否与现实原型本质特征相吻合。如果与原型相去甚远，或者达不到预期的目的，则要修改或变更已构成的MM。由此可知，判断一个MM是否合用或有效，主要应该衡量MM是否具备如下两个特点：第一，MM应具有严格推理的可能性以及导出结论的确定性。第二，MM相对于较复杂的原型，应具有化难为易、化繁为简的特点。

（4）运用MM方法的具体步骤　欧拉解决哥尼斯堡七桥问题的具体过程可用图3表示。由此例可知，利用数学模型方法解决实际问题的一般步骤为：第一，根据实际问题的特点，进行数学抽象，构造恰当的数学模型；第二，对所得到的数学模型，进行逻辑推理或数学演算，求出所需的解答；第三，联系实际问题，对所得到的解答进行深入讨论，作出评价和解释，返回到原来的实际问题中去，给出实际问题的答案。

（5）MM方法的作用　MM方法不仅是处理纯数学问题的一种经典方法，而且也是处理自然科学、工程技术与社会科学等一切领域中各种

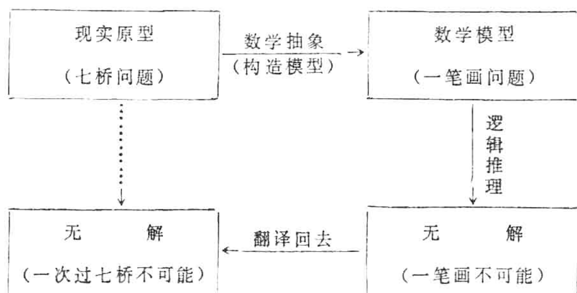


图3

实际问题的一般数学方法。有时在解答纯数学问题时，我们可以按照构造MM的反过程，给题中所涉及的某些概念、公式、定理等找出相应的现实原型，即赋予适当的实际意义，从而另辟蹊径，获取问题的巧妙解法。例如，试证：三角形的三条中线相交于一点，这点到顶点的距离等于到对边中点的距离的2倍。这是一个关于三线共点的纯几何问题。为了证明它，我们立足于寻求它的现实原型。可以联系质点系的重心，利用重心原理，构造一个力学问题来处理，可获得该问题的一个简便的证明方法。设想在$\triangle ABC$的三个顶点处有相同的质量m，如图4所示，则质点$B(m)$

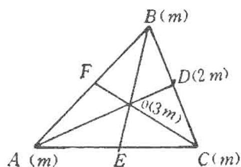


图 4

和$C(m)$的重心在BC边的中点D处，其质量为$2m$，质点$A(m)$和$D(2m)$的重心，亦即$A(m)$、$B(m)$和$C(m)$的重心，应在中线AD上，且AO∶$OD=2m$∶$m=2$，即$AO=2OD$。同理，重心O也应在另外两条中线上。因此，$\triangle ABC$的三条中线相交于重心O，它到顶点A、B、C的距离等于到对边中点D、E、F的距离的2倍。由上例可看出MM的反过程给人们提供了某些解题的巧妙方法，而MM的正过程却是处理数学理论问题的一种经典方法。比如，在前面提到的罗氏几何模型——伪球面，就是从理论上证明了罗氏几何的合理性的先例。后来庞加莱联系自守函数的研究，独立地给出另一个模型，建立了全部罗氏几何的相容性。数学模型是从现实原型中抽象出来的，同一个数学模型，常常可用于描述多种不同的现实原型。在学习数学过程中，有目的地利用数学模型的典型意义，对于提高分析问题和解决问题的能力，具有重要的指导作用。运用MM的方法，关键在于建模上。数学模型的建立可以给科学以定量的描述，从而把科学的发展推向更高阶段。借助于数学模型，一个严格的科学理论体系得以建立起来。通过数学模型，人们可以作出科学决策，一个正确的数学模型，还有着科学预见的作用。

（6）培养构造MM的能力　从数学模型的性质要求和构造方法来看，一个人构造MM的能力至少包括下面四方面：一是理解实际问题能力，二是抽象分析的能力，三是运用数学工具的能力（包括运用数学形式语言的能力），四是通过实践加以验证的能力。从培养构造MM能力的广义上讲，要想具备这方面的能力，必须学习有关的自然科学、工程科学和社会科学各分支的知识，即必须能自己进行全面教育。从狭义上说，要想具有构造MM能力，不仅要对建立MM的有关学科有深刻的理解，而且对于数学本身要掌握。在学习的意义上讲，学习各门数学时，要注意多做些应用题。中学阶段常见的MM有：经济生产类MM，这一般与指数函数及其它函数概念有关；物体运动

类MM，这些大都是与二次函数、三角函数有关的数学内容；统计模型，这与中学教材中统计知识有关；逻辑程序模型，随着计算机的普及，程序模型显得越来越重要。通过上述方面的数学模型的建立，使中学生学会用自己的数学知识分析、概括一些典型的实际问题。从而初步地掌握数学的某些基本方法来解决实际问题。并通过典型的MM的分析，使中学生对数学的产生、发展及其本质特征有所了解，以激发他们构造MM，探索使用新的数学方法的欲望。

数理统计方法　应用概率论的结果，通过样本来了解和判断总体的统计特性的数学方法。它包括总体参数的估计，统计检验，方差分析，回归分析，正交试验设计，抽样检验，质量评估等。

数理逻辑方法　用数学方法研究思维过程中的逻辑规律及数学中的逻辑方法的一种方法。它主要包括形式化方法、递归方法、模型构造方法。

数学机械化方法　一种构造性的方法。其具体含义是：在对数学问题进行运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步与之相随，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论。例如四则、开方等运算以及解线性方程组的“消去法”等都是机械化方法。数学的机械化方法由来已久，数学中有了运算，机械化方法就产生了。我国古代数学基本上是一种机械化的数学。汉初完成的《九章算术》中，对开平方、立方的机械化过程，都有详尽的说明。宋代已经产生了高次代数方程求数值解的机械化算法。17世纪法国数学家利用齿轮传动制造了第一台机械计算机——加法机，并由莱布尼茨改进为乘法机。17世纪的莱布尼茨首先提出了定理证明的机械化设想，到19世纪末，希尔伯特等人创立并发展了数理逻辑以后，才使这一设想有了明确的数学形式。到本世纪的四十年代，伴随着电子计算机的产生，才使这一设想的实现有了现实的可能性。本世纪二、三十年以来，数理逻辑学家从理论上探讨了定理证明的机械化的可能性，不过，他们得到的结果大都是否定的。而1950年波兰数学家泰斯基则证明了初等几何这一范围的定理证明是可以机械化的。1956年以来，美国开始尝试利用电子计算机证明定理。1959年王浩设计了一个机械化方法，用计算机证明了罗素的《数学原理》中的几百条定理。1976年，美国哈肯和阿佩尔等，在高速计算机上用了1200小时，解决了数学家们100多年来未解决的一个著名难题——四色猜想。1977年，我国著名数学家吴文俊先生证明了初等几何主要一类定理的证明可以机械化，并给出了切实可行的具体步骤。1978年，他又证明了初等微分几何中主要的一类定理的证明也是可以机械化的，并也给出了切实可行的程序。机械化的思想方法对数学发展做出了巨大贡献，其强大的生命力，必将使它继续对未来数学的发展作出重要的贡献，将数学推入一个崭新的境界。

数学符号化方法　一种运用人工语言的方法。它是运用数学符号来描述数学概念、定理、方法及其关系结构系

统的一种方法。例如，韦达利用字母代替具体数字，从而使数学由算术发展到代数，便是运用的数学符号化方法。运用数学符号来描述数学，简炼精确，适用面广，且便于机械化，等等。

叠加法 一种分解组合法。它是把问题分解为若干子问题，利用子问题的解的线性组合去得出原问题解的一种方法。具体说来，设问题A的若干子问题$A_1,A_2,\cdots,A_n$的解分别为a_1，a_2，…，a_n，则A的解为$a=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$是任意实数。例如将多边形分解为若干个三角形，多边形的面积等于各三角形面积的和，就是运用了叠加法。

模糊数学方法 处理具有模糊现象的客观对象的一类问题的方法。处理该类问题的步骤为：首先定量分析判断具有模糊现象客观对象的性质，以达到明晰化、然后运用相应的数学方法予以解决。

辗转相除法 又称欧几里得算法。是求最大公约数的方法。其具体含义是：如果a为整数，b为正整数，根据带余除法法则，有$a=bq_1+r_1$，其中$0\leqslant r_1<b$。如果$r_1\neq 0$，则把上式的除数与余数相除，有$b=r_1q_2+r_2$，其中$0\leqslant r_2<r_1$。如果$r_2\neq 0$，又可以继续作这样的相除运算。于是，一般而言，有

$r_1=r_2q_3+r_3$，其中$0<r_3<r_2$；

$r_2=r_3q_4+r_4$，其中$0<r_4<r_3$；

$\vdots$

$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n$，其中$0<r_n<r_{n-1}$；

$r_{n-1}=r_nq_{n+1}$。

直至某一过程的商被余数整除为止，这时，a和b的最大公约数为r_n。

例 求243和198的最大公约数。

解 $243=1\times198+45$；$198=4\times45+18$；$45=2\times18+9$；$18=2\times9$，所以243和198的最大公约数$(243,198)=9$。

古希腊数学家欧几里得（约公元前330年——前275年）在其所著《几何原本》一书中，最初以几何形式叙述了这一算法，即用辗转相截的方法来求两个（有公度的）线段的最大公度。以后，求两个多项式的最高公因式时，也经常使用这种方法。

算图 亦称诺模图。是根据一定的函数关系式由若干有刻度的线条所构成的特殊的图形，可用来进行计算。例如，根据并联电路中，总电阻公式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

可绘制如图所示的算图。若变元R_1、R_2的值已知，则在图中R_1、R_2轴上定两点，作一直线，则该直线与R轴的交点就是未知变元R所对应的值。由算图进行计算十分方便，其精度在有效数字三位上下，它适用于科学技术各个部门。

算图分为贯线算图与网络算图两类。贯线算图的基本要求是三点共线，网络算图的基本要求是三线共点。下面简述一下贯线算图绘制方法。

设给定的三点P_1、P_2、P_3的坐标分别为$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、

$P_3(x_3, y_3)$,则该三点共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0。\quad ①$$

对于给定的函数式$F(u, v, w) = 0$，要绘制其贯线算图，亦称共线算图，将其转化为

$$F(u,v,w) = \begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0。\quad ②$$

①与②对照，得

$$x_1 = f_1(u),\ y_1 = g_1(u);\quad ③$$

$$x_2 = f_2(v),\ y_2 = g_2(v);\quad ④$$

$$x_3 = f_3(w), y_3 = g_3(w)。\quad ⑤$$

则③、④、⑤是分别以u，v，w为参数的u，v，w的图尺方程。以此三组图尺方程就可绘制出u，v，w三个图尺，这就构成了函数式$F(u,v,w) = 0$的共线算图。

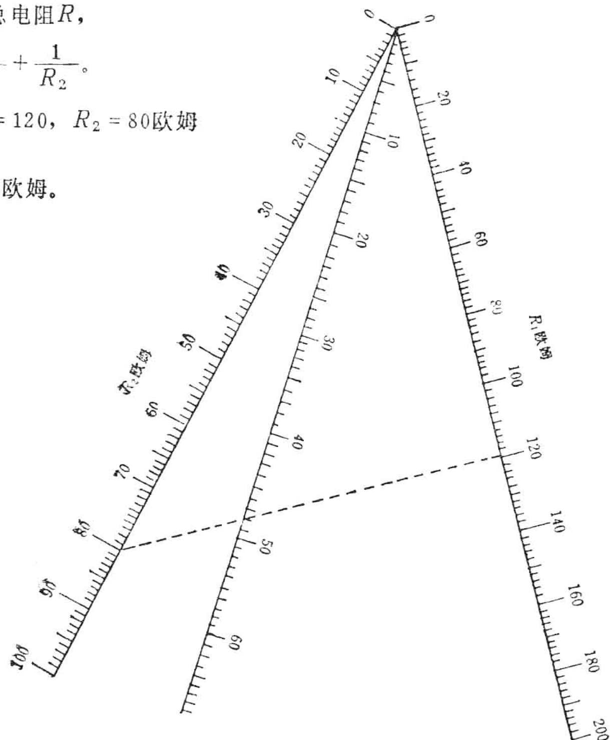
并联电路的总电阻算图

并联后的总电阻R，

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}。$$

已知 $R_1 = 120$，$R_2 = 80$欧姆求R。

解：$R = 48$欧姆。



算术平均　亦称均值。是对于一组数取平均的一种方法。其具体步骤为：设有n个数x_1，x_2，…，x_n，把这n个数加起来，再除以n，记为

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}。$$

这是测量中最常用的一种取平均值的方法。例如，测量某一对象时，由于随机因素的影响，所得的值与真值x总有一定的差异，为此，对欲测的对象重复测量n次，获得一批数据a_1，a_2，…，a_n，取

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

作为该对象的取值。它在最小二乘法意义下是所求真值的最佳逼近。

增量法　亦称松弛法。是一种变量代换法。其具体含义是：在一个数学问题中，若知$a\geqslant b$，设$a=b+\delta(\delta\geqslant 0)$，然后用$b+\delta$代替问题中的$a$，经推演后就可解决所要解决的问题。

例　设a，b，c是一个三角形的三边长，求证　$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$。

证明　要证的不等式关于a、b、c对称，不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$，作变量代换

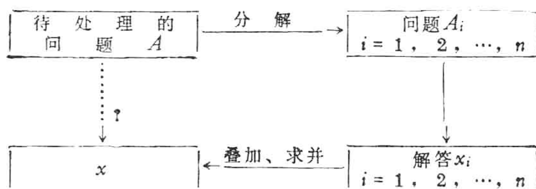
$a=c+\delta_1$，$b=c+\delta_2$，　$(\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant 0)$，则

$$\begin{aligned}&3abc-[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)]\\&=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\\&=(c+\delta_1)(\delta_1-\delta_2)\delta_1+(c+\delta_2)\delta_2(\delta_2-\delta_1)+c\delta_1\delta_2\\&=[c(\delta_1-\delta_2)+(\delta_1^2-\delta_2^2)]\cdot(\delta_1-\delta_2)+c\delta_1\delta_2\geqslant 0。\end{aligned}$$

增量法在证明不等式，特别是对称不等式时是常用的方法，在证明两个或两个以上字母之和为常值的条件限制下的不等式亦是常用的方法。

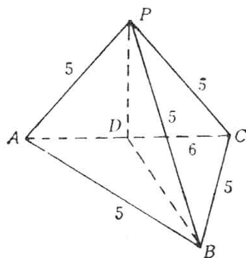
瞎子爬山法　多因素方法之一种。其具体含义是：在多因素优选问题中，先固定其他因素，对其中一种因素进行优选，选到好点后，将其固定，再优选其他因素。然后轮换固定，轮换优选，直至找到满意的结果为止。这个方法很象盲人爬山，想要爬山，从立足点开始，用手杖前后左右试一下。哪个方向高就向哪个方向爬，最后见四周比他所站的点低，那就说明已爬到了山顶。这种方法对于可变因素不允许对设备进行大幅度调整时适用。运用这种方法选好起点可减少试验次数。在实验时，每步的间隔易先小、再大，最后再小。这就是说，先在各个方向上用小步试探一下，找出优选方向，然后根据具体情况跨大步，到快接近好点时，再改为小步。

整体分解法　将整体分解为局部之和的一种分解方法。其具体含义为：首先把待处理的问题分成若干个较简单的子问题，把这些子问题的解求出来，然后将解叠加或求并便可得到原问题的解。这种处理问题的模式可用框图表示如下：



例　已知三棱锥有一条棱长为6，其余各棱长均为5，求这个三棱锥的体积。

解　如图所示。三棱锥$P—ABC$



中棱$AC=6$，其余皆为5。取AC的中点D，连结BD、PD，易知平面$PBD\perp AC$，且易推知$BD=PD=4$，于是

$$V_{P-ABC}=V_{A-PBD}+V_{C-PBD}$$

$$=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle PBD}+\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle PBD}$$

$$=2S_{\triangle PBD}=2\times\frac{5\sqrt{39}}{4}$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{39}。$$

有效地利用整体分解法的关键在于给出整体的一个恰当分解，然后借助整体等于部分之和的思想即可达到解决问题的目的。

辩证逻辑方法　是辩证法在思维中的运用，也就是辩证的思维方法。它是人们在进行辩证思维过程中自觉地应用的一些逻辑方法，包括归纳与演绎的统一、抽象与具体的统一、分析与综合的统一、逻辑与历史的统一等。这些方法都处于既互相联系又互相排斥的对立统一之中。因此，应用这些方法时，必须从对立统一中来把握其各方面的相互关系，从而使思维深刻全面地把握认识对象。例如，数学归纳法是辩证逻辑方法在数学中的一个生动体现，它是归纳演绎的统一体。从假定$n=k$命题真，推出$n=k+1$命题亦真。这一步是用的演绎方法，而演绎的大前提的正确性又是建立在第一步$n=n_0$验证的基础上。这正是归纳的结果。因此演绎法推理的正确性是由归纳法提供的正确前提作基础的。如果没有第一步的验证工作第二步的演绎无论验证多少对象，也不能把无数的数学对象验证完毕。因此，要把握无限的数学对象又必须在归纳的基础上运用演绎法。演绎与归纳是相互依赖、紧密联系在一起的。如果没有归纳，演绎的前提就无法形成；同样，如果没有演绎，归纳得来的成果也不能扩大和加深。

0.618法　亦称折纸法、黄金分割法。是单因素优选法最基本的方法。其

具体含义是：先确定试验区间，不妨设为1。然后在1这个区间的0.618处作为第一点试验，在其对称点的0.382处作第二点试验。比较两点的试验结果，留下好点所在的区间，将差点以外的部分去掉。在留下的区间内继续取好点的对称点进行试验、比较、取舍，逐步缩小试验范围，直至找出满意的结果为止。所谓折纸法。就是把上述过程，用折纸法取代，其含义为：如果用一条纸条代替确定的试验区间，先在纸条上按比例于全长的0.618处作一标记，然后把纸条对折，和标记相对的点就是另一个试验点，其试验的具体数值与两试验点相对应。两次试验结果加以比较，去掉差点以外的部分。把留下的纸条再对折，以此类推，对折、试验、比较、取舍，直到找到满意的结果。

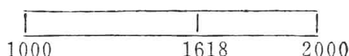
例　每吨钢要加多少碳才能达到强度最高？

解　根据经验定出优选范围为1000克－2000克，然后再按如下步骤进行优选（用一纸条代替上述范围）：

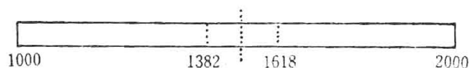
①先在纸条长度的0.618处划一条线，这条线的数值大小可由下面公式得出：

第一点＝(大－小)×0.618＋小，

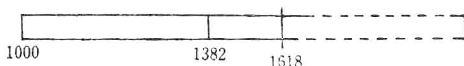
即　(2000－1000)×0.618＋1000＝1618。在这一条线所指示的刻度做一次试验，也就是按1618克做一次试验。



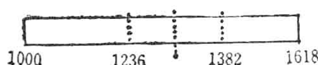
②把纸条对中折起，前一线落在另一层上的地方，再划一条线，这一条线之数值仍按上述公式计算，其数值为1382，按1382克作第二次试验。



③两次试验进行比较，如果第二点比第一点好，则把纸条上第一点右边一段剪掉，得



（如果1618是好点，则在1382处截掉左边一段）。然后依中对折起来，又可划出一条线在1236克处，得



④在1236克处作试验，将结果和1382克的结果作比较、取舍，以此类推。这样一次比一次更加接近所需的加入量，直到能达到所要求的精度为止。

0.618是由平面几何的黄金分割点演变而来的。黄金分割就是把一个

线段分成两部分，使其中一部分与全长的比等于另一部分与这一部分的比，设线段长为1，即 $1:x=x:(1-x)$，经整理得

$$x^2+x-1=0。$$

解此一元二次方程，得

$$x=\frac{\pm(\sqrt{5}-1)}{2}。$$

取正根得 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$=0.618033988\cdots。$$

将一个线段在0.618处分为两部分，称为黄金分割。

0.618法适用于象山峰一样的函数曲线——单峰函数的优选问题。

MM方法　见数学模型方法。

RMI方法　见关系映射反演方法。

RMI原则　见关系映射反演方法。

r除取余法　数进位制的转化方法。它是把十进整数转换成 r 进数的计算方法。例如，把十进数769转换成八进数，用8除取余数计算如下：

$$\begin{array}{r|l}
8 & 769 \\ \hline
8 & \ \ 96 \cdots\cdots 1 \\ \hline
8 & \ \ 12 \cdots\cdots 0 \\ \hline
8 & \ \ \ \ 1 \cdots\cdots 4 \\ \hline
 & \ \ \ \ 0 \cdots\cdots 1
\end{array}$$

所以$769=1401_8$。

r乘取整法　数进位制的转化方法。它是把十进位数的小数部分转换成 r 进位的小数部分的计算方法。例如，要把十进位小数0.8125化成二进位小数，用2乘取整数计算如下：

$$\begin{array}{r|l}
0. & 8125 \\
 & \ \ \ \ \times 2 \\ \hline
1. & 6250 \\
 & \ \ \ \ \times 2 \\ \hline
1. & 2500 \\
 & \ \ \ \ \times 2 \\ \hline
0. & 5000 \\
 & \ \ \ \ \times 2 \\ \hline
1. & 0000
\end{array}$$

所以$0.8125=0.1101_2$。

第三部分

数学教育心理与思维

一元坐标思维 见线性思维。

二因素论 英国心理学家（C·E·）斯皮尔曼（1863～1945）创立的一种智力（能力）结构的学说。他用分析方法，对当时已有的各种智力测验材料进行了研究，认为人在不同活动中所表现的智力（能力），各含有两种因素：一般因素（G）和特殊因素（S）。完成任何一种作业都是由G和S两种因素决定的。两套测验的结果如出现正相关，是由于它们之中包含有共同因素G，它们又不完全相关，也是由于每种作业中包含有不同的、无联系的S因素所造成的。据此，他认为在智力（能力）结构中，最重要的是一般因素G，它代表人的普通能力，是一切智力活动的主体；S因素代表个人的特殊能力，只和少数活动有关。

二元坐标思维 见平面思维。

人格 见个性。

人工智能 相对于人的天然智能而言。是探索和模拟人的感觉和思维过程的规律，并进而设计出类似人的某些智能的自动机的科学。人工智能是20世纪中期产生的新兴的综合性科学，研究内容十分广泛，涉及到信息论、控制论、计算机科学、自动化技术、电子学、生物学、仿生学、心理学、数学逻辑、语言学和哲学等许多领域。人工智能的近期目标是在传统计算机上，运用人工智能技术编制的程序，完成以往只有靠人的天然智能才能完成的工作，如用电子计算机进行博弈、定理证明、问题求解、模式识别、自然语言理解、计算机辅助设计、计算机自动编制程序和科学定律再发现，进而以知识库为基础，研制出具有某些专门知识、解决某些专门问题的专家系统。人工智能的远期目标是探讨智能的基本原理，对传统计算机进行改造，研制知识型信息处理系统——智能机。人工智能技术是对人类各种智能行为的总结、提炼和模拟，其理论基础是思维科学，它处于思维科学体系中的技术应用层次。

人机系统 指人与机器相互配合完成一种工作和两者缺一不可的系统。在人机系统中，不论机器如何复杂，如何自动化，人总是最重要的组成部分。

人脑模拟 又叫心理模拟。是指根据人脑活动的基本规律，仿照人脑设计自动机器的科学研究。自动机器就是平常所说的电脑或机器人，现正研究的“第五代计算机”或“第六代计算

机”也都是机器人。机器人就是模拟人脑仿制出来的。最早的电子计算机是模拟人的神经系统活动设计的。此后发明的许多自动机器，都是从人脑思维活动过程得到启发的。这种模拟研究对于揭示人的心理活动的基本规律，增进关于人脑和心理活动的关系的理解，均具重要意义。所以人脑模拟也是心理科学的研究方法之一。显然，自动机器无论如何也不会完全等同于人脑。

人本主义心理学 20世纪50年代在美国兴起的一种心理学流派。是一些观点相近的多种学派的心理学家，在反对行为主义心理学的共同目标下建立的联盟。代表人物有A·马斯洛、(1908～1970)、布振涛和罗杰斯等。它认为，行为主义把研究的重点放在人的外部行为倾向，是把有人性的人类降低到了动物和计算机的水平。主张心理学必须说明人的本质特性，人的内在情感，潜在的智能、目的、爱好、兴趣等人类经验的一切方面。他们也反对古典心理分析学，自称是心理学的第三种力量。人本主义心理学代表着美国心理学的进步倾向。

儿童心理学 研究儿童心理发展的一般规律及年龄特征的心理学分支。儿童心理发展既有连续性，又有阶段性。儿童的一般生理素质，特别是神经系统特点，是儿童心理发展的自然前提。社会环境的影响和教育对儿童提出的要求，为儿童所接受从而转化为自己的需要，则是儿童心理发展的决定性因素。在中小学数学教育过程中，研究和掌握儿童心理发展规律，对儿童和少年的健康成长、数学知识的学习，对心理学、教育学和哲学上一些理论问题的探讨，都有重大意义。

三论 系统论、信息论和控制论，习惯上概称“三论”。20世纪60年代以后，协同论、耗散结构论和突变理论等三种新理论相继问世，被称做“新三论”。相对于“新三论”为区别起见，原有的系统论、信息论和控制论等“三论”，又叫做“老三论”。

三原色说 一种解释色觉现象的学说。由英国的物理学家托马斯·杨于1802年提出，后经德国的生理学家赫尔姆霍兹加以发展。它认为，一切颜色视觉都可以由红绿蓝三原色光混合而得。例如，红绿光相混合可得橙或黄视觉，绿蓝光相混合可得青色视觉，红蓝光相混合可得紫视觉等。三原色说据此假设视网膜内有三种不同的感色物质，它们感受光谱中不同波长的光波时，强度是不一样的（一种感受红光最强，一种感受绿光最强，一种感受蓝光最强）。当各种感色物质被孤立地以相应的波长的光进行刺激时，便产生单色的红、绿、蓝感觉；当复杂的光波以不同的强度比例作用于各感色物质时，将分别产生各种不同的色感觉；当三种光波的强度相同时，则产生白色或无彩色的感觉。这一假设已在近代光化学和电生理学上得到证明。此说也能解释色盲现象。但对于色对比等现象则不能给予合理的解释。

才能 有关的若干种能力在某个方面的有机结合，形成一种革新意义的综合能力，就是才能。例如一个人的数

学才能就是由数学思维能力、数学语言表达能力、数学运算和变换能力等若干种（层次）能力有机结合而成的。而一个人的数学教育才能则又是由他的数学才能和教育才能有机结合而成的。研究表明，不同的人在同一活动中，各种能力结合而成的才能是不同的。这就是为什么同样是数学才能出众的数学家，但却各有所长的基本原因。

下意识　亦称潜意识。见无意识。

个性　又称人格。指个人带有倾向性的、本质的和比较稳定的那些心理状态，如兴趣、爱好、能力、气质、性格等。个性是在个人特定的生理素质的基础上，在一定的社会历史条件下，通过社会实践活动而形成和发展起来的。个性决定个人的独特风格，每个人都有不同于别人的特点。个性在某种主客观条件下往往具体表现为许多为人称道的“优点”，在另一种主客观条件下则又往往具体表现为许多令人生厌的“缺点”。个性优、缺点的不同表现，个性多样化是大自然错综复杂、婀娜多姿的具体表现。可以创造条件、促成优、缺点的定向转化甚至发展个性，但不能简单化地强求统一。要求人们（包括中小学学生）按某种主观圈套去强行抑制个性发展，等于是取消个性。

个案法　心理学的一种研究方法。搜集关于一定个人的家庭情况、社会地位、职业经历、专业成就、生活条件、教育影响以及身体状况等资料，通过综合分析研究，以探讨其心理特性的形成和发展过程。如对儿童智力的研究和对精神病患者的研究，常常采用此法。它是教育心理学和医学心理学经常采用的一种辅助性方法。

个体思维　是社会思维的对立概念，指社会实践中不同时代、不同职业、不同年龄的个人所进行的具有自身特点的思维活动。在社会实践中，人们的思维活动的方式、内容和习惯，有共性，也有个性。社会思维注重研究某一时代、某一职业、某一年龄层次的群体（许多人）思维的共性特征，个体思维则侧重研究不同时代、不同职业、不同年龄层次的个体(个别人)思维的个性特征。个体思维的特征，既表现在思维形式的运用方面，又表现在思维内容的选择方面。如天文学家与猎人，数学家与工程师，写实作家与抒情诗人，李白与杜甫，华罗庚与李四光等，每个人都有自己独特的思维方式和思维内容。

个体概念　见组合概念。

个性差异　即个人间心理特征的不同之处。人与人之间由于心理特征之不同，于是个别差异也就必然存在，这是一种社会自然现象，不可自觉不自觉地予以否认。个性差异不仅表现在是否具有某方面的特征，而且更多地表现在同一特征的不同水平上。这是教育者尤其应当注意的一个重要问题。自觉不自觉地否认个性差异，追求不可能实现的某种“一致”的做法，都是违反科学规律的。

个体社会化　指儿童和青少年在与他人交往中，学习并掌握其所在社会的规范，逐渐形成既与社会一致，又有自己特点的社会态度、行为模式、人格特征、信念和价值观等，成长为社会的积极成员的过程。个人在社会活

动中不能只顾自己需求的满足，也要考虑他人和群体的需求和利益，因为要遵守群体或社会约定成俗的行为规范。个人不仅能适应现存的社会环境，还能依据人类历史积累的经验与知识，形成先进的观点和信念，自觉能动地去改造社会现实，并在这个过程中不断改变自己，使自己的个性（人格）趋于完美。

个性心理特征　见个性。

习惯　一种惯性现象。已经掌握的某些行为方式得以巩固和维持，并变成一种自觉或不自觉的需要，即为习惯。习惯与熟练关系密切：熟练有助于习惯之形成；习惯则使熟练得以巩固和发展。习惯可在有意或无意中形成，有消极（坏的）与积极（好的）之分。例如，学生在做完一道数学题后，总爱进行一番思考，总结出成功的经验与失败的教训，就是一个好的学习习惯。

习惯性思维　即再现性思维，创造性思维的对立概念。指运用以前已获得的知识和经验，不加更改地去解决类似情境中的问题的思维过程。例如根据课堂上讲解的某些数学例题去做同类型的课堂练习等，就是再现性思维过程。习惯性思维也并非无一点创新的因素，但它与创造性思维中的创新程度是大不相同的。再现性的习惯性思维往往是培养创造性思维和其他较高级思维的必经之路，但思维停留在这一水平上的人很少能对社会发展和科学进步做出较大的贡献。

天资　构成发展能力前提的天生素质的综合。在相同的环境和教育条件下，有的人对某种活动的能力发展较为迅速，较易获得较高成就，而另一些人则不能，这种差异往往是因为人的天资的不同而形成的。早期的、没有经过教育训练就显露出人的对某种活动或许多活动的能力，是具有有关活动的良好天资的表征。但是，天资并不能完全决定能力的形成和发展。

天赋　（1）是指具有发展某方面高级才能的素质，这种素质是先天的，是由遗传获得的神经系统的某些强度、动力特点以及微观解剖结构。（2）指天资。见天资。

无意识　（1）在心理学上，通常指不知不觉、没有意识到的心理活动。它不同言语和文字相联系，不能用言语表述。无意识支配下采取的行为叫做无意识行为。如心脏的工作、自动化的动作等。（2）精神分析学派的基本概念。按这一学说，心理范围大于意识范围；心理主要分意识和无意识两个对立部分。无意识即本能及与本能有关的冲动和欲望。这些欲望、冲动与社会伦理道德不相容，因此，受到意识的“压抑”，但它并不消失，仍在积极活动，追求满足，而主体却无从直接觉察，所以又称“潜意识”弗洛伊德认为，意识对本能冲动的“压抑”，有时也是无意识的，所以他认为无意识暗中支配意识，是心理活动的基本动力，是人的动机、意图的源泉。无意识是精神分析学派的主要研究对象。不考虑意识经验就不能理解行为，而不考虑无意识的心理过程，就不能理解意识经验。无意识既对意识起作用，则不应称“无意识”，于是有“潜意识”（或“下意识”）一词以替代。

无形存在 见有形存在。

无意识记 与“有意识记”相对。指没有预定目的、不加任何主观努力的识记。它之所以能识记，主要是潜移默化、机械重复和某些偶然因素，在不自觉中实现的。无意识记有时甚至几十年不忘。但是，无意识记只能支离破碎地解决一些问题，而系统化的科学知识（特别是数学科学知识）必须通过有意识记才能系统有效地加以掌握。

无条件反射 是人或其他动物先天就有的、比较简单的反射活动，也叫非条件反射。无条件反射是由中枢神经系统的低级部位、大脑皮层以下的部分来实现的。其神经联系相对地固定，通常具有刻板的、很少变化的性质。例如，手指无意碰火立刻缩回，食物入口唾液自然分泌，污尘进入气管等呼吸道引起喷嚏等，都是无条件反射所致。通过无条件反射，有机体能适应比较简单的稳定的生活环境。

无定义概念 见原始概念。

元数学 见证明论。

不定义概念 见数学概念。

日常思维 科学思维的对立概念。日常思维同科学思维虽然是一对对立概念，但却没有什么明显的界限，特别是民族之间、社会之间、同样是日常思维，由于科学思维素质水平不一而表现出显著的差别。日常思维是人们在日常生活中思考问题的一般模式。例如日常交往中有些话转弯抹角地说，或者运用“意会思维”使对方理解，常常比直言揭示、准确地说出效果要好得多。日常思维这种交流方式，在科学思维中是不允许的。日常思维的主要特点是：人情因素多，通俗，生动。数学教学就讲解的数学内容而言，那是严格的数学思维，但在传授中，不仅运用教育思维等科学思维，也离不开日常思维。值得注意的是，有些教师将日常思维的许多不违反科学而且有用的成份吸收到数学教学中来，搬到课堂上，常常收到生动深刻的效果。

日内瓦心理学派 又称皮亚杰心理学派。瑞士发展心理学家J·皮亚杰（1896～1980）始创，并建立了发生认识论。1955年，皮亚杰集合各国心理学家、逻辑学家、哲学家、语言学家、控制论专家、数学家和物理学家等，在日内瓦建立“国际发生认识论研究中心”，专门研究认识的发生发展问题。他先后经过五十多年研究，写出四十多本专著。他的理论融合了生物学、心理学、认识论和逻辑学，主要内容有：①儿童心理是在内因与外因相互作用中不断发展变化的。儿童智慧的本质是适应，而适应在生物学上是同化和顺应的平衡，在心理学上就是内因与外因相互作用的一种平衡状态。也可以说，智慧是一种适应过程的不断扩张和完善化。②人的每一个认识活动都会有一定的认识结构，它包括图式、同化、顺应和平衡等四个基本环节。皮亚杰认为，当儿童每遇到新事物时，在认识中总是试图用原有的图式去同化，如获成功，就得到暂时的认识上的平衡；反之，便要通过顺应，调整原有图式或创立新的图式去同化新事物，以达到认识上的新的平衡。③儿童心理发展因素

包括成熟、物理环境、社会环境和平衡过程等四个方面，其中，平衡过程是心理发展的最重要因素。④儿童心理发展的四个基本阶段：感知运动阶段，即儿童思维的萌发阶段；前运算阶段，即出现表象和直观形象思维阶段；具体运算阶段，即初步的逻辑思维阶段；形式运算阶段，即抽象逻辑思维阶段。⑤"发生认识论"学说。是皮亚杰在20世纪60年代提出的，主要研究知识的心理起源问题。他认为，知识来源于动作，是由于主客体相互作用，并通过主体的动作而产生的。皮亚杰建立了"反映的抽象"和"自我调节"等两个概念，企图以此阐明知识形成的心理机制问题。

中间概念 见对立关系和矛盾关系。

内化 指外部言语向内部言语转化的过程。这是一个作为对外部的、对象的动作（即体力动作）向内部的、心理的动作（即智力动作）转化的过程。例如，儿童刚开始学习计算时，起初用小石子一颗颗相加减，以后不需要小石子而形成了心算，也就是由对小石子的外部体力动作而转化成了对自己的内部智力动作——自己对自己"说话"，这就是一个内化过程。

内省 见内省法。

内倾 同外倾一起，是关于人格（即个性）类型的一对概念，由瑞士心理学家C·G·荣格(1875～1961）提出。他根据对精神病的研究，以一种所谓"无意识的生命力"（即人的基本心理能量的表现形式）作为人的心理活动的基本动力，认为其流动方向决定人格类型。具体说来就是：生命力内流占优势的人属内倾型，简称内倾。这种人重视主观世界，常常沉浸在自我欣赏和幻想中，并抵制外部影响。在同别人和外界接触中，比较谨慎，缺乏自信，还明显地倾向于孤僻和害羞。生命力外流占优势的人属外倾型，简称外倾。这种人重视外在世界，热情开朗，活泼好动，爱好社交，信任别人。大多数人属于内倾和外倾特征兼而有之的中间型。

内涵 指概念的内涵，它同概念的外延构成概念的两个重要内容，形成概念思维的两个方向：从内涵（外延）到外延（内涵）。一个概念的本质属性的全体，叫做该概念的内涵。本质属性有多有少，所以内涵有大小、多少之分。例如，就中学现行数学教材而言，四边形的内涵包括两个本质属性：①是多边形；②有四条边。平行四边形内涵中的全部本质属性是：①是四边形(等于四边形的全部内涵)；②两组对边分别平行。矩形内涵中的全部本质属性是：①是平行四边形（等于平行四边形的全部内涵）；②有一个内角是直角。可以看出：多边形内涵<四边形内涵<平行四边形内涵<矩形内涵。一个概念所概括或涉及到的具体对象的全体，叫做该概念的外延。也就是说，概念的外延就是概念的适用范围或包括范围。范围有大有小，所以外延有大小与宽窄之别。例如，有理数的四则运算这个概念，其外延由加、减、乘、除等四种运算组成；实数概念的外延包括所有有理数和无理数；三角函数的外延包括正（余）弦、正（余）切、正(余）割和正（余）矢等八种函数；一元二次函数的外延则囊括了一切形如 $y=$

ax^2+bx+c（其中a，b，c是常数，$a\neq 0$）的函数；三视图的外延由主视图、俯视图和左视图组成；二次曲线的外延由椭圆、双曲线和抛物线组成；基本初等函数的外延由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等五种函数组成等。根据外延的定义，还可以看出：多边形的外延＞四边形的外延＞平行四边形的外延＞矩形的外延。据上可得两个结论：①一般地说，甲概念的外延包括乙概念的外延的充要条件是，乙概念的内涵包括甲概念的内涵；②一个概念的内涵越大（本质属性相对地越多），它的外延则越小（包括的对象越少，反之，一个概念的内涵越小（本质属性越少），它的外延则越大（包括的对象越多）。可见，内涵越大，外延越小，概念则越是处于特殊地位。数学语言中所谓某概念是某概念的特例，正是因为前者的外延小于后者的外延，或者前者的内涵大于后者的内涵。概念间的此种关系叫做概念的内涵与外延之间的反比关系。不过，在论及概念的内涵大小、外延宽窄及其之间的相互关系时系指存在主从关系的概念而言，在风马牛不相及的概念（如四边形和最简根式）之间讨论这种关系就是没有意义的。

内省法 构造心理学所主张的研究方法。内省，就是自我体验、自我观察和自我总结报告。利用内省来研究心理现象，首创这一概念的是中古时期的天主教主教奥古斯丁。他认为，心理是主观自生的内部体验，别人无法直接认识，只有通过被试者的内部反省或自我报告，才能被人了解。现代心理学和思维科学等，也常采用内省法。但这种内省法一则不断改进，其科学性和准确可靠性越来越高，二则配合以其他客观方法以作相互印证。

内部语言 又称内隐语言。是人在思考和思维时自己对自己使用的语言，其最大特点是发音的隐蔽性。人在默默思考时，听不到发音器官发出的声音，但微电极可以测查到发音器官的肌肉活动。内部语言是在外部语言的基础上形成和发展起来的。由于内部语言无需考虑外界反应，极不严格要求合乎语法规则和逻辑结构，因此具有片断性和压缩性的特点。

内涵定义 同外延定义相对。凡从内涵方面来揭示概念、明确概念的定义方法所产生的定义，概称内涵定义。本书所介绍的典型属种定义、发生定义、派生定义、数学相对概念定义、数学组合概念定义、数学过程概念定义、数学关系概念定义等，都是内涵定义。

内隐语言 见内部语言。

内涵与外延的反比关系 见内涵。

气质 人的重要心理特征之一。人的典型的、相当稳定的个性心理特点。主要指人的心理活动在动力方面的表现：心理过程的速度和稳定性、心理过程的强度以及心理过程的指向性等。例如，情绪体验的快慢、强弱，表现的隐显以及动的灵敏或迟钝等。气质只能使人的个性带有一定色彩，不能决定其个性特征内容。气质类型有差别，但不能作好坏之分。研究还表明，气质也不能决定一个人活动的社会价值和成就之高低。例如俄国的四位著名作家普希金、赫尔岑、克雷

洛夫和果戈里，就分别属于胆汁质、多血质、粘液质和抑郁质等四种不同类型的气质。气质本身在性格影响下可以被改造。例如具有坚强性格的人就可以克制个人气质中某些消极的方面。具有不同气质类型的人可以形成同样的性格，同一气质类型的人也可以养成不同的性格特征。气质归根结底服从于性格的坚强程度。气质特点一般通过人际交往显示出来，作为一般语词使用时，和“脾气”、“性格”等含义相近。

气质学说　解释气质由来、类型等基本概念的学说。①中国古代医学家按人好动还是喜静，把人分为好动的太阳型、少阳型、喜静的太阴型、少阴型和动静适中的阴阳和平型。可以认为，这是中国的古代气质学说。②古希腊医生希波克拉底和罗马医生盖仑最先提出了气质四类型说。四种类型气质在行为方式上的典型表现是：多血质：活泼、好动、敏感，反应迅速，喜欢与人交往，注意力容易转移，兴趣易变，性格外倾。粘液质：安静、稳重，反应缓慢，沉默寡言，情绪不易外露，注意稳定，难于转移，善于忍耐，性格内倾。胆汁质：直率、热情、精力旺盛，情绪容易冲动，心境变换剧烈，性格外倾。抑郁质：情绪体验深刻、孤僻，行动迟缓而且不强烈，善于觉察他人不易觉察的细节，性格内倾。③巴甫洛夫提出四种基本的高级神经活动类型：兴奋型、活泼型、安静型和弱型。这四种类型分别相当于胆汁质、多血质、粘液质和抑郁质，并指出纯粹的类型极少，一般都是混合型。

反应　同刺激相对。泛指有机体对刺激所作的回答。一切有机体都有接受刺激并作出应答的能力，只是水平和形式不尽相同而已。如单细胞的变形虫根据遇到的不同物体伸出或缩回假足；含羞草的叶子因触动而闭合；高等动物因体内外的各种变化而发生肌肉运动或腺体分泌；人的各种行为及在数学教学中学生对教师每一言行所作的表示等，尽管复杂程度大有不同，但都是反应。

反驳　确定某一论题虚假或论证不能成立的思维过程。因为论证是由论题、论据和论证方式等三个要素组成，因此反驳可从反驳论题、反驳论据和反驳论证方式等三个方面分别入手或两、三个方面联合入手。任何一种正确的反驳，都能确定被反驳论证的无效性，而反驳论题则可以进一步确定被反驳论题的虚假。反驳与论证不同，论证在于确定论题的真实性，反驳则在于确定对方论题的虚假或其论证之不能成立。论证的作用在于探求真理、揭示真理和阐明真理，而反驳的作用则在于揭露错误，驳斥谬误。但是，反驳与论证又是相互联系的。例如，确定判断“P是假的”，也就是确定“‘P是假的’为真”。因此，反驳也可以看作是论证。间接论证是通过确定另一个或另一些判断的虚假来进行的，因此，论证中有反驳。间接反驳是通过证明与被反驳论题相矛盾或反对的判断的真实性来进行的，因此，反驳中有论证。两者相辅相成。也可以说，反驳是论证的一种特殊形式，因而论证的规则也是反驳的规则。论证的分类也适用于反

驳，所以，反驳也可以分为直接反驳和间接反驳，演绎反驳和归纳反驳。

反射 动物通过神经系统对刺激所作的有规律的反应。反射是神经系统最基本的活动方式。分无条件反射和条件反射两种：无条件反射是动物生来就有、在系统发育过程中所形成而遗传下来的，其神经联系是固定的。条件反射是动物个体生活过程中适应环境变化，在无条件反射的基础上逐渐形成的，其神经联系是暂时性的。如食物直接刺激口腔，引起唾液分泌为无条件反射；动物听到食盘响声而分泌唾液为条件反射。

反射学 反射这个概念，最早由法国哲学家R·笛卡儿（1596～1650）提出，后来由俄国生理学家И·M·谢切诺夫和I·P·巴甫洛夫(1849～1936)从科学上发展了它，并使其成为说明心理现象的基本原则。谢切诺夫在他的《头脑的反射》中，把反射原则推广到脑的全部活动和人的全部心理活动中去。巴甫洛夫用实验证明了谢切诺夫关于心理活动是脑的反射活动的理论的正确性，揭示了它的基本生理学规律，创立了高级神经活动生理学，即关于条件反射的学说。20世纪初，B·M·别赫捷列夫(1857～1927）在谢切诺夫反射论的指引下，对“联合反射”和病理心理学的研究取得不少成就，并创立了俄国心理学和病理心理学的“反射学”学派。

反向思维 见双向思维。

反应时间 又称反应潜伏期或潜伏期。指有机体从感受刺激到作出反应所需要的时间，即受试者感官接受刺激并通过一定神经通路的传导和神经中枢的调节，使反应器官发生反应所需要的时间。在教学中，从教师发出（或学生几乎同时接受）教学信息（刺激），到学生明确信息的教学意义，这样的教学“反应时间”存在一个常数值。不管是教师还是学生，都必需维护这个数值的权威，否则，就会明显影响教学进程和效果。

反馈系统 某种行为的结果又做为新的刺激影响（即返回影响）自己的系统。在负反馈中，行为的结果使行为停止或减弱。在正反馈中，行为的结果使行为强化。

反应潜伏期 见反应时间。

分部概念 见整分关系。

公理 经过实践长期反复的检验，其真实性非常明显，无需进行论证就被人们公认的所谓不证自明的命题。例如，“等量加等量和相等”，“经过直线外一点，有一条而且只有一条直线和这条直线平行”，“矩形的面积等于它的长a和宽b的积”等，都是数学公理。公理在某一论证过程中，理所当然地是证明某一判断真实性的论据或理由。值得注意的是，本来在某些数学科学专著中作为定理的数学命题，被编进中小学教材以后却成了公理（例如，关于三角形全等的边角边公理和角边角公理，在五十年代的教材中就曾是经过论证的两个定理）。发生在公理至定理之间的这样一种可变现象，一方面是教学的需要，另则是这种变化在数学科学——数学思维的理论中是允许的。因为，从根本上说，定理和公理都是可信赖的真命题，在应用中是没有区别的；它们之间的唯一区别是令人信服的直观性，

前者较隐，后者则极明显。

文饰作用 西方心理学界用语。一种自我防御机制的掩饰作用。即一个人为了掩饰个人的某些不当行为，往往遁词夺理、文过饰非，从而使自己逃出困境。例如把考试成绩不好归咎于身体不好、出题不当，从而感到心安理得，这就是文饰作用的作用。

计算机 在计算过程中使用的机器。可以说，中国的算盘是原始的计算机。真正计算机的鼻祖，乃是带有自动进位装置的帕斯卡加减计算机（1642年）。之后是以反复地加减来实现乘除运算的莱布尼兹计算机（1671年）以及以电为动力，具有各种自动装置的各式各样的电动计算机。与一次只能进行加、减、乘、除一种运算的所谓台式计算机不同，本世纪40年代出现了一种预先编好程序并存入机器内，一启动就能按程序自动地进行四则运算的自动计算机。1946年，出现了以电子管取代机械元件而进行运算并具有其他功能的电子计算机ENIAC。1950年左右，出现了采用冯·诺伊曼提出的内存程序方式的电子计算机。自此以后，电子计算机以惊人的速度发展着，迎来了计算机的全盛时代。一般说来，自动计算机由运算器、存储器、控制器、输入、输出等五个部分组成。在最初的自动计算机MarK-Ⅰ中，运算、存储等均是用电控制的齿轮装置和继电器等的组合来进行的。那时，也制造了一些全部以继电器为元件进行运算、存储、控制的继电器式自动计算机。但不久，人们用电子管（最近则用晶体管和其他微型电路）代替了继电器，因此，计算速度飞跃地提高。再加上大容量存储器的发展，于是以前认为不可能进行的大规模的科技计算，现在已成为可能。特别是过去不认为是“计算”的许多功能，计算机也具备了。例如分类、翻译、信息检索、数学定理的证明等，均能用机器实现。电子计算机现正向模拟人的大脑思维功能的智能机方向疾步发展。

认知 见再认。

认知科学 与思维科学极为类似和相近的科学，又称认识科学。美国学者西蒙和斯切斯特在他们合著的1982年出版的《人的内部宇宙：一门探索人类思维的新科学》一书中指出：“认识科学是研究人类思维活动的科学”，“它研究人的大脑如何构词造句，归纳整理，然后经过调整，人们又是怎样认识客观世界的。”认知科学的研究方法是“交谈分析法”，通过与被试者的谈话来研究思维过程，把交谈过程以计算机程序形式贮入机器，然后用模拟方法研究思维。认知科学在美国首先开创的时间略早于思维科学在中国首先萌发的时间。认知科学的研究范围和规模比思维科学要小得多。

认知结构 又称思维结构。一种反映事物间稳定联系或关系的内部认识系统或模式。瑞士心理学家皮亚杰和美国心理学家布鲁纳等人都持这一观点。他们认为，人的认识活动总是按照一定的阶段顺序形式，发展成为对事物结构的认知，形成一种不同于事物结构的心理结构；人在认识新事物时，或者把新事物同化于已有的认知

结构，或者改组扩大原有的认知结构，把新事物包括进去而形成新的认知结构。所以，认知结构是人们认识和适应各种复杂环境的基本手段之一。认知学派的这一观点来自德国格式塔心理学派的“完形”理论。

认知结构论 用认知结构及其组织特性解释学习的心理机制的一种学习理论。所谓认知结构，就是学习者头脑里的知识结构。广义地说，它是学习者全部观念的内容和组织。狭义地说，它则是学习者在某一知识领域内观念的内容和组织。个人的认知结构是在学习过程中通过同化作用，在心理上不断扩大并改进所积累的知识而组成的，学习者的认知结构一旦建立，又成为他学习新知识的极重要的能量或因素。

格式塔派的拓朴心理学家勒温在30年代曾指出，学习是认知结构的变化，其表现为分化、概括化与再组织等三种方式。认知学派心理学家皮亚杰、布鲁纳、奥苏贝尔等也都强调认知结构的重要性，一致认为：学习含有使新材料或新经验结为一体这样一个内部的知识组织机构，即认知结构。皮亚杰指出，这个结构是以图式、同化、顺应和平衡的形式表现出来。布鲁纳在皮亚杰的影响下，将结构理论应用于美国的学校课程改革。奥苏贝尔则系统地阐述了认知结构及其与课堂学习的关系。他认为，就课堂学习而言，学习者需要将新概念和新信息融入已有的认知结构之中。近年来的教学实践和实验研究表明，采取一定手段，有意地控制学习者的认知结构，提高认知结构的可利用性、稳定性与清晰性，以及可辨程度等，对于有效的学习和解决问题是有作用的。

心理 人的大脑反映客观现实的过程或导致的现象。按照现代思维科学的观点而论，大脑反映客观现实的这种特殊功能，本是“思维”的作用。但是，中国传统文化误认“心”为思维的器官；中医则称“心”为人体器官的主宰，所以，在中国科学中，心理便成为人的一切感觉、知觉、表象以及思想、意识、观念、感情直至思维等现象的通称。心理学所要研究的内容有两个方面：一是心理过程，即大脑反映现实（例如运用数学语言刻划所反映的客观现实）的机制机理等问题；二是心理特征，即心理过程中那些最令人注目、可以表征相应心理过程的东西，例如能力、气质、性格等。又如，经过严格数学专业训练的人与一般人相比，在能力、气质和性格上就表现出许多不同于后者的更进一步的特征来，等等。

心情 见心境。

心境 又称心情。一种比较微弱而持久的情感状态。在此种状态下，人的一切其他体验和活动往往都染上情绪的色彩。心境不是关于某一事物的特定体验，它具有弥散性的特点。一个人处于某种心境中，往往以同样的情绪看待一切事物。心境形式多样，往往带有两极性的特点，如愉快与忧愁、愤怒与安静等。积极良好的心境有助于人的积极性的发挥，而消极的心境则会使人厌烦、消沉。克服消极心境与性格和意志有关，是个性修养的内容之一。

心理学 研究心理现象的客观规律的科学。心理现象指认识、情感、意志等心理过程和能力、性格等心理特征。心理学本是哲学的一个部分，直到19世纪中期，随着自然科学的进展和实验方法的采用，才逐步从哲学中分化出来，成为一门独立的学科。辩证唯物主义认为，心理是客观现实在人脑中的反映，从人脑的反映机制看，作为大脑的依附体的人是自然实体；从作为被反映的现实内容来区别，人又是社会实体，因而有人认为人类心理学是一门既有自然科学性质、又有社会科学性质的科学。心理学根据其研究内容的不同侧重，有许多分支学科。研究心理的一般形式和一般规律的分支学科叫做普通心理学。研究心理在种系或个体上发生发展规律的分支学科，有比较心理学、儿童心理学等。研究不同社会领域内各自的心理规律的分支学科，有教育心理学、医学心理学、艺术心理学、运动心理学等。数学教育心理学如同其他学科教育心理学一样，是心理学研究领域中一个更高层次上的分支学科。

心理发展 作为个体的人，从出生到死亡，其心理不断变化，所谓心理发展就是泛指这样一个变化过程。个体的心理发展，同时包含着两种相反的心理变化过程，即前进上升的积极变化和衰退下降的消极变化，通常所说的心理发展主要指前者。心理的发展是人积极反映客观现实的结果。心理发展的过程是人对客观现实反映活动的扩大、改善和提高的过程。心理发展的动力在于心理发展的内部矛盾。一般说来，在心理发展中那种新生的和衰亡的过程、特点、品质之间的矛盾，就是心理发展的动力。心理发展的一般特点主要表现为：心理发展是一个持续不断的过程；心理发展的有序性；心理发展的阶段性；各个心理过程和个性特点的发展速度及其达到成熟水平的时期均呈现一定的差异；心理发展的各个方面是相互联系和相互制约的；同龄儿童和青少年的心理发展可能存在显著的差别。中小学数学教育在任何时刻都面对某个“心理发展”的现实：小学生有小学生的心理发展特点，初中生有初中生的心理发展特点，高中生有高中生的心理发展特点；即使在同一个年级甚至在同一个年龄中，每个群体或个人也都有自己相应时期的心理发展问题。数学教育工作者密切注视数学教学所面临的心理发展问题，不仅是名符其实的工作内容，也是关系到教学效果的一个重要因素。

心理过程 指认识、情感和意志等三个层次的心理活动。其中最基本的心理过程是认识，它包括感觉、知觉、表象和思维。感觉和知觉是简单的初级的认识过程；表象是一种比较复杂的认识过程；思维则是最高阶段的认识过程。人在认识客观事物的同时，常常伴随出现一定的态度、体验或评价，这种不同于对客观事物的认识的又一个层次上的心理活动过程，就是情感。人在与周围环境相互作用时，不仅认识事物，产生情感，而且还要进一步采取某些行动。决定、支配和坚持这种有意识地反作用于现实的行动的心理活动，称为意志。认识、

情感和意志等三种心理过程，简称知、情、意。它们之间既有区别，又有联系，是统一的心理活动过程的三个不同层次。所有认识、情感、意志都有自己发生、发展和完善的过程，这些过程统称为心理过程。数学科学是高级心理活动——数学思维的产物，因此，数学心理问题属于某种高级心理过程，不能停留在一般“认识”的水平上来对待。数学心理过程与情感和意志等两种基本心理过程之间的联系，远不如数学教育心理过程与情感和意志之间的联系更为密切。

心理状态 又称意识状态。特点是有一定相对的稳定性，但又只能保持一定短暂的时间。它不同于心理过程与个性特征。即不象心理过程那样具有高度的流动性、波动性、起伏性，又不象个性特征那样具有高度的稳定性。心理状态较之心理过程与个性特征，都显示出一种明确的综合性质。心理状态是人的心理活动结构的三个部分之一。日常生活中的分心、紧张、后悔、思想斗争等，都是心理状态。

心理特征 就是一个人的心理活动中那些最基本、最持久和最重要的部分，例如能力、性格、气质等，就是一些主要的心理特征。数学教育对于培养学生形成完好的心理特征，具有一般学科教育所难能发挥的作用。例如，通过数学教育所培养起来的数学思维能力就是数学能力的核心，而数学能力在一个人的能力结构中具有极其重要的地位和作用。

心理测验 又称心理测量、测验法。用以测量人在智力水平、心理特征方面的个别差异的方法。1869年由英国心理学家F·高尔顿（1822～1911）始创。用作鉴别学生优劣，测查犯罪原因，挑选职工和士兵等的工具。测验方式主要有两种：一种是使用实物或器械；一种是使用文字或图形等。测验结果经常以测验量表加以衡量，用统计方法加以处理，心理测验种类主要有智力测验、品格测验、能力测验、成绩测验等。

心理模拟 见人脑模拟。

心智技能 见智力技能。

心理发展阶段 心理发展的阶段性表明，心理发展也同其他事物的发展一样，是通过数量的不断积累而达到质量变化的过程。心理的发展是从低级到高级，从简单到复杂，从旧质到新质的不断变化和完善的过程。心理的发展既有连续的渐近的量的变化，又有质的改变。随着新质的出现，心理的发展就进入一个新的阶段。可见，所谓心理发展阶段就是心理在发展过程中质的具体表现。质不同，表现不同，从而有心理发展的不同阶段。中国的教育心理工作者根据心理矛盾运动的特点，参照主导活动和学制，一般将个体出生至青年这一时期，划分为六个阶段。这六个阶段是：婴儿期（从出生到1岁，又称乳儿期）；前幼儿期（1～3岁，或称先学前期，相当于托儿所阶段）；幼儿期（2～6岁，或称学前期，相当于幼儿园阶段）；童年期（7～12岁，又称学龄初期，相当于小学阶段）；少年期（11、12岁～14、15岁，或称学龄中期，相当于初中阶段）；青年期(14、15岁～17、18岁，或称青春期，相当于高中阶段）。在上述每个阶段中，

人的感知觉的发展、动作的发展、言语的发生发展、情绪情感的发生发展、思维的发展，以及意志和自我意识的发展等，都有各自的侧重，都存在同前后阶段的联系性和连续性。

双向思维　单向思维的对立概念。由此及彼和由彼及此，是思维过程的两个相反的方向。若以其中一个方向的思维叫做正向思维（或顺向思维），则另一个就叫做反向思维（或逆向思维）。正向思维和反向思维（顺向思维和逆向思维）合称双向思维；对两个互为相反方向的思维只顾及其中一个，就叫做单向思维。传统的数学教学非常重视单向思维的教学，对双向思维则多有忽视或轻视。事实上，许多数学问题的研究与求解过程本身就是双向的，而且在多数情况下，两种过程的繁简难易往往相差较大。如果重视双向思维的教学，那就不仅使学生学习到更多的解题方法，从而有所选择，而且也是培养学生全面思维能力和多元思维能力的重要途径之一。例如，在概念思维中，下定义和作划分就是一对双向思维。其他如，特殊与一般，具体与抽象原命题与逆命题等，都存在双向思维问题。

幻觉　在没有刺激的情况下感觉器官所产生的一种不正常的知觉。例如，无人讲话而听到讲话声(叫做幻听)，眼前无物而看到某些形象(幻视)等。幻觉多为精神病症状，但正常人在将入睡时或极度疲劳时偶尔也会发生幻觉。

幻想　一种想象。主要是在个人主观愿望或意志的支配下发生，并且不顾及能否实现的一种自由想象。符合现实、可望而且可及的幻想是理想。理想是积极向上的人生的重要动力，是青少年立志成才、艰苦奋进的导师。脱离现实、可望而不可及的幻想是空想。空想带来的后果是悲观失望、态度消极和意志消沉。

正向思维　见双向思维。

本能　是动物遗传的、具有保证个体和种族生存的生物学意义的复杂的无条件反射活动。如鸡孵蛋、鸟筑巢、蜂酿蜜、蜘蛛结网等。本能是由于动物在个体适应环境的过程中形成的暂时联系，在生活条件经常稳定的情况下遗传给后代所形成的。

本质属性　作为一种客观事物，其属性是很多的，甚至是穷举不尽的。但就其所处地位和相互关系而言，属性之间也并非是完全“平等”的。它们往往有表面与内在之分，有片面与全面之别，有的能够派生其他属性，也有的为其他属性所决定。在事物的属性中，那些由其可以决定、导出或派生其他属性的属性，叫做事物的本质属性。例如，一元二次方程（即方程$ax^2+bx+c=0$，$a\neq0$）有很多属性：①是整式方程；②含有一个未知数；③未知数的最高次数是2；④是一个等式；⑤左端或者是一个二次三项式，或者是一个二项式，或者是一个单项式；⑥未知数用字母x来表示；等等。其中属性①②③等三个属性，对于其他属性而言，就是内在的、全面的属性，其他属性或者由它们推出，或者由它们决定，所以是本质属性。本质属性的作用是：它们能够使其所反映的事物同与其相近的其他事物，从根本上严格区别开来。客

观事物的本质属性不是唯一的，也不是绝对的。研究的出发点不同，就会对同一事物抽象出不尽相同的本质属性。其依据是等价命题的客观存在，同时这又是同一概念存在的依据。例如，对平行四边形来说，若从边的平行关系着眼，可以把“两组对边分别平行”作为它的一个本质属性；而若从边的平行与垂直等两种关系去考察，则又可以把“一组对边平行且相等”作为它的一个本质属性。在这儿，“两组对边分别平行”和“一组对边平行且相等”是两个相互等价的命题。

布尔代数　又称逻辑代数或二值代数。一种带有二值运算的代数系统，由英国数学家G·布尔（1815～1864）创立。布尔把代数的概念和方法应用于传统逻辑的改造中，从而获得一个既是新的逻辑（数学逻辑）、又是新的代数(逻辑代数)的结果。1847年，布尔发表《逻辑的数学分析》，标志着布尔代数的诞生。1854年又发表了《思维规律研究》，这两本书奠定了布尔代数的基础。布尔代数成功地将人类的一个简单思维问题（命题逻辑中的思维问题）数学化了。近几十年来，布尔代数得到广泛应用，成为自动化系统和计算机科学的一个重要的数学工具。

布鲁纳学习理论　又称认知—发现说。是美国心理学家布鲁纳以结构主义为哲学基础，在托尔曼和皮亚杰研究的基础上提出的一种学习理论。要点是：①强调学科的基本结构的学习。他认为人的认识活动是按照一定阶段的顺序形式，发展成为一种结构进行的。人的认识活动形成抽象的逻辑结构，掌握了最基本的定义，就能广泛运用，成为人们应付高度复杂的环境的一种基本手段。②强调基础学科的早期学习。他认为学生应该尽早尽快地学习许多重要学科的基础知识。他甚至强调高等数学的概念、社会科学的基本知识，都可以用直观的方式教给小学低年级学生。③提倡广泛使用发现法进行学习。他主张让学生独立思考，通过自己主动地学习来组织材料，发现知识，掌握原理。布鲁纳的学习理论，反对行为主义者对人的行为作简单化、机械化的解释，而强调人的学习特点，是有可取之处的。

平面思维　即二元坐标思维。它同线性思维、立体思维、多元思维等概念一样，都不是建立在严格的科学意义的基础上的思维分类，而是用以区分思维空间大小的对比概念。所谓平面思维，意即思维的依赖因素比线性思维多一维，就象两条直线垂直相交可以建立坐标平面一样，多一维依赖因素的思维也好象形成了比“线”广阔得多的思维平面。无疑，思维空间由“线”到“面”，开阔得多了，也复杂得多了。

归属动机　一种以隶属他人或团体并接受其影响为目标的动机。具有这种动机因素的儿童和青少年的学习和其他行为，在一定程度上是在追随家长、教师或团体，以便得到他们的认可，并成为家庭或某团体的成员。来自父母和教师的诱导、赞许或认可，来自同辈人的赞许和认可，分别是儿童和少年归属动机形成的一个强有力的外部因素。

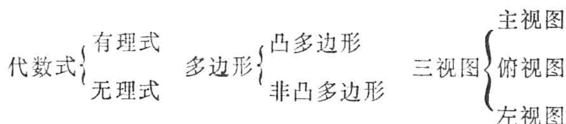
目的　人所期望实现的某种行动结果。目的在意志行动中起着极为重要的作用。目的的吸引力越大，人所产生的动力越大。目的愈清晰明确，人们也就愈易制定出达到这种目的的行动纲领。目的愈具体深刻（富社会意义），则被这种目的所引起的毅力也就愈强大。积极的行动目的可以使人生更加积极。

外化　主观的内部的心理活动向外部活动形式的转化。当一个人想把自己的观点、愿望向别人表达时，必须先在头脑中利用表象和言语符号进行思维，从而把自己清晰的思想以符合文法的和逻辑的、别人能理解的外部言语形式或动作表现出来，这就是外化。例如，学生在课堂上的口头回答问题和课外书面作业，就是该学生的思想、认识的外化。

外延　见内涵。

外倾　见内倾。

外延定义　同内涵定义相对。凡是通过界定概念的外延（包括范围）来揭示概念、明确概念的定义方法所产生的定义，概称外延定义。概念的内涵和外延，是概念本质的两个表现方面，它们有区别，也有联系：内涵可以决定外延所涉及的每一个具体对象，由外延所涉及的所有具体对象也可抽象出内涵的每一条本质属性。因此，从外延方面入手，对概念作分类（划分），即按一定的规则和方法，列举概念外延所包括的全部对象，也就等于间接地揭示了概念的内涵。从这个意义出发，把揭示或界定概念外延的分类（划分）结果，等价地叫做概念的外延定义，是合乎逻辑的。例如，“正整数、零、负整数统称整数”是整数的外延定义；“有理数和无理数统称实数”是实数的外延定义；“锐角三角形和钝角三角形合称斜三角形”是斜三角形的外延定义；“整式和分式统称有理式”是有理式的外延定义等。一般地说，把对概念的同一层分类（划分）所得到的全部种概念，外延无交叉地列举出来，并用精确的语言文字加以概述，即形成概念的外延定义。中学数学概念的外延定义，一般取两种表述格式：一为叙述式，例如前举关于整数、实数、斜三角形和有理式的外延定义；一为表解式，例如



等等。其中，半括号表示：外延包括。中学数学中的外延定义还如：分数，整式，有理数，有理式，实数，有理方程，二视图，二次曲线，基本初等函数等。

外现语言　见外部语言。

外部语言　又称外现语言。是表现于个体外部用以交际的语言，分口头语言和书面语言两大类。口头语言是个体凭借自己的发音器官发出的有声的和用以表达思想的语言。口头语言又分对话和独白两种形式。对话是指两人以上的语言交际活动，如聊天、辩论、座谈等；独白是个体自己进行的

语言活动，如讲课、做报告等。书面语言是借助文字、符号、图表以及其他书面信息以表达思想的语言。它具有独白的特性，无法借助动作和表情来加强表现力，只有借助修辞来强调表达作者的感情。但书面语言可使作者与读者重新返回到已阅读感知的文字上，仔细琢磨和推敲，因此具有展开式和精确性两大特点。

主从关系 概念间的联系方式之一。概念间的主从关系，包括两种情况：一是属概念和它的种概念之间的关系，即属种关系。例如，四边形和平行四边形、相似三角形和全等三角形、整式方程和一元二次方程、集合和空集、排列和全排列之间的关系等。二是普遍概念和它的单独概念之间的关系。例如，无理数和 π、自然数和 2 、三角形和三角形 ABC、一元二次方程和方程 $x^2-x-2=0$ 之间的关系等。以上两种情况可概述为：如果甲概念的外延包括乙概念的外延，那么，甲概念便叫做乙概念的主概念，乙概念则叫做甲概念的从概念。主概念和它的从概念之间的关系，叫做主从关系。处于主从关系下的两个概念，即主概念和它的从概念，统称主从概念。概念间的属种关系一定是主从关系；主从关系却不全同于属种关系。一般说来，每一数学概念总是处于自己特定的主从关系中。对将建立的新概念，把它放到它所处的主从关系中去考察识别，是捕捉概念、形成概念和定义概念的基本方法。概念间的主从关系，特别是其中的属种关系，是逻辑思维和数学思维的基本观念之一。

主从概念 见主从关系。

立体思维 即空间思维。立体思维比平面思维又增加一维空间，因而是发生在三维空间内的心理活动过程。正如平面思维多用以类比思维由“线”到“面”的横向开阔发展一样，立体思维则多用以说明思维由“面”到“体”的升华、层次提高或纵深发展。人们生活在三维空间中而难能培养形成立体感，若人的思维空间能开扩到三维或三维以上，那将会使人的认识境界达到一种极为可观的水平。

必要条件 如果“若非A则非B”是真命题，则称A是使B成立的必要条件。例如，在真命题“在两个三角形中若不是至少有一组对应边相等，则两个三角形不全等”中，条件“在两个三角形中至少有一组对应边相等”就是使结论“两个三角形全等”成立的必要条件。就是说，两个三角形要全等，没有“至少有一组对应边相等”这个条件是不行的。此即所谓“无之则不然”。另一方面，条件“至少有一组对应边相等”即使具备，却也不能保证两个三角形一定全等，也即所谓“有之则未必然”。“无之则不然，有之则未必然”可以作为判别必要条件的简明准则。

记忆 对感知过对象的标记有效地存储于大脑，并能在一定条件下重现（或回忆），或在它重现时能确认曾感知过它（再认）的过程。它包括识记、保持、再现或再认等三个分过程。识记即识别关于感知对象的标记（特点及其相互联系），它的生理基础为大脑皮层形成了相应的暂时神经联系；保持即暂时神经联系经历一段

时间的延续；再现或再认则为暂时的神经联系重放标记信息。通过识记和保持可积累知识经验，通过再现或再认可恢复过去的知识经验。各人记忆的快慢、准确、牢固和灵活程度，可能随其记忆的目的任务、对记忆的态度和记忆方法而异；各人善于记忆的内容则随其观点、兴趣、生活经验为转移，对同一对象的记忆，各人所牢记的程度也往往不同。记忆是大脑的重要机能之一。根据其内容，记忆可分为形象记忆、逻辑记忆、运动记忆和情绪记忆；根据记忆形成或保持时间的长短，记忆可分为瞬时记忆、短时记忆和长时记忆。在中小学数学教育中，数学教学对记忆的研究刚刚在开始，经验表明，人们多数自幸于数学知识的逻辑记忆，而对形象记忆则往往视为禁区或高不可攀。其实，它正是数学教育研究中大有可为的一个课题。

皮亚杰心理学派 见日内瓦心理学派。

发生定义 一种特殊的属种定义。通过发生定义法而获得的定义。发生定义的结构也符合典型属种定义的定义公式，但它对被定义概念的种差不是直接明确地指出，而是将其寓于被定义概念的产生或形成状况之中。或者说，发生定义的种差是被定义概念的产生或形成状况；被定义概念的种差完全可以从这种产生或形成状况中揭示出来。例如，代数式的值的定义“用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果”；方程组的定义“由几个方程组成的一组方程”；圆的定义“线段OA绕它固定的一个端点O旋转一周，另一个端点A所经过的封闭曲线”，多边形的定义“由一些线段首尾顺次连结组成的图形”，有向线段的数量的定义“将有向线段的长度加上正负号所得的数”等，都是数学发生定义。其中，“用数代替……字母，计算所得”、“由……方程组成”、“线段OA…旋转一周，另一端点所经过”、“由…线段…组成”、“将有向线段…加上…所得”等，都是某“发生”或“形(组)成”过程，这一过程决定了被定义概念的个性（种差）。稍微有别于典型属种定义的是，发生定义中的属概念，一般说来远不如典型属种定义那样直观、鲜明。例如，代数式的值的定义中的“结果”是属概念，实际是某种数，由于“结果”不是纯数学概念，所以整个定义的“数学化”形象也受到影响。类似现象在教学中应予以关注，适当采取一些强化定义公式印象的措施。

发现学习 一种学习方法。指在教师不加讲述的情况下，学生依靠自学去获得新知识、寻求解决问题方法的学习方法。此处“发现”有两种含义：一为“靠发现而学习”（指通过发现过程进行学习的方法），二为“以发现为目标的学习”（即把学习发现的方法本身作为学习的目的）。发现学习的基本过程是：掌握学习课题、制定设想、提出假设、验证假设、发展和总结。为了把原发现过程改编成适合学生进行再发现过程的教材，应做到：①缩短原发现的过程；②简化原发现过程中出现的启示性的思维过程；③把原发现过程中出现的大量的可能性，精简为少数几个主要的选

择。发现学习能使学生产生兴奋感，树立自信心，有利于培养学生提出问题解决问题的能力，有利于更好地理解、掌握、保持和运用所学的知识。但是，学生的"学习发现"和科学家当初的科学发现毕竟不是一码事，也不是所有教学内容都适合于发现学习方法，特别是，发现学习需要学生具备相当多的知识经验和一定的思维水平。因此，关于发现学习的许多理论和实践问题，还有待进一步研究。发现学习的倡导者是美国心理学家布鲁纳。参见**布鲁纳学习理论**。

发现思维 同整理思维是一对对立概念。有两种发现思维：一种是在科学家、发明家、创新人才的创造发明过程中，导致他们发现新理论、新产品和一切新生事物的思维状态或模式。此种发现思维实际上就是创造性思维的别称，不妨叫做原始发现思维。另一种发现思维，是指在教学过程中，对将要传授的新知识（这些知识对学生来说尚属"首次发现"）故意创造一种"待发现"的准备状态，从而使学生在学习中明显地产生"发现"的快乐感，以提高学习兴趣，增强学习动力。此种发现思维不妨叫做教学发现思维。它实际上是一种激发学习兴趣的思维策略，既非对原始发现思维（创造性思维）的重复模拟，也不是自有特色的一种思维形态。整理思维是对原始发现思维（创造性思维）所获得的结果，进行逻辑整理和系统化的过程。其核心和实质乃是形式逻辑思维。教学发现思维和整理思维对于激发学生的学习兴趣，培养学生的原始发现思维（创造性思维）能力和整理所学知识从而系统把握知识的能力，具有十分重要的意义。

发散思维 又称辐射思维或多向思维。是收敛思维（或辐合思维、会聚思维）的对立概念。其主要特征是：①从某一点出发，以为起点；②沿着不同的可能或方向去进行思考；③根据情况及时改变思考方向。发散思维具有两种可贵的功能：一是保证寻求的答案跳不出自己的搜索范围，从而从根本上避免了"无解"的可能；二是使寻求答案的过程因重"求异"，不固执于某些死胡同而大大缩短。发散思维的展开方式一般有两种：一种是穷举式，就是由同一来源的信息，并列地展开可能出现的各种输出的联想，使联想具有自由性，可以使思维进行横向拓广；另一种是演绎式，就是由同一来源的信息，根据某种推理的必然性展开演绎思考，从而使思维向纵深层次发展。实际应用中，往往是两种方式交互使用、结合使用。人的创造能力往往同发散思维能力密切关联，所以有"发散思维是一种创造性思维"之誉。数学解题过程中，特别是对那些"多答"、"多解"、"多种情况"的题目，尤其需要发散思维能力。而在科学研究中，在漫无边际的寻求过程中，人的发散思维能力就更可贵了。

对象 见事物。

对立关系 概念间的联系方式之一。如果同一属概念下的两个种概念的外延互相排斥，而且它们的外延之和小于它们的属概念的外延，那么，这两个概念间的关系就叫做对立关系。处于对立关系下的两个概念叫做对立概

念。外延互相排斥也就是内涵中的种差互相否定。因此，欲判断两个概念的外延是否互相排斥，可以根据它们的种差是否互相否定来决定；反之也然。例如，优弧和劣弧，外延互相排斥，而且它们的外延之和小于其属概念圆弧的外延（圆弧不仅包括优弧、劣弧，还包括半圆），所以是一对对立概念。其他还如：真分数和假分数，正数和负数，斜线和垂线，等边三角形和不等边三角形，多项式的降幂排列和升幂排列，增根和减根，锐角和钝角，和与差，积与商，等式和不等式，指数和对数，三角函数和反三角函数，奇函数和偶函数，递增和递减，必然事件和不可能事件等，都是对立概念。由于对立概念的外延之和小于它们的属概念的外延，因而，在一对对立概念之外，必存在与它们同属，且与它们处于并列关系中的其他种概念，这样一些种概念，叫做一对对立概念的中间概念。例如，零是正数和负数的中间概念，1是真分数和假分数的中间概念，等腰三角形（仅有两条边相等的三角形）是等边三角形和不等边三角形的中间概念，和差积商是幂和方根的中间概念等。

对立概念　见对立关系。

矛盾关系　概念间的联系方式之一。如果同一属概念下的两个种概念的外延互相排斥（或者种差互相否定），而且它们的外延之和等于它们的属概念的外延，那么，这两个概念之间的关系就叫做矛盾关系。处于矛盾关系下的两个概念叫做矛盾概念。例如，属概念有理式下面有两个种概念：整式和分式。由于整式和分式的外延互相排斥，而且所有整式和所有分式合并起来正好等于全部有理式，所以整式和分式处于矛盾关系中，是一对矛盾概念。其他如，单项式和多项式，无理数和有理数，直角三角形和斜三角形，同号和异号，共面直线和异面直线，凸多面体和凹多面体，有穷数列和无穷数列等，都是矛盾概念。一般地说，如果某概念仅有两个种概念，那么这两个种概念便处于矛盾关系中。对于这样两个概念，否定其中一个（外延或种差），便等于肯定另一个。矛盾概念这种“非此即彼”的特性，正是否定概念之所以存在的逻辑依据。矛盾概念同对立概念的主要区别是，在两个矛盾概念之间不存在中间概念，而后者存在中间概念。因此，在一对对立概念之间，不存在“非此即彼”的特点：否定其中一个，并不全同于肯定另一个。这也就是对立概念中的任何一个，都不是另一个的否定概念的理由。矛盾关系与对立关系是一对矛盾概念，两者都是并列关系的特例。

矛盾概念　见矛盾关系。

动机　引发人的行为的原因或机理，常常以主观兴趣、愿望或理想的形式表现出来。它是引起和维持个体行为，并将此行为推向某一目标的主观意志的具体表现。动机可由事物、事物的表象、概念或语词、信念或道德等引起。就某些简单的行为而言，动机和目的很难区分，甚至就是同一个东西。在比较复杂的行为中，动机和目的往往具有鲜明的区别：目的是所要得到的结果，动机则是为何要得到这一结果的主观原因。因此，人的同

一种行为，尽管目的相同，但却因动机不同而具有不同的心理内容，并获得不同的社会评价。人在自觉地实行每一个具体行为之前，必然明确地意识到实行这一行为的原因和预期达到的目的。人有时还会产生复杂多样的、甚至互相矛盾的动机，这时就会产生思想斗争，直到使其中的一种占优势后，才能最后确定下行为的目的。

动作 指向某一对象和追求达到某种目的的肢体运动。动作与简单运动不同。简单运动仅仅依赖于机体的运动机能，而动作则带有社会性质，而且受社会条件所制约，是人对周围现实生活保持平衡的外部表现。人的动作，从简单的“对象动作”如用肥皂洗手、用毛巾擦手等，逐步发展到有目的和指向人的“行为动作”。按行为动作是否符合社会的行为准则，可以判断人的行为举止是否得当。

动机功能 指动机在人的行动中的作用、地位。动机有三种功能：第一是引发人的活动；第二是维持这一活动；第三是引导这一活动向某一目标进行。例如，当某人口渴时，“渴”就会引起他产生找水喝的活动。如果水未找到，这一活动就会继续进行。在找水的活动中，水是追求的目标。其活动方向就是朝着水或与获得水有关的事物进行。得到水后，找水活动即告结束。类似“渴”这种动机引发、维持和引导的行为，叫做动机性行为。动机性行为随动机的满足（或获得目的物）而终止。这样使动机、动机性行为以及获得目的物这三者构成了一个周期，叫做动机周期。

动作记忆 见运动记忆。

动作技能 指通过练习巩固下来的自动化的完善的动作活动本领。如写字、骑自行车、游泳等。人的行动是由一系列动作组成的，是由各种运动器官和知觉器官联合支配的。最初这些动作并不协调，由于练习，实现动作的程序模式就巩固确定下来，熟练起来，某些动作就从意识支配中解放出来，变成自动化动作而无需动脑一一支配。自动化并非全无意识支配。动作技能自动化的成分越大，动作则越完善。形成动作技能有以下特征：一系列局部动作联合成一个完整系统；多余动作和紧张状态消灭；视觉控制作用的减弱和运动控制作用的增强；提高了行动方式的灵活性。

动物思维 按照“开动脑筋就是思维”的界说，参考心理学关于思维的基本论点以及思维科学关于“研究有意识的思维”的主张，可以断言：动物也有思维。例如，1793年，拿破仑的战马玛利亚曾将不幸中弹昏迷的拿破仑抢救回营。这表明，玛利亚能随机应变，心理水平达到了相当高级的程度。又如，本世纪70年代，美国心理学家用手势语训练的黑猩猩，掌握了三、四百个词汇，不仅能同主人交谈，而且见了鸭子，还创造了“水鸟”这个词。但是，动物思维毕竟是一种低级的思维，与人类思维有着本质的不同：①动物思维缺乏抽象概括能力，不能形成科学概念；②动物思维不能认识事物的本质规律，不能改造自然；③动物思维没有明确的目的；④动物思维毫无预见性；⑤动物思维只能指挥自己的直接行动，想不到使用工具进行间接的加工。研究动

物思维对于人类心理和思维发展的研究，具有十分重要的意义。因此，世界各国许多心理学家，几十年如一日地坚持动物思维的实验、训练和研究，为人类心理和思维研究提供了大量资料。

老三论　见三论。

机制　又称机理。指有机体、某种机械、一个社会系统或某些自然现象的结构、原理、功能和其他规律等。例如，计算机的机制，大脑的思维机制等。

机理　见机制。

机械识记　也叫非意义识记。与意义识记相对，主要特征是机械重复，即，通过机械重复实现的识记。某些材料本身缺乏意义上的联系（例如π、e、lg2、sin20°等数值），在识记时除尽量依附于某种外加的意义联系作为辅助手段外，主要依靠机械重复。对某些有意义联系的材料（如数学公式、定理、法则等），也必须在理解意义的基础上进行多次机械重复，才能更有效地加以识记。

机器思维　用机器模拟人的思维，是人工智能的另一种表述方式。这涉及到人工智能进行思维模拟的几种不同途径和方法：一是生理学途径；二是心理学途径；三是工程技术途径。人工智能研究的第二种途径和第三种途径都是用机器——电子计算机模拟人脑的思维活动，即采用相应的技术手段，把人的某些思维功能赋予机器，让机器代替人的某些思维活动。也有人指出：机器只能按程序照章办事，机械地背诵答案，而人则根本不同，他通过自己的思维活动能够独立地回答问题，并理解其中的含义。这就是说，机器究竟能否真的具备象人一样的思维能力，还是一个未解之谜。

机能心理学　欧美现代心理学流派之一，出现在上个世纪末和本世纪初，由*W*·詹姆斯（1842～1910）和*J*·*D*杜威（1859～1952）创立，*J*·*R*安吉尔（1869～1949）继承和发展，是美国心理学的主流。它与构造心理学相对立，主张心理学研究意识的机能或功用，反对心理学仅仅分析意识的内容；强调心理、意识是有机体适应环境的产物，认知和行为是人类适应环境的手段或工具。

再认　又称“认知”。对感知过的对象再度呈现时仍能认识的过程。再认有不同的速度和程度：对感知过的事物有时能立刻认识，有时则需要一定的回忆时间；有时只能模模糊糊地加以识别，有时则完全错认。准确完好的再认必需依靠良好的识记。

再现　又称重现。同“回忆”相近。已掌握的知识能回想起来，已学会的动作能再实现，已经历的情感能再体验的过程。它是以感知过的对象不在当前出现而能恢复原有知识经验为特征的。再现的速度和准确性，决定于所掌握的知识经验是否概括成体系和是否经常应用。再现发生困难时，须进行追忆。追忆则要通过意志努力，利用各种线索，引起必要的联想，进行适当的推理，逐步恢复遗忘了的知识经验。数学科学的特点和中学数学教材的演绎体系，特别需要学习它的人能够及时“再现”已学习并掌握的概念、命题、法则和论证模式。

再造想象　想象的一种或想象层次性

的具体表现。是根据语言的描述或图样、符号、标记等的示意，在大脑中建造出相应的新形象的心理过程。例如在解题过程中，根据已知条件和其他某些因素，摆出算式、列出方程或画出相应的图象（图形）等的构思过程，主要就是依靠解题者数学思维的再造想象来实现的。数学思维的再造想象与一般抽象思维、一般形象思维和文艺思维的再造想象相比，均各有异同，应加以区别。再造想象遵循两条规律：第一，一个人的已有表象越多、越鲜明，再造想象的内容就越丰富；第二，正确掌握词与实物标志的意义，再造出来的新形象就比较符合客观的现实事物。借助于再造想象，人们能丰富自己的感性知识，吸取别人的经验，甚至能形象地接受从未感知过或者无法感知的事物。再造想象是数学美感、文艺欣赏、吸取知识、交流经验、相互了解所必要的一种心理活动，在日常乃至科学生活和数学教学中应用广泛。

再现性思维　见习惯性思维。

协同论　新三论之一，现代思维与数学思维十分关注的一个领域。联邦德国著名理论物理学家H·哈肯在研究激光理论的基础上，于1973年首次提出协同的概念，1977年写出《协同学导论》一书，正式建立了协同学。协同学对不同领域采用分析类比的方法，研究各种复杂系统共同演化的规律，是一门以研究完全不同类型的系统中存在的某种共同本质特征为目的的综合性横断学科。它不仅是自然科学研究的前沿课题，而且对社会科学的发展有着重大的意义。协同论研究一个与外界有物质、能量、信息交换的开放系统，由于其内部各子系统之间的相互作用，在外控制参量达到一定阈值时，通过子系统之间的协调作用和相干效应，从无规则混乱状态变为宏观有序状态的机理和特点。这样一个系统，变量可能成千上万，影响因素也不可胜数，怎样描写它在临界点附近的行为呢？哈肯发现绝大多数变量在临界点附近阻尼大，衰减快，对相变整个进程没有明显影响；只有一个或几个变量不仅不衰减，而且始终左右着演化进程。哈肯将状态变量分为两类，一类是阻尼大、衰减快的快变量，另一类是左右相变的慢变量，也叫序参量。序参量个数非常少，系统的相变特点完全由序参量决定，所有系统无一例外。协同学利用严格的数学推理分析了控制参量在系统相变中所起的作用。结果表明，当控制参量使系统偏离平衡态较少，系统内部的变化趋势线性地依赖于产生变化的作用力时，系统不会发生结构或功能的转变；当控制参数达到一定阈值时，系统性质发生变化，系统通过内部的相互作用形成新的有序结构；当控制参数继续变化时，系统有可能再出现新的结构，最终形成混沌而丧失一定的功能和结构。控制参量的大小不同，使系统具有不同性质。控制参量使系统处在平衡态较近的线性区，虽然系统也会受到各种扰动，但只能使系统回到原来的均匀状态。控制参数超过临界值太远，也会使系统走向混沌，仍然形不成新的有序结构。只有当系统被控制在临界点附近，才能通过内部的协同作用达到有

序。从无序向有序转化的过程中，各种系统的具体转化形式可能不同，但它们有着共同的特点。协同学把系统转化的机制归结为协同。系统内部众多子系统之间存在着复杂的非线性相互作用，子系统的运动形式也非常复杂。协同学把子系统的复杂运动分成两种类型：一种是子系统独立的无规则运动，另一种是有序的互相关联引起的运动。两种运动形式的斗争和彼此消长，构成了整个系统的宏观相变运动形式。当独立运动占主导地位时，系统处于无序状态；一旦环境控制参数达到某一临界值，子系统之间协同动作，自我组织，系统的关联运动就会占主导地位，这时系统很快进入有序状态。子系统局部运动，通过协同可以形成优于部分运动之和的整体宏观运动形式，子系统之间的相互制约，也会使系统整体呈现为杂乱无章。总之，协同论研究开放系统普遍存在的有序和无序及其转化规律。协同论揭示的事物协同与不协同规律，有着极其广泛而深刻的意义。

厌倦　又称精神疲倦。通常是由重复、单调、乏味的工作所引起的精神不佳状态。厌倦也可能由于我们曾经感兴趣的事物或工作引起。如看书、读报、游览等。厌倦的具体表现有：心烦意乱，不愉快，疲劳，乏味，消极。

有形存在　任何事物，不管它是人的感知限度以内的对象，还是这个感知限度以外的对象，均呈现一定的状态，都有自己区别于其他对象的存在方式。状态、方式或者其他类似的东西，都叫做形。可以断言：万物皆有形，形就是结构模式。而不管这种形是表面的，还是内在的；客观的，还是微观的；看得见摸得着的，还是看不见摸不着的；直观的，还是理想的；具体的，还是抽象的。总之，既存在常态直观感觉有形的形，也存在常态直观感觉无形的形（即常态直观无法感知的形）。在人的一般感知限度内，凭直观觉得有形的存在，叫做有形存在，又称直观存在或具体存在；在人的一般感知限度内，凭直观觉得无形的存在，叫做无形存在，又称理想存在或抽象存在。例如，五个学生，五支铅笔，五本书，五个苹果等，各都是一种有形存在、直观存在或具体存在。而自然数“5”则是一种无形存在、理想存在或抽象存在。又如，所有长方形的门、桌面、书页等，都是有形存在、直观存在或具体存在，而数学概念“矩形”则是一种无形存在、理想存在或抽象存在。再如，画在黑板上、纸面上的矩形图形等一类几何图形，具有两重意义：当它什么意义也不表示地随便画出时，它是有形存在、直观存在或具体存在；而当它表示某种几何意义，并且被按所表示的意义画出以后，它就是对无形存在、理想存在或抽象存在的有形模拟、直观模拟或具体模拟，也就是对常态直观感觉无形的形的有形模拟，简称模拟图形。模拟图形的直接作用是，通过这类图形，本来直观感觉无形的东西，现在直观感觉有形了；理想的东西直观化了；抽象的东西具体化了。

有意识记　与无意识记相对。有预定目的，采取一定的方法步骤去主动努力实现的识记。在一般情况下，有意

识记要比无意识记的效果好。数学教学中的全部知识，中小学各门学科所教学的知识，都要求通过有意识记来实现教学目的。

存在 哲学上的存在，是指思维或意识之外的物质世界的一切，又称实在，具体存在。存在是不以人的意志为转移的客观实在。在哲学看来，作为第一性的客观存在的对立物，或第二性的东西，乃是思维或意识。思维或意识不是客观实在，而是存在或客观实在的反映。在思维科学看来，思维或意识也是一种客观实在的东西。就是说，宇宙中，世界上的一切都是存在：它可以是具体的——一件事物、一个现象都是一种具体存在；它又是抽象的——所有具体存在等于某个抽象的存在。

成就动机 一种以高标准要求自己力求取得活动成功为目标的动机。也是一种重要的学习动机。成就动机的基本特点：①总是指向一定的目标，总是力图取得某种成就；②在遇到障碍和困难时，成就动机使人敢于正视挫折与失败，表现出极大的韧性和毅力；③具有复杂的层次性，从幼儿到儿童、青少年、成人及至老年，都有各自不同内容的成就动机，应区别情况对待；④人的成就动机是整个动机体系中的一种动机，它与求知、自我提高、创造以及赞誉、遵从、归属等动机交织在一起，相互渗透，相互作用。

同一关系 概念间的联系方式之一。指外延完全相同的两个概念之间的关系。处于同一关系下的两个概念叫做同一概念。例如，圆和方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图象，函数 $f(x)$ 和多项式 $f(x)$，自然数列和等差数列 $a_n=n$（n 为正整数）等，都是处于同一关系下的一对同一概念。概念间同一关系的存在，基于两个事实：其一，客观对象的本质属性不是绝对的，也不是唯一的。例如，对等边三角形来说，三条边相等可以作为它的种差，三内角相等也可以作为它的种差，两种表述命题是等价的。其二，对于同一对象的认识，由于观察角度不同而往往形成不同概念，这些概念的本质属性不同但却等价，所以在外延上是完全相同的。初中数学中的同一概念，如：平方和二次方，立方和三次方，无理方程和根式方程，直线 $y=kx+b$（$b\neq 0$）和一次函数的图象，“小学学过的数”（即算术数）和正数，矩形和长方形，相似比和相似系数等。中学数学教学要特别注意把意义不同但却相近、外观相似或名称相仿的两个概念，与同一概念混为一谈。例如，比和比例，相反数和倒数，代数式和多项式，约去和消去，乘方和幂，化去分母内的根号和化去根号内的分母，根和解，命题和定理，直角和90°，圆和圆周，π和3.1416，体积和容积等，都不是同一概念。两个同一概念，在记述概念或推理论证过程中，可以互相代替。

同一概念 见同一关系。

回忆 含重现、再现之意。它与再认一起，构成记忆的一个基本环节（分过程），是识记和保持的结果。分解开来看，回忆和再认的含义有着明显的区别：再认发生在再现或重现之后（或之际），回忆则是企图造成再现

或重现，企图如果失败（回忆不成功）；便谈不上再认。根据是否有预定目的，回忆分有意回忆和无意回忆两种。从回忆的途径曲折情况看，回忆有直接回忆和间接回忆之分。作为现代人的一种经常发生的心理活动，不存在什么单纯、孤立的回忆；一般说来，回忆不是所曾识记的材料的简单重现，而往往是借助于联想、再认等多种心理活动和在某些思维方式方法的参与下实现的。因此，通过回忆而再现的东西，很可能是“走样儿”的近似物，这已是引起人们注意的事。

年龄特征　各年龄阶段儿童和青少年身心发展的一般特点。儿童和青少年在各个年龄阶段的身心发展有不同特点，在生理方面、身长、骨骼、肌肉、神经系统等都有不同的发展和机能差异；在心理方面，知觉、记忆、思维、情感、意志、能力、爱好、兴趣等心理活动也各有显著的特点。同一年龄阶段的儿童和青少年有其一般的身心特点，同样又有个别差异。一般说来，在一定社会和教育条件下，儿童心理年龄特征具有相对的稳定性和可变性。这是因为儿童的脑结构和机能的发展有一个大致稳定的顺序和阶段，同时，还因为儿童的心理发展受社会和教育条件的制约，而社会和教育条件是经常变动的。教育者不仅要考虑，而且要积极地发展受教育者的年龄特征。

迁移　见学习迁移。

优越感　是精神分析心理学派首先提出的一个术语。奥地利心理学家阿德勒认为，人的总目标是追求“优越性”，是要摆脱自卑感以求得优越感。他认为，所谓优越感就是千方百计追求权力，企图凌驾于他人之上的主观愿望。现在，所谓优越感，一般是指在生理方面（如体形、身高、相貌等）、心理方面（知识、能力、特长等）以及威信声誉等方面，自以为长于别人的心理状态。傲慢、固执、自我欣赏等，都是优越感的一些消极表现。

优选思维　为着某种目的而进行的弃劣存优的筛选的心理过程。优选，体现着人们对某种意志的竭力追求，是人类社会乃至大自然发展过程中普遍存在的重要法则。宇宙发展“大自然”时期的原始优选，其目标和动力是物质的“相对平衡”，而物质的“绝对运动”则是原始优选的唯一表现和全部过程，生物出现以后和人类出现以前这个时期的宇宙发展，原始优选已为自然优选所取代。自然优选法则是：物竞天择，适者生存；适者为优，优则生存。现在，自然优选仍在延续，人类也还不时蒙受自然选择所降临的灾难。但是，在地球上，在地球附近的有限空间，人类已经基本上成为自然的主人，人们的思维优选已经基本替代而且将越来越替代自然优选。任何一种优选思维，其结构均由优选目标、优选标准、优选条件、优选方法和优选效果等五个部分有机组合而成。优选思维的基本属性有：①多维性。即，要求把问题考虑得复杂一些，使优选建立在所有有关因素上面。②相对性。即，优是相对的，不存在绝对的优，优与非优经常处在转化、变化中。③层次性。就是说，

优选思维活动好象爬台阶、登楼梯，必须一层一层地上，一层一层地逼近最佳效果。④反馈性。即，任何一种优选思维，从获得第一个优选效果起，中间经过若干效果的对比，直到逼近或实现最佳效果止，都是一个反馈过程。⑤历时性。任何优选思维，都是一个过程，都需要一段相应的时间。⑥反向性。就是说，优选思维可以正向进行，也可反向实施，究竟依何而行，可视具体问题而定，并由数学变换给予保证。优选思维，人皆用之，层次水平有别而已，它是人的民族的和社会的基本素质之一。人的优选思维基本素质，具体由优选思想、优选知识和优选能力所组成。

仿效 人凭借于抽象认识与记忆能力而模仿效法某些社会行为（个人的或群体的）的一种心理过程。它是人类普遍存在的一种心理现象。人类仿效大自然中的生物体的某些行为而形成的专门理论，叫做仿生学。而“教育仿生”或“仿生教育学”研究，必将对教育发展产生深远的影响。

自卑感 精神分析心理学派首先提出的一个术语。奥地利的阿德勒认为，自卑感多起源于幼年时期由于无能而产生的不胜任和痛苦的感觉。现在，一般指个人由于某些生理缺陷或心理缺陷以及其他原因（如智力、记忆力、知识、性格、身体等欠佳）而产生的轻视自己、贬低自我的心理状态。自卑心理容易使人孤僻、沉默、消极、破落，甚至抑制尚存的心理上的某些积极因素。而当某种缺陷受到客观轻视、嘲笑或污辱时，主观的自卑感很可能从一个极端跳向另一极端，或者说发生突变，以致出现暴怒反抗或自绝于人等畸形发展。在学校教育中，特别是在中小学各科教学中，某些学生的自卑感往往是阻碍学习进步的重要因素，因而是教师应当予以特别关注的学生心理之一。

自制力 意志品质之一。支配和控制自己的能力。一般有两种相互对立的表现：一是使自己去努力完成一项工作任务；二是抑制自己的某些不妥当的言论行为。抑制自己的言行就是忍耐、克制，但与怯懦毫无共同之处。自制力是人生个性修养的一种重要手段或保证，因为，由失去自制的人组成的社会是不堪设想的。培养自制力应当是中小学各科教育都应重视的共同任务之一。

自由联想 联想的一种，与控制联想相对。是在不受任何限制下的联想。

自居作用 西方心理学界用语。一种自我防御或机制的安慰作用。即把个人所钦佩或崇拜的人的特点、某一团体或某一主张视为己有，用以掩饰自己相应缺点或不足，并感到欣慰和满足。自居作用有两种：一种近似模仿。例如低年级学生注意观察出名的高年级学生的言行，并按他们的方式行动。另一种是利用别人的长处、荣誉等来满足自己的愿望。例如一些人喜欢跟名人交往，并以名人的声誉受人称羡而使自己感到愉快、自豪、满足。

自我意识 又称自我感觉。意识的形态之一，也是人的意识的一个重要特征。是人对自己以及自己和周围事物的关系的感知能力，也是人认识自己和对待自己的统一。自我意识是通过

自我观察、自我评价、自我体验、自我监督、自我反省、自我控制、自我教育等形式的有机结合使用而实现的。自我意识的增强与发展途径，主要有：①通过他人而认识自己。②在行为的自我反省和自我教育中对比自己对自己的要求，从而获得动力。③通过直接的和间接的自我认识，个人对自己心理和身体特征的研究而形成自我意识。直接的自我认识是通过自我观察发现形成的；间接的自我认识是通过分析自己的活动结果来完成的。自我意识还是个性发展的一个充分条件，特别是积极主动的自我意识。

自我感觉　见自我意识。

行为　有机体在环境影响下所引起的内在生理和心理变化的外在反应。德国心理学家勒温认为，行为是人及环境的函数，即B（行为）$=f(P\cdot E)$，P代表人，E代表环境。美国心理学家吴伟士等人则将行为分析为下列公式：S（刺激）—O（有机体内的生理及心理因素）—R（行为反应）。人的行为都是由一定的动机所支配的。

行为主义　美国现代心理学主要流派之一。基本理论由J·B·沃森(1878～1958）于1913年提出。他主张心理学是研究动物和人类行为的自然科学，以“刺激—反应”公式作为行为的解释原则，吸收巴甫洛夫的条件反射学说，认为意识是无法直接观察的，不能作为心理学研究的对象。主张抛弃所有历史遗留下来的含有主观成分的概念，以“辨别反应”代替感觉，称情感为“内脏反应”，将思维视为“无声的语言”。近几十年来，行为主义在美国又有新的发展，代表人物还有C·L·赫尔（1884～1952）、E·C托尔曼（1886～1959）和B·F斯金纳（1904～）。托尔曼试图在刺激（自变量）和反应（因变量）之间引进认识、期望、目的等作为中间变量。斯金纳坚持不要中间变量，反对内因论，认为强化行为、改变行为的主要动力是有机体“操作”环境的效果。而赫尔则力图从方法着手，抛弃“观察—归纳”法，采取“假设—演绎”法，以期把心理学改建为近似几何学的演绎科学。

全方位思维　见多元思维。

会聚思维　见收敛思维。

企图　完成未来行动的心理准备。它是在人的意志行动作出决定之后和意志行动之前这段时间内存在的主观愿望。企图是引向为将来的行动的打算，是意志行动的必要环节，而且也是由脑中的设计过渡到实际行动的一个重要环节。

创造力　根据一定的目的任务，通过能动的思维活动，产生新知识、构造新事物的能力。创造能力不是单一的心理活动，而是由许多能力有机结合而成的一种复杂的高级的综合能力。创造力与智力关系密切。创造能力强的人通常均具有较发达的智力。但是，智力卓越的人却不一定具有卓越的创造力。创造力的培养，可从以下几个方面着手：①激发求知欲和好奇心，培养敏锐的观察力和想象力，培养善于进行变革和发现新问题的能力。②重视思维的流畅性、变通性和独特性。③培养发散思维和辐合思维

（或收敛思维）。④急骤性联想（又译脑轰法）也是培养创造能力的一种有效方法。

创造想象 想象的一种。根据一定的目的、任务和要求，在大脑中建造新形象的心理过程。在新技术、新产品、新作品出现之前，在创造者的头脑中必先构成这种新事物的形象；而这种新形象的创造则是以创造者以往已积累的知觉材料为基础的。创造想象的特征在于“创造”，即首先制造出过去还不曾存在的东西。数学科学上一个新概念的形成，数学教学中一种新的教学程序的设计与实践，都是创造思维的结果。创造想象是人类改造世界的理性思维的重要组成部分。

创造性思维 按智力品质分类所得的一种思维形态，其对立概念是再现性思维或习惯性思维。创造性思维是一种具有开创意义的思维过程，它追求发明、创新，产生新颖的、前所未有的思维成果，给人们带来具有社会或个人价值的产物。其主要特征是新颖、独特。创造性思维具有以下良好品质：①胆大多思。敢于怀疑，百折不挠。②善于联想。纵向深入联想、横向拓宽联想、逆向反思联想等，启动快，灵活多变。③多中选优。发散思维、多元思维、优选思维是创造性思维的基本支柱，保证着创造性思维的多向性选择。④步履超前。超前设计，高速实施，效率高，跨度大。⑤智慧优势。具备三种超凡的能力，即知识杂交能力、思维统摄能力和辩证分析能力。有人把创造思维活动分解为五个阶段，就是：直观感知，表象联想，分析归纳，对比优选，建构设计。不少学者认为，创造性思维的基本形式是对比、想象、直觉和灵感。美国心理学家J·P·吉尔福德则认为“求异”是创造思维的重要成份。创造性思维能力强的人，对于客观事物中存在的明显失常、矛盾和不平衡现象，极易产生强烈的兴趣，不常为人们所理解；他们对事物的感受性特别强，善于抓住别人容易漠视的问题，推敲入微；他们意志坚强，比较自信，易反抗旧习俗，自我意识强烈，能认识和评价自己以及别人的行为和观点。创造性思维的培养可参考以下几种行之有效的做法：①激发求知欲和好奇心，培养观察力、想象力、变革和发现力。②重视思维的流畅性、变通性和独特性。③强调发散(辐射)思维和收敛（辐合）思维的分工合作。④急骤性联想（又称脑轰法、风暴冲击法）也是培养创造思维能力的有效方法。

多血质 见气质学说。

多元思维 也即全方位思维。一般说来，思维类似一个多元函数，存在许多变量，一个变量则构成一维空间。多元思维就是对应于多个因素，建立在多维空间上的心理过程。多元思维也是用以说明或区分思维空间大小以及思维复杂性的一个描述性概词。在思考和解决某个问题时，能够把与此问题相关的所有因素都顾及在内，能够从每种因素的角度去修正问题的结论，从而使问题在多维空间中得以处理，就可以说这是一种多元思维。数学解题过程中，对于题目中的已知、未知等多种因素，粗心的学生往往舍此顾彼，丢三拉四，不能做出全面、

完整、客观的答案；实际上就是多元思维能力较差。

多向思维　见发散思维。

交叉关系　概念间的联系方式之一。如果两个概念的外延有一部分而且仅有一部分重合（或相同），那么，这两个概念之间的关系，叫做交叉关系。处于交叉关系下的两个概念，叫做交叉概念。例如，矩形和菱形就是一对交叉概念，它们的外延重合部分是正方形（正方形既是矩形，又是菱形）。又如，二次式和三项式也处于交叉关系中，它们的外延重合部分是二次三项式。对于同一个概念，从不同角度按不同标准进行分类所得的种概念之间，常常会出现这种外延交叉关系。例如，分别从“角”和“边”两种角度对三角形进行分类，按角分所得的直角三角形和按边分所得的等腰三角形之间，便存在外延交叉，从而有等腰直角三角形的概念。

交叉概念　见交叉关系。

充分条件　如果“若A则B”是真命题，则称A是使B成立的充分条件。例如，在真命题“对顶角相等”中，条件“对顶角”就是使结论“相等”成立的充分条件。就是说，如果两个角具备了“是对顶角”这个条件，就一定能保证结论“相等”的成立。此即所谓“有之则必然”。另一方面，相等的两个角并非它们一定“是对顶角”不可（比如两个角都是直角也能相等），也即所谓“无之则未必不然”。“有之则必然，无之则未必不然”可以作为判别充分条件的简明准则。

充要条件　如果“若A则B”和“若非A则非B”都是真命题，则称A是使B成立的充分而必要的条件，简称充要条件。例如，因为“在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等”和“不在角的平分线上的点到这个角的两边的距离不相等”都是真命题，所以，条件“（点）在角的平分线上”是使结论“（点）到这个角的两边的距离相等”成立的充要条件。就是说，所谓充要条件就是有了它结论成立、没有它结论便不成立的那种条件。“有之则必然，无之则不然”可以作为判别充要条件的简明准则。

问题解决　个体克服（回答、解释、解决、探讨等）生活、学习、实践中一些较突出的矛盾的综合复杂的心理过程（主要是思维活动）。教育心理学则着重探讨学生在学习知识和运用知识当中的问题解决。有的心理学家认为，问题解决的过程，存在四个阶段：发现问题；分析问题；提出解决问题的假设；检验提出的假设。本世纪40年代德国心理学家K·敦克尔通过实验认为，问题解决过程的总趋向是先确定问题的范围，指出可能的解决方向，再逐步缩小范围，提出问题解决的一般方法和具体特殊方法，一步步进行推理以逼近问题的解决。近年来，利用高速电子计算机的信息加工来探讨问题解决过程取得很大进展，可以解释某些问题解决中一部分过程的情况。关于影响问题解决效率的因素，主要有：已掌握的有关知识；心智技能发展水平；动机和情绪；刺激呈现的模式；思维定势；个性特点等。

并列关系　概念间的联系方式之一。

同一属概念下的、外延无重合现象的若干种概念之间的关系，就是并列关系。包括两种情形：（1）对于同一属概念，按同一标准所进行的同一层分类而得到的各个种概念之间的关系是并列关系。例如，对代数式，按“是否含有关于字母的开方运算”的标准分类，在所得到的有理式和无理式两个种概念之间，就是并列关系。再如，将三角形分为不等边三角形和等腰三角形，或者分为直角三角形和斜三角形；将数分为正数、负数和零；将数列分为有穷数列和无穷数列；将极值分为极大值和极小值等，所得的各个种概念之间，外延均无重合之处，因而都是并列关系。（2）设对概念A进行第一层分类所得到的各个种概念分别是A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）；对A的第二层分类，将A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）分别分得的种概念是A_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）……，那么，对A的某层分类所得到的每一种概念（如A_{1j}，$j=1, 2, \cdots, n$）则可以替代它们共同的属概念（A_1），并与其属概念的每一并列概念（$A_2, A_3, \cdots, A_m$），均形成并列关系。例如，按角分对三角形进行的两层分类中，第二层分类所得的锐角三角形和钝角三角形，都可以象它们的属概念（斜三角形）那样，与第一层分类时所得到的直角三角形构成并列关系。基于此，故曾存在三角形可直接分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形等三种种概念的分法。又如，有理式和无理式是并列关系，而整式和分式（它们都是有理式的种概念）同无理式之间也都是并列关系。再如，正整数，零，负整数，分数，无理数等三个层次的种概念之间都是并列关系，它们当中的任何两个概念，其外延都不存在重合现象。处于并列关系下的一对或一组概念，叫做并列概念。

并列概念　见并列关系。

关系　事物之间相互作用、相互影响的联系状态，是逻辑学和数学的重要概念。例如，在两个实数之间就存在着等于、不等于、大于、不大于、小于、不小于等关系。对于两个既定的考察对象，出发角度不同，则有各种不同的关系。例如，在两个圆之间，就其面积而言，有大于、等于或小于关系；就其相互位置而言，则有外离、外切、相交、重合、内切，以及一个包含另一个等关系。在逻辑学和数学中，各种常见关系常用一些简明的符号来表示。例如，个体x与个体y的相等关系记作$x=y$，个体x与类M之间的从属关系记作$x \in M$。又如数学中的等于、不等于、大于、不大于、小于、不小于等关系，分别记作$=$、$\neq$、$>$、$\ngtr$（或$\leq$）、$<$、$\nless$（或$\geq$）等。一般的，x与y存在某种关系R，则记作xRy。见数学关系概念。

关系符号　见数学符号。

兴奋　动物体内某些组织（如神经、肌肉、腺体等）受到刺激后，神经活动便由相对的静止状态转变为显著的活动状态，或由较弱的活动转变为较强的活动，这种现象叫做兴奋。兴奋是一种积极的生理过程，常常与“冲动”作为同一概念来使用。兴奋在中枢神经系统中可以扩散，也可以集

中。与兴奋对立的状态称为抑制，其表现为兴奋的减弱或消失。兴奋可以与抑制相互转化，相互诱导。高级神经活动的基本过程就是兴奋过程与抑制过程。

兴趣 一种重要的心理特征。指对某种事物或进行某种活动的积极倾向。有先天性的兴趣，但更多的兴趣是在社会实践或读书学习中发生、发展起来的。有不知不觉地自然发展起来的兴趣，也有按某种目标培养成功的兴趣。有由事物或行动本身引起的直接兴趣，也有由事物或行动的目的和任务引起的间接兴趣，有产生于活动过程中而在活动结束后即消失的短暂兴趣，也有成为个性特征的长久稳定的兴趣。兴趣对于一个人选择前进方向及其相应能力的发展，常常起决定性作用。普遍认为，学生学习的直接动力主要是兴趣。但是，不管是工作还是学习，兴趣的决定性作用与这种作用的持久性却不完全是一码事。人的兴趣就其所向主要在物质方面还是在精神方面，往往是判断其文明程度与思想境界的重要着眼点。

论证 又称证明或逻辑证明。命题有真有假，推理能够导出新命题，但其真假却不一定令人确信不疑。数学的基本任务之一就是确定命题的真假。根据某些已知的真命题，来阐明并断定一个新命题的真实性的思维过程，叫做论证。其实质，是若干推理过程的有机联系与结合。任何一个符合逻辑的数学论证，其结构均由三个部分组成：①论题，即需要论证的命题；②论据，即论证过程中所依据的已知真命题；③论述，即论证命题的推理过程。数学论证中的“已知”，主要是命题直接给定的已知真命题，而在论证过程中将依据的上述已知真命题之外的某些数据和公理、定理、公式、定义、性质等真命题，虽未在“已知”中一一列出，但也属已知内容。数学论证中的“求证”，就是将要论证其真实性的命题。数学论证中的“证明”，即“论述”的全过程。论证必需遵守一定的规则，这些规则主要是：论题必须明确、论证过程中不准偷换论题；论据必须真实可靠；论据必须充分；不准循环证明（即用未加证明真实性的命题为依据，去证明有待证明真实性的命题）。逻辑论证不仅在发现真理方面，或在宣传真理方面起着重要作用，而且在教学过程中，在引导学生学习认识前人所发现的真理，特别是在学生模拟发现真理过程的学习中，对于培养学生的逻辑思维能力和其他有关能力，具有不可忽视的作用。因此，在教学中，降低教学要求，只要背诵结论，不要论证过程的做法，是极其有害的。

收敛思维 又称辐合思维或会聚思维，是发散思维（或辐射思维、多向思维）的对立概念。其主要特征是：①思维的出发点不是唯一的，思维的依据可以来自许多可能的方面，可以灵活地选择；②思维的矛头不管来自哪个方向，必须指向共同的一点。对于收敛思维的作用，一般有两种理解：一是认为这是一种封闭式思维形态，多种灵活的思路总是被归结为传统的、习惯的一种，是创造思维的扼杀者；另一种理解正相反，认为收敛思维的力量在于分散力量的会聚，也即

类似透镜的聚焦作用。两种理解实际上是由收敛思维特点的两个极端表现所致。可以这样认为，发散思维在寻求问题解决的途径方面是必要的，也是有效的；而收敛思维在最后解决问题的攻坚战中，却可以发挥集中优势的作用。

观念　在人的思维过程中，那些当时并没有感知着的物体或过程（或它们的个别特性）的意象，叫做观念。有时也指表象。它是人脑的思维活动的产物。人的观念与客观物质世界有关，它是由物质世界的性质以及人的物质生活条件决定的。因此，观念的实质及其根源，不是要到思维活动中去探求，而是要到社会存在中去发掘，任何观念都是社会存在的客观性的主观表现。另外，观念还作“思想意识”、“出发点”解。

形　见有形存在。

形式主义　数学基础研究中一个学派的观点，其代表人物，一说是德国的D·希尔伯特（1862～1943）。形式主义认为，数学的真理体现在它的不矛盾性上面。只要能证明，由数学公理出发永远推不出矛盾，数学便是可信的。为此，主张先将数学系统公理化，公理以及规则都用形式符号加以表示，对这些形式符号不赋于任何内容。这个公理系统叫做对象理论，而要证明它的不矛盾，须使用另外一种有内容的理论，叫做元理论。在元理论中，纯粹根据数学的推理规则而作符号变化。只须在元理论中证明这种符号变化永远不会推出互相反对的两个公式就行了。为使这个证明可靠，在元理论中只须限于使用有穷方法。后来，哥德尔证明了，在元理论中只使用有穷方法是不可能证明比它更强的理论不矛盾的。因此，形式主义的理论须作适当修改。但是，不管怎样改，形式主义的基本观点——把数学的公理系统看作没有内容的而其真理性则体现在它的不矛盾性上——则是始终没有改变的。

形式定义　同内涵定义和外延定义并列的另外一类数学定义。将数学概念的本质结构运用数学符号加以模拟仿造，从而形成数学概念形式化的理想形象，用这种形式化理想形象来定义概念的方法，叫做形式定义法，由此产生的定义就是形式定义。例如，“方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）叫做一元二次方程”，“形如$a+bi$（$a, b\in R$）的数，叫做复数”，“函数$y=kx+b$叫做x的一次函数，这里x是自变量，k，b都是常数，且$k\neq0$”以及现行中学教材关于幂函数、指数函数、对数函数、算术（几何）平均数、二阶行列式、三元线性方程组等概念的定义等，都是数学形式定义。这些定义，既能从其分解出概念的内涵（由此可以把它看作是内涵定义），又可对其按规则进行分类（由此可以把它看作是外延定义），却又不是从内涵或外延出发（由此看，它既非内涵定义，又非外延定义），而另行构造的第三类定义模式，它的出发点在于被定义概念的本质结构。形式定义的特点是，它撇开内涵外延，唯从概念所涉及的每一单独概念出发，抽出所有单独概念的共同结构，尽可能地运用数学符号模拟表出概念的本质，从而为定义那些难以进行逻辑分解的

复杂概念（特别是高等数学概念），或者定义那些没有必要进行逻辑分解的高深概念，提供了更为实用的方法。数学形式定义的出现，还为人们列举普遍概念（特别是其中那些包括许多乃至无穷多个单独概念的普遍概念）的全部外延对象，在分类方法之外，又提供了一种更加实用严密的理想方法。形式定义同内涵定义和外延定义，是为明确概念而从三个不同角度去揭示概念本质意义所得的三类并列定义。

形式逻辑　又称普通逻辑或形式逻辑思维。是从既成思维的外在关系方面来研究思维形式结构及其规律的科学。形式逻辑研究思维是把思维中的各个具体的概念、具体的判断和具体的推理，当作既成的思想，暂时抛开它们所涉及的具体内容，专门抽出它们的形式结构（即逻辑形式）来进行研究。思维形式结构就是思想的各个组成部分的联系方式，主要有概念、判断和推理等三种。形式逻辑除去研究概念、判断、推理等思维形式结构及其规律外，还研究一些简单的逻辑方法，如定义、划分、分析、综合、对比、归纳、演绎、假说、实验等。形式逻辑和辩证逻辑都研究思维形式；但形式逻辑从抽象同一性角度研究思维形式，即把思维形式看作既成的相对稳定的东西，因而通常把形式逻辑思维叫做抽象同一性思维或静态思维。与此不同，辩证逻辑则从具体同一性角度研究思维形式，即把思维形式看作对立统一、矛盾运动和相互转化的东西。

形象记忆　也可叫做表象记忆。以感知过的对象的形象为识记内容的记忆。它着重识记事物或现象的外部特点和整体象征，如物体的大小、形状、颜色、声音，人物相貌、表情、动作，陈设品，音乐，气味等。由于工作实践或工作性质的不同，形象记忆常常因人而异，例如有人长于视觉形象记忆，有人长于听觉形象记忆（盲人尤其鲜明），有人则可能长于嗅觉或味觉形象记忆，一般人的形象记忆则是混合性质的。形象记忆在文艺工作者中使用比较普及、应手。现代思维科学认为，形象可有具体与抽象（理想）之分。在一般感知限度内，人的感觉器官所能直接获得的对象的形象叫做具体形象，其主要特点是直观、具体，所谓一看就知，一听就懂；从具体存在的对象中加工提炼出来的理想存在对象的想象表象，叫做抽象形象或理想形象。数学科学的概念、命题和推理论证，都是理想存在的对象。因此，对数学科学来说不是“有没有”形象和形象记忆的问题，而是如何开展研究和在数学科学、数学教育实践中加以普及应用的问题。

形象思维　又称直感思维。是人类在社会实践中形成并发展起来的，同抽象思维并列的受意识控制的基本思维类别之一。形象思维主要着眼于事物的感性整体，并在关于事物表现的综合考察中，运用画面、场景、音响、声调、图表、语言文字和符号等直感表象信息，间接地反映事物的本质规律。形象思维的基本元素或砖瓦材料，是事物的有机整体为感官所摄取的表象或其名称，主要功能是以“直

感”动人。形象思维对信息加工的主要方式是取“典型化”，在考察事物的过程中主要取综合法，善于横向穿插，思路宽阔，富有延展性，灵活性。由于形象思维在思维过程中与人的感性器官密不可分，因而受人的主观意志影响较大。有的学者根据思维发展的不同水平，把形象思维分为两个阶段：一是在抽象思维尚未形成前的形象思维叫做具体形象思维。这是指脱离开感知和动作而利用头脑中所保留的事物的表象所进行的思维，特点是总离不开具体形象。二是抽象思维形成并与具体形象思维相互作用、渗透和合作而发展了的形象思维，特点是所谓“抽象的形象”的出现和应用，不妨叫做抽象形象思维阶段。这就是现代人的现代思维的主要特点：形象中有抽象，抽象中也有形象。这一理论最有说服力的证明就是数学形象的出现和数学思维的发生与发展。纯数学对象都是典型的抽象形象，因而数学思维是典型的抽象形象思维。如果数学教师在教学中未能将自己的认识水平达到这样一种高度和掌握相应的思维科学知识，那么，他的教学潜力的大半部分，就不可能得以充分挖掘和发挥。

形式（逻辑）思维 见形式逻辑。

运动记忆 又称动作记忆。以动作或运动形象为识记内容的记忆。是形成言语、劳动、音乐、舞蹈等运动性技能技巧的心理基础。例如，工人和运动员对相应动作的方式、速度、幅度、顺序、节奏等必须从其总体形象上加以识记，才能使记忆更有成效。中小学各科教学之所以必须由教师到讲台上讲课，而一般不取播放音象之方式，考虑到运动记忆更符合青少年之年龄特征，不能不认为是一个重要原因。实际上，运动记忆是一种形象记忆。

运算符号 见数学符号。

技巧 又称熟练。通过反复练习达到迅速、准确、运用自如的技能。它是在基本技能的基础上，在练习中巩固下来的、已经“自动化”、完善化了的行动方式。如刚刚学会解应用题的中学生，可以说已经基本上掌握了应用题解题技能，但要形成技巧或熟练，却还需要解大量的应用题，这是一个相当长远和艰苦地学习过程。技巧的形成既能巩固和发展原有技能，又能形成新的技能。

技能 掌握和运用某种专门技术后所获得的具体能力。例如写作技能、板书技能、运算技能、解题技能、绘画技能等。技能是一种具体的专门的能力，可以看作是作为心理学基本概念的能力最临近的种概念。它是运用专门知识或经验去完成某一技术活动的过程的概称。技能强调行动的目的，对行动的条件要求则比较宽松。例如掌握技能的人可以不懂这种技能的原理，但必须运用这种技能去完成与它相对应的任务。因此，中学数学教学和小学数学教学关于一般技能的要求是有显著区别的。

抑制 见兴奋。

抑郁质 见气质学说。

求知欲 人的一种内在的精神需要——认知的需要。人在生活、学习或工作中感到缺乏相应的知识时，就产生探究新知识或扩大、加深对已有知识的认识的倾向；这种情境重复多

次，认识倾向就逐渐转化为个体内在的强烈的认知欲求，这就是求知欲。求知欲强的人自觉地、积极地追求知识。求知欲与好奇心不是一码事。好奇心仅仅是由被感知对象的奇特之处而引发的一种短暂的兴趣，而求知欲则是目的明确、行动积极持久的一种心理特征。求知欲是构成学习动机的一个重要心理因素。研究表明，对求知欲强的学生来说，以学生自学为主的所谓“学生控制型教学”，其效果高于“教师控制型教学”的效果。对求知欲弱的学生来说，结果则相反。

求同思维　求异思维的对立概念。出发于不同起点而追求同一种目的或结果的思维。凡能达到“求同”目的的任何心理过程，都是一种求同思维。例如收敛思维（或辐合思维、会聚思维）就是一种求同思维。又如在整个教学中，教师、干部、职工和学生均各司其职，但奋斗目标是一致的，因此，全体师生员工对自己工作学习的任何思考，都应以求同思维为指导。

求异思维　求同思维的对立概念。寻求与现有结果不同答案的心理过程。求异思维的突出特点在于“求异”，它有两种含义：一是求“同中之异”，即对有些已认为解决了的没有疑义的结论再生怀疑，持分析批判态度，以求新的理解和认识；二是求“独到之异”，即不仅对尚未涉猎的领域进行探索，而且还在通常被认为无所作为的领域另求新意。凡能达到“求异”目的的任何心理过程，都是求异思维。例如发散思维（或辐射思维、多向思维）以及反向思维（或逆向思维）对于正向思维（或顺向思维）而论等，都是求异思维。

否命题　见命题的四种形式。

否定判断　见判断。

否定概念　在一定的条件下，否定对象的某种属性便等于肯定对象的另一属性，因而如同肯定对象的属性一样，也能达到认识的目的。例如，说“除数不能是零”，是对某数集的局部否定，这一否定同肯定判断“除数只能取零以外的任何数”是等价的。但前一否定式更简明，突出了除数对这个特殊数的忌讳。根据概念在反映对象的属性时，是采取否定式，还是采取肯定式，概念可区分为否定概念和肯定概念。否定对象存在某种属性的概念叫做否定概念，肯定对象存在某种属性的概念叫做肯定概念。中学数学概念的绝大多数，都是肯定概念。出现在初高中教材中的否定概念，如，相反数，不等式，整式方程，无理数，异次根式，斜线，平行线，不等边三角形，同心圆，空集，真子集，补集，零次多项式，不可能事件，随机事件，互斥事件，异面直线，空间四边形，直线和平面平行，平面的斜线，两平面平行，斜棱柱，球的小圆、环面等。肯定概念中含有否定判断，或者否定概念中含有肯定判断的现象，是常见的现象。例如，在肯定概念“二次函数”定义中的“$a \neq 0$”就是一个否定判断；又如，若把“平行线”看作是否定判断，那么，其定义中的“在同一平面内……的两条直线”便是肯定判断。确定一个概念是肯定概念还是否定概念，其依据是看概念定义中的主要判断是肯定式，还是否定式。此外，还

有一些不加定义的常用“准”数学名词、术语，如，反向，不存在，无意义，不大（小）于，非负数等，都可认为是否定概念。但是，在判别一个概念是肯定概念，还是否定概念时，却不要只看名称，而是要看它的含义的陈述方式。例如，一般认为“无理”是对“有理”的否定，但“无理式”（在中学数学中的定义）却不是一个否定概念。

时间知觉 关于客观对象的时间特征（经历、延续、顺序等）的知觉。迄今为止，人们关于时间概念的认识还是极其微小而浮浅的；人对时间的知觉往往是间接的。例如，听觉能使人准确辨别微小的时间间隔，有节奏的运动能使人辨别时间的延续和速度。但是，正如任何事物都离不开自己所在的空间一样，世界上宇宙中没有一件什么东西不与时间发生联系。时间观念与时间知觉密切相关，而人类文明的标志之一就是时间观念之强烈。

听觉 辨别物体声音特性的一种感觉。物体因振动而产生的空气波动（声波），从外耳传入，作用于耳鼓膜，使其振动，进而通过中耳听小骨的振动引起耳蜗内感觉细胞的兴奋，再经听神经传入大脑皮层听区，便产生听觉。听觉是整个听分析器活动的结果。统计表明，在一个人通过各种感觉所接受的全部知识信息中，通过听觉所接受的知识信息仅次于通过视觉所接受的知识信息。而在课堂教学中，通过听觉传递知识信息则常常是第一位的。

伴随语言 表达思维和情感的一种无声信息。它既非有声语言，也不是无声的书面语言，而是借助视觉来进行交际的某些姿态。大致有如下几种：①眼神。眼睛可以“脉脉含情”，也可以“怒目而视”。人称眼睛是心灵之窗，它可以表达不止一种复杂的思想和感情。②面情。人的面部表情是十分丰富的，喜怒哀乐均可“形于色”，让人一目了然。③体势。分为体态与手势两类，都能独立表达或辅助表达某些思想和感情。伴随语言还有一个了不起的优点：在有声语言和文字不同的两个民族之间，可以用它来交流某些思想感情；也可以用伴随语言来训练操纵动物。

条件反射 有机体在后天生活过程中经过学习而形成的反应形式，叫做条件反射。形成条件反射的一个最基本的条件是：一个无关刺激物和一个无条件刺激物在时间上一次或数次的相互一致大体同时发生。例如，铃声（无关刺激物）本来不会使狗分泌唾液，但如果在每次喂食物（食物是无条件刺激物）前打铃，经过若干次以后，狗听到铃声就会分泌唾液，这种以铃声为信号的刺激所引起的反应，就是条件反射。条件反射可以使动物更好地适应环境，保存和绵延种族。人的一切心理活动都离不开条件反射，但人的条件反射和动物的条件反射有本质上的不同。人的条件反射的形成、强化、减弱或消退都可以通过语言来实现，而且具有社会意义，这些都是动物的条件反射所不能比拟的。

系统论 “老三论”之一，是研究系统的模式、结构、功能、原则和其他规律，并对其功能进行数学描述的一

门新兴的综合性学科，是现代思维和数学思维极为关注的一个重要研究方向和领域。一般认为，美籍奥地利生物学家L•V•贝塔朗菲(1901～1972)于20世纪20年代明确提出普通系统论的基本思想，是系统论的创始人。系统论认为，所谓系统，是指一个要研究和处理的对象。系统是普遍存在的：一部机器，一项工程，一个学校、一个工厂、一个城市、一个机关，小至一个原子、分子，大至一个国家、社会、星球、太阳系……都可看作是一个系统。系统是由相互联系、相互作用的若干要素结合而成的、具有特定功能的有机整体，它不断地同外界进行物质和能量的交换而维持一种稳定、有序的状态。系统论的两个基本观点是：强调系统的整体性和注重从整体观念出发研究整体与部分的关系。它的一个著名命题是：整体的功能不等于组成整体的各个部分的功能的机械总和。按其性质划分，系统可分五类：①自然系统。即自然界本来存在的系统。如太阳系统，基本粒子系统，生态系统等。②社会系统。如一个国家，一个集团等。③思维系统。如一门学科，一种理论体系等。④人工系统。即为达到人类某种目的，由人类建立起来的系统。如交通，运输，文化，教育，卫生，经济等。⑤复合系统。即人工系统和自然系统组合而成的系统。如人一机系统，城市系统等。近年来，系统论的基本思想已经在中小学数学教育中得到宣传、学习和应用，从教学到管理，均获得一些可喜的成果。

系统原理 又称系统原则。有二义：狭义的系统原理即指整体原理，是系统论两个基本观点的再度概括。广义的系统原理又称“系统论三原理”，除去整体原理外，还包括有序原理和反馈原理。所谓整体原理，就是说，任何系统都是有结构的，没有结构的孤立部分是不能构成系统的。它认为系统的整体功能并不等于各个孤立部分的功能之和，而应等于各孤立部分的功能之和与各部分因相互联系而产生的功能的代数和。所谓有序原理，就是说，任何系统只有开放、与外界有信息交换，才可能有序；一个系统由较低的结构转化为较高的结构，称之为有序，反之为无序。所谓反馈原理，就是说，一个系统的输出信息反作用于输入信息，并对信息再输出发生影响，起到控制和调节的作用。

言传 见意会。

判断 抽象(辑逻)思维、数学思维的基本形式之一。思维在反映客观对象，对对象是否具备某一属性作出明确结论的过程中所采用的共同框架或一般模式。可概述为：肯定或否定客观对象具有某种属性的思维形式。例如，二加三等于五；三角形的内角和等于180°；方程是一个等式；算术根是非负数；正数大于一切负数；同圆的半径相等；等腰三角形的底角相等；无理数是无限不循环小数；奇函数的图象关于原点对称；长方体的体积等于它的底面积S和高h的积；终边相同的角的同一三角函数的值相等；零没有倒数；∞不是一个数等，就是几个数学判断。若将判断这种思维形式抽象为公式，则有：所有S都(不)是P。其中S叫做主项，P叫

做谓项，主项、谓项各代表某一概念。因此可以说，判断是概念与概念的有机结合。根据判断在确定一个对象是否具有某一属性时，是采取的肯定式，还是否定式，判断可以区分为肯定判断和否定判断两类，它们的公式分别是“S是P”和“S不是P”。前者如“a^2大于一切负数”，后者如“分母不能是零”。判断有真有假，通过论证或实践表明是正确的为真，反之则为假。例如，$\log_a(M+N)=\log_a M+\log_a N$就是一个假判断。判断还可分为简单判断与复合判断。不包含其他判断的判断叫做简单判断。就是说，在一个简单判断中，它的主项S和谓项P至少有一个不是判断。由几个简单判断结合而成的判断，叫做复合判断。就是说，在一个复合判断中，它的主项S和谓项P，至少有一个本身就是一个简单判断。

判断的真假 见判断。

快感原则 又称快乐感原则。各种自然冲动或愿望所固有的、寻求自我满足的倾向。按照弗洛伊德的观点，每个人从幼儿时期开始，就受快感原则指导。快感原则在人的一生中，一直在默默地作为每个人的指导原则。有些人一生却从未意识到快感原则对自己之存在。

完形心理学 一译格式塔心理学，欧美现代心理学的一个主要流派，由M·韦特墨（1880～1943）K·考夫卡（1886～1941）和W·苛勒（1887～1967）在1912年创始于德国。“格式塔”是德文Gestalt的音译，意谓组织结构或整体。此派认为心理现象最基本的特征是在意识经验中所显现的结构性或整体性。知觉不是感觉相加的总和，思维也不是观念的简单联结，音乐节奏或曲调是作为音乐的一定式样而整个被感知的。理解是已知事件旧结构的豁然改组或新结构的豁然形成。格式塔心理学根据一种所谓“心物同形”的理论，制定了一套意识与存在、主观与客观混淆不清的概念，如“心理物理场”“心理环境”等，来解说人的心理和行为。它的另一代表人物K·勒温（1890～1947）则借用现代几何学和拓朴学的术语，以同一性质的概念，如“生活空间”及其中“力”的强弱、向量、平衡等，来解释动机在行为上的作用和人格的动力结构。

证明论 又称元数学。数学逻辑的四个主要分支理论之一。是证明数学中各个分支学科或一些公理系统的协调性的理论。当非欧几何出现时，首要的问题便是证明非欧几何的协调性，只有证明了这一点以后才能确认欧氏平行公理是独立的，不能从别的公理推出。当时的证明是使用的解释法，即把非欧几何中的概念与关系在欧氏几何中作出解释，使得非欧几何的定理，经过解释以后变成欧氏几何的定理。如果非欧几何不协调，那么欧氏几何也就不协调了。这种解释法只能得出相对协调性，即非欧几何相对于欧氏几何的协调性。用这种方法是无法证明整个数学的协调性的，因为不可能找到比数学更可靠的理论了。因此，希尔伯特提出一个方案，即把整个数学，包括其公理及其推理规则，全部公理化，写成符号体系，然后用有穷方法证明这个符号体系的协调

性，即证明在这个符号体系中不可能推出“$0 \neq 0$”这一式子，这个叫做“希尔伯特规划”的设计，虽然由于哥德尔的工作，证明是不能实现的，但证明论的研究方向，对数学的发展却产生了巨大的影响。

评价思维 对已经做过或出现的事物的某种价值进行评议的心理过程。评价思维的特征有：①具有明确的评价标准；②具有明确的评价目的：弃劣存优，扬长避短；③必须保持评价的客观性，才能达到评价的目的。在数学教学中，特别是在解题教学中，评价思维是经常的，必要的。注意培养学生的自我评价思维能力，有助于在学习或解题的关键时刻，迅速做出正确的决择；或者未待碰壁而迷途知反，从而有助于提高学习效率和解题速度。

补偿作用 精神分析心理学派用语。指一定生理或心理上的缺陷和不足，由其他心理或生理上的优裕和多余所弥补或代偿。人可以通过补偿作用来弥补或减轻因自身缺陷和不足而造成的心理负担。例如，一个解题能力较差的学生，总想在其他方面胜过别人，而当他正式发表一篇论文后，心理上产生一种极大的安慰感，这就是补偿作用。

社会思维 个体思维的对立概念，指社会上的人们的集体的思维。社会思维不是个体思维的简单叠加，而是一定范围的人按照一定的内在规律相互联系、相互影响、相互作用的基础上所形成的一种具有共同特征的社会性思维。社会思维可以是团体的、集群的，也可以是阶级的、民族的。社会思维主要包括两层含义：（1）思维的社会性是思维的一个基本特点。人类思维作为一个整体，它是在社会性劳动、社会性交际中产生的，也是随着社会实践水平的发展而发展的；人类思维虽有个体差异，但在总体上受着社会发展水平的制约，思维的内容、形式、能力等，都受制于社会发展水平。（2）社会思维也是指社会思维的成果在个体思维形成和发展过程中的作用。个体思维的萌芽需要社会信息的刺激，一再证明这一点的是，同人类社会环境隔离的儿童和野兽抚养的儿童，没有一个会产生正常的人类思维。个体思维的发展也需要社会思维的成果——知识的滋养。个体的创造性思维的发展特别需要别人的思维信息的交流和刺激。这也说明了开放型思维环境的重要性，即只有不断打破封闭的思维习惯，从社会领域中广泛吸取有用信息，才能使个体思维得以充分发展，取得更为丰富的思维成果。

社会心理学 心理学的一个分支。研究个人心理与社会环境之间的关系。在社会环境对个人心理的作用方面，着重探讨风俗、公德、法律、舆论等对群众的影响；在个人心理对社会环境的作用方面，主要研究领袖言行对群众的影响。鉴于学校教育同社会环境之间的密切联系，中小学数学教学和其他学科的教学，都需要社会心理学基本知识的指导。

社会学习论 又称“造型论”，一种学习理论。这一理论试图使认知心理学与行为改变的原理相结合，阐明人怎样在社会环境中进行学习，从而形

成和发展其人格特征。这里的社会环境是指那种由人提供的功能性刺激，社会学习即对这种刺激的反应过程。这种学习涉及到一定社会条件下人与人之间的相互关系，强调他人的榜样作用，特别是家长、教师、同伴和其他模范人物所具有的学习楷模的作用。研究表明，儿童缺少这种学习将导致顺应不良。美国社会心理学家A·班杜拉、W·米切尔、N·E·米勒、J·多拉德、J·B·罗特以及A·W·斯塔茨等，是提倡这一理论的代表人物。社会学习论的主要特点：①强调人的行为是内部过程和外界影响复杂的相互作用的产物。②强调人有使用符号的非凡能量。如借助符号表现外部事件，与人远距离交往，借助符号进行设计等。③强调人有自我调节的能量。④强调人的思想、感情和行为不仅受直接经验的影响，而且也受观察的影响（观察别人的行为）。观察学习是社会学习的一个最重要的形式，前者与后者几乎是同义语。据认为，这个理论对培养人的准确技能、积极态度和良好行为，具有一定的意义。

识记 记忆的第一个分过程。指识别关于感知对象的标记（特点及其相互联系），从而积累知识经验的过程，它是保持的必要前提。根据有无明确目的，识记可分为有意识记和无意识记；根据识记过程中对被感知的材料是否建立在理解的基础上，识记又分意义识记和机械识记。

灵感思维 即顿悟思维。对于灵感思维，现有不少关于它的猜想性解释。一种“显意识和潜意识相互作用”的理论认为：①显意识、潜意识都是主体对客体的反映，是人脑这种特别复杂的物质的机能。②显意识、潜意识是人脑对客观世界反映的不同层次。可以驱使肢体并直接接受人体各部信息的为显意识，不能驱使肢体但可以间接接受人体各部位信息的为潜意识。③显意识和潜意识是相互作用的。据上认为：灵感思维同抽象思维和形象思维一样，都属于人脑这种特殊物质的高级反映形式。灵感思维的发展也有一个过程，它虽受控于显意识，但却酝酿于潜意识活动之中，在潜意识萌发酝酿灵感时，除潜意识推论外，还常有显意识功能的通力合作；当酝酿成熟时突然与显意识沟通而涌现出来成为灵感。所以，灵感思维是显意识与潜意识交互作用而相互通融的结晶。灵感思维是以它的突发性、偶然性、独创性、瞬时性和模糊性为基本特征的。它作为一种潜思维形式，即一种非逻辑思维，同样是人们理性认识中不可缺少的一种高级认识方式。另有一种观点认为：灵感，是在形象思维和抽象思维高度融合并且达到某种临界质量时，而暴发的一种思维“突变”形态。这种观点认为，在人类历史上，先有形象思维（实则是具体形象思维），后有抽象思维。从这个意义出发，可以说形象思维（具体形象思维）和抽象思维是人类思维发展史上的两个不同阶段（或层次）。思维发展的第三个阶段（或层次），则是形象思维（具体形象思维）和抽象思维相互渗透、紧密结合、难解难分、合二而一的更高阶段，这就是现代人的现代思维阶段。

所谓灵感，也只有在思维发展的第三阶段（或层次）才会发生。

现象　见“事物”。

现代思维　主要是指思维能体现现代科学所公认的一些最新思想观点。就现阶段而言，这些观点主要有以下几种：①系统观念。即对所要考察、研究或面临的问题，要从整体入手，在从整体的角度分析组成整体的各个部分及其与整体之间的关系的过程中，寻求问题的答案。②综合观念。即要从“树木”中看到“森林”，进而才能看到从“树木”中所不能看到的问题。现代分析通过许多先进的微观方法，为现代科学发展研究提供了丰富的素材，但是存在于宏观联系中的许多从未认识的问题，必须运用归纳方法，在综合考察中才能发现。③数学观念。参见“数学观念”。④时空观念。对时间、空间的感知程度，能否在时间空间中思考、研究问题，时空观念是否强烈，这是现代文明的一个重要标志。⑤创造观念。此外，旨在追求高效益的价值观念以及与时空观念不无联系的“预测观念”或“未来观念”也都被认为是现代思维极其重视的观念。

现代形式逻辑　见数学逻辑。

表象　在知觉的基础上所形成的感性形象。感知过的事物在脑中重现的形象，叫做记忆表象或表象。由记忆表象或现有感知形象改造成的新形象，叫做想象表象，记忆表象是在过去对同一或同类事物多次感知的基础上形成的，较有概括性：既有反映某一对象特性的个别表象，又有反映一类事物共同特性的一般表象。由于记忆表象的概括性，它不仅是事物形象的重现，而且是关于事物的感性知识，尤其是对客观现实的直接感知过渡到抽象思维的一个重要环节。记忆表象通常按照形成时的主导分析器之别，分为视觉表象，听觉表象、运动觉表象等。但任何表象都或多或少地带有各种感觉因素。要对经历过的有趣对象作绘声绘色的描述，须依靠记忆表象。在文艺创作和技术革新等创造性生活中，还须借助于想象表象。表象很可能是形象思维的基本元素或砖瓦材料。它与作为抽象思维的基本元素或砖瓦材料的概念相互对应。

表象记忆　见形象记忆。

抽象存在　见有形存在。

抽象思维　即逻辑思维。抽象思维系对形象思维而言。抽象思维着眼于事物的理性组合，并在关于事物本质的分析（解）考察中，运用概念、判断、推理和论证等理论表象信息，直接揭示事物的本质规律。抽象思维的基本元素或砖瓦材料是概念，主要功能是“以理服人”。抽象思维对信息的加工方式主要取形式化，在考察事物的过程中主要取演绎法，力求纵向逻辑联系，思路单纯，富程序性和确定性。由于抽象思维在思维过程中依靠但不拘泥于感官，而主要依赖理性器官，因而它所得到的结论往往是客观的。据中国心理学界的调查，我国在校初一学生的形式逻辑思维已占优势，到高二则日臻完善。有的数学教育学者则认为，在初中一年级，应在继续以具体形象思维为主的前提下，为向经验型抽象思维的形式过渡而奠定初步基础；从初二到高一，则是经

验型抽象思维能力的培养阶段；而理论型抽象思维能力的培养主要是在高中阶段的最后两年。

抽象概念　所谓抽象或具体，都是相对的，往往为人的感知限度所决定。感知限度较低者，是仅凭感官的直观能力去判断，于是有“看得见”、“摸得着”为具体，而“看不见”、“摸不着”为抽象的一般划分。如果人的感知限度能够建立在理想的某种水平的基础上，那么，许多直观感到抽象的东西，便可以转化为很具体的东西。变抽象为具体的一个重要途径，是使抽象得到的理想事物形象化，从而创立一系列的“抽象形象”，即理想形象，以充分发挥人的直观能力。如此，在扩大了的感知限度内，抽象的东西也可看成是具体的了。纯数学知识都是从具体存在中抽象得来的理想存在，其形象化研究尚处起始阶段。但是，在数学发展的历史上，人们已经有意无意地创造了一些形象化的方法，例如包括数学图表在内的符号化，就是一条十分有效和典型的途径。因此，许多比较抽象的数学概念、数学命题或数学推理，由于符号化等的作用而变得比较形象直观，即感到很具体了。这就说明，在纯数学抽象的层次上，也存在相对抽象和相对具体的问题，于是有数学抽象概念和数学具体概念之说。例如，中学数学的数，代数式、方程，四边形，圆，正棱柱，幂，方根，等圆，相反数，异面直线，数列等，都是一些在数学直观的层次上大有“看得见”、“摸得着”之感的数学实体事物，因而是数学具体概念。中学数学里面的抽象概念，主要有两大类，一类是反映某种数学过程的所谓过程概念。如运算，变形，乘方，合并同类项，解方程（组），解不等式（组），多项式的因式分解，恒等变形，分式的约分（通分），公式变形，开方，分母有理化，解三角形，黄金分割，坐标轴平移，命题运算，命题的或，命题的与，命题的否定，微分，积分等，都是数学过程概念，或称数学运算概念。另有一类数学抽象概念，是反映某些具体概念之间的联系方式的所谓数学关系概念。例如，相反，相等，不等，垂直，平行，对应，相似，位似，全等，相交，重合，同类，对称，余（补），切，割，离，接，等价，交、并，异面，渐近，共轭，整除，成正（反）比例，成比例，属于，不属于，映射，彼此互斥等，都是数学关系概念。数学抽象概念的抽象性，主要体现于以下两个方面：其一，就概念本身而言，抽象概念的存在，总是借助于或者依附于某些具体概念，才能显现、明确。例如，解不等式这个过程概念的定义是“求不等式的解的过程”，如果抽去“不等式的解”这一表示数学目的的具体概念，那么，“解不等式”便成了一个无从确定其意义的“空”过程或“不定”过程。又如，数学关系概念“相似”，若不同数学具体概念“多边形”等联系起来，以及“相交”概念若不同“线”、“面”等具体概念联系起来，同样是不可思义的。其二，从人的感知能力方面看，过程概念和关系概念相对于具体概念而言，前者呈动态、联系态，后者则呈静态、孤立态。显

然，前者要求感知者必需具有较宽的视角和一定的思维跨度，后者则对这些要求比较低，于是也便产生了前者抽象而后者具体的感觉。

抽象形象思维 见形象思维。

直观存在 见有形存在。

直觉主义 数学基础研究中一个学派的观点，代表人物是荷兰的L•E•J•布劳维（1881～1966）和A•海丁等人。它认为数学认识不依赖于逻辑和经验，它的唯一来源是数学思维中所固有的一种带构造性的直觉，因而否认排中律在数学论证中可以普遍使用。主张数学的前提是心智的构造：在直观地给定的自然数列上，仅用有限次构造性的方法建立数学。根据这个观点，数学的真正基础在于原始的直觉。直觉主义认为逻辑是数学的一个分支。直觉主义逻辑认为，一个对象仅证明它存在是不够的，还必须具体地给出，或给出一定方法，按照这一方法，任何数学对象总能在有穷步骤内把它构造出来。

直觉思维 既非根据已有知识而推出，也没有什么不容置疑的推导程序，而是在很短的时刻内能对客观事物作出相当准确的下意识判断。例如，笛卡儿创立解析几何，就是受益于梦中一个直觉的启示。一些猜想、猜断和猜测，多靠直觉。由于直觉的确对人的认识做出过巨大的贡献，所以人们也把直觉看作一种能力，一种理智活动视为一种思维状态，甚至当作创造性思维的一个关键性环节。直觉思维有很大的随机性，但却不是毫无根据的，它所依赖的各种思维手段的巧妙组合，是在人的下意识中，瞬间实现的大量逻辑思维手段和以往社会及个人的所知的高度浓缩和凝聚。直觉思维的特点是它的敏锐性、瞬时性、猜测性和不确定性。它与灵感极相近，均属特异思维之一种。直觉思维在人类创造性实践活动中具有重要作用。笛卡儿认为：借助于直觉就能发现作为推理起点的、无可怀疑而清晰明白的概念。莱布尼兹认为：直觉是认识自明的理性真理的能力。历史上许多著名科学家多次肯定能够导致创造性发现的直觉的存在，认为在科学发现过程中确实有“直觉的醒悟”、“突然解决”、“顿悟”、“灵感”等认识飞跃的形式存在。但是，直到最近，科学也没有对直觉做出系统的理论探讨。现在，这一任务已落在了思维科学工作者的肩上。

直感思维 见“形象思维”。

构造心理学 欧美现代心理学流派之一，出现在上个世纪末和本世纪初，以德国的W•冯特（1832～1920）和英国的E•B铁钦纳（1867～1927）为代表。它与机能心理学相对立，主张心理学运用内省法分析意识的构造或内容。它只问意识状态由什么元素（感觉、表象、简单感情）构成，不问意识内容的由来和为什么。构造心理学不承认意识是客观现实的反映。

事物 客观存在的一切东西，包括人的感官所能够直接感知的、间接感知的和一时还不能感知的，概称事物，或称对象、客观对象、客体。有些事物叫做现象则更妥切。例如，自然数、三角形，解方程、数学教学等，都是数学事物，或数学对象，或数学客观对象以及数学客体等，其中解方

程和数学教学被称作现象则更直观。

刺激 同反应相对。在心理学和生理学上，凡作用于有机体并引起其反应的任何因素，不管来自外界，还是发生在有机体内部，都叫做刺激物。刺激物对有机体施加影响的活动或过程，叫做刺激作用，简称刺激。任何有机体和生物都有感受刺激的能力，但刺激能否引起有机体的反应，一要看刺激的性质、强度和持续时间，二要看有机体本身的特点。生物感受刺激的水平随着动物的进化得到高度发展，许多高等动物有多种专门接受不同刺激的感受器或感觉器官。如眼睛感受光刺激，耳感受声刺激等。语言是一种复杂的刺激，为人类所特有。教学语言——教师的言论、动作、表情等，实际上也是一类刺激。

态度 个人对于特定对象的肯定或否定的内在反应倾向，是个性倾向性的表现。态度是有对象的，它总是针对某种事物的；态度具有评价性，它意味着是否赞同该事物；态度具有稳定性，它是一种对事物比较持久的倾向；态度是个体内在的心理状态，往往不能为别人所直接观察到，但它最终会通过当事人的言行表现出来。态度是个人复杂的心理状态，与其认识、情感有着直接的联系。态度在个人心理生活中占有重要地位，它不仅是构成人的性格特征的重要方面，而且也是人的理想、信念、世界观等个性倾向性的表现。组成态度的因素有三：认识、情感和行为倾向，其中以情感因素为核心。期待某种经历，随时准备做出适当反应，举止状态和主张等，都是一种态度。

非言语行为 在言语之外的、表达思维的又一条通道，属“举止形态学”（20世纪50年代初由国外心理学家社会学家和人类学家共同开创的一门新学科）研究的内容。眼神（含眼视方向）、面部表情、身体各部位的动作（含手势、脚步、头的转动等）以及服饰等，都是非言语行为，都可以成为伴随语言而应用于思维表达和课堂教学。非言语行为作为伴随语言在课堂上的作用主要是：第一，可以引起学生的注意，使学生集中精力于言语所表达的内容；第二，可以补充、加强甚至代替言语；第三，可以使教师与学生通过非言语行的通道建立师生关系，从而加强教学控制；第四，可以使学生在接受言语信息的同时，看到生动的形象，从而使多种信息同时作用于大脑，教学效果会更好。非言语行为一般分为动态无声、静态无声和无声三种。英国举止神态学家洛弗和罗德里克认为，中小学教师应学会以下若干种非言语行为：①赞赏学生：微笑，肯定地点头，拍拍学生的背，把手放在学生的肩上或头上。②介绍学生的观点：把评论写在黑板上，把学生作业贴在布告栏里，举起学生的作业本。③对学生的行为表示感兴趣。④指导学生：用手指某样东西，看看某特定区域，使用事先设计好的信号，向学生指出答案。⑤显示权威：皱眉、凝视、扬眉、否定地摇头，从不适当的行为旁走开或不去看它。⑥使学生注意力集中于某重点，使用教鞭，走向某人或某物，轻拍一样东西，把头向前探，将手向前伸，指出重点。⑦忽视：在应该有所表示

时故意不予反应。

非智力因素 与智力因素相对。在认识客观事物及其规律和运用知识解决实际问题的过程中，能够发挥直接作用的那些心理过程叫做智力因素。主要是认识心理过程方面的成份，如，感觉、知觉、记忆、想象、注意、观察、思维等，都是智力因素。在认识客观事物及其规律和运用知识解决实际问题的过程中，能够（通过智力因素）发挥间接作用的那些心理过程叫做非智力因素。主要是情感和意志因素，如，好奇、兴趣、动机、情绪、气质、性格、毅力、作风、习惯、理想、信念等。普遍认为，在中小学各科教学（包括数学教学）中，学生的学习活动是包括客观心理过程和主观个性心理过程在内的复杂的心理活动，既包含对知识的学习，又包含个性品质的形成，因此必须同时注意发展智力因素和非智力因素。

非意义识记 见机械识记。

肯定判断 见判断。

肯定概念 见否定概念。

具体化 思维过程之一。把抽象、概括出来的，关于事物的一般规律，反回去使用于某一具体对象，即把一般用于特殊的思维过程，就是具体化。把一般的东西具体化，例如讲解一个数学法则时的验证或说明，就是将一般同具体相结合，通过具体化，更直观、深刻地了解和掌握一般。教学中的举例就是普遍采用的一种具体化的有效措施。

具体存在 见有形存在。

具体形象 同理想形象相对。指具体存在的对象反映到人脑中所产生的表象。参见具体存在、形象记忆。

具体符号 见数学符号。

具体概念 见抽象概念。

具体形象思维 见形象思维。

典型属种定义 见属种定义。

罗素悖论 见悖论。

知觉 客观对象的表面现象或外部联系的整体在人脑中的反映。它同感觉一样，是由客观对象直接作用于分析器，是多种分析器分析综合的结果，因此，它比感觉复杂、完整。客观对象通常只有部分直接作用于感官，要认识对象的整体或联系，则需借助于知觉，由已有的知识和经验（直接的或间接的）加以补充。知识和经验不同的人对同一事物的知觉常常是不同的。实践是知觉的基础，知觉的正确性只有靠实践来检验。知觉是在多种感觉的基础上进行初步分析和综合的结果，是从感觉到思维之间的一个重要环节，它为思维进行材料加工，创造条件，但仍属认识的感性阶段。

命题 逻辑名词。是表示判断的语句。一般是陈述句，疑问句、祈使句和感叹句都不是命题。数学中的公理、定理、推论、性质、法则、规律等，都是命题。例如，“三角形的内角和等于180°”、“算术根是非负数”、“无理数是无限不循环小数”、“奇函数的图象关于原点对称”、“零没有倒数”、“∞不是一个数”等，都是数学命题。命题同判断一样，有真有假。上述诸例都是真命题，而“负数永远不能开平方”就是一个假命题。数学命题的表述形式除去上述文字陈述式外，还可用数学符号及由数学符号组成的数学公式给出，如

$3>2$，$x+1=0$，$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0, b>0)$ 等。命题的结构，可表为“若A则B”或“如果A，那么B”的形式，其中A为条件，B为结论，若A、B都只包含一个简单判断，那么这个命题叫做简单命题；若A、B不止包含一个简单判断，则叫做复合命题。例如，“对顶角相等”（它可分解表述为：如果两个角是对顶角，那么这两个角是相等的）和“奇函数的图象关于原点对称”，都是简单命题。复合命题的例，如“如果四边形的两组对边平行，且有一个角是直角，则此四边形的两组对边相等，两对角线互相平分且相等”等。

命题的四种形式 凡命题均由条件和结论两部分组成。设条件用A表示，结论用B表示；那么，形如“若A则B”的命题叫做原命题，形如“若B则A”的命题叫做原命题的逆命题，形如“若非A则非B”的命题叫做原命题的否命题，形如“若非B则非A”的命题叫做原命题的逆否命题。例如，设原命题是“如果两个三角形全等，那么这两个三角形等积”，那么，原命题的逆命题是“如果两个三角形等积，那么这两个三角形全等”；原命题的否命题是“如果两个三角形不全等，那么这两个三角形不等积”；原命题的逆否命题是“如果两个三角形不等积，那么这两个三角形不全等”。在上述四种命题之间，原命题和逆否命题、逆命题和否命题都是互为逆否关系，处于逆否关系下的两个命题的真实性是一致的；原命题和逆命题、否命题和逆否命题都是互逆关系，处于互逆关系下的两个命题的真实性不一定同时成立；原命题和否命题、逆命题和逆否命题，都是互否关系，处于互否关系下的两个命题的真实性也不一定同时成立。

单向思维 见双向思维。

单独概念 见普遍概念。

注意 心理活动对一定对象的指向和集中。指向，是指在每一瞬间，心理活动都有选择地朝向一定对象，而离开其余对象。如学生听老师讲课时，全部心理活动都指向讲台上的教师及其言行，而其余对象均抛之脑外。集中，是指把某几种心理活动都倾注于一定对象，使活动不断深入，从而对该对象的反映达到一定的清晰和完善的程度。比如注意集中的学生，能够鲜明而清晰地反映教师讲课的内容，并通过积极思考消化为自己的知识。注意的发生、客观原因是被注意的对象比较新奇、鲜明、变化多端等。主观原因是注意者的主观态度、当时的精神状态、兴趣、需要、知识经验、世界观等。在一定条件下，主观因素对维持注意和选择注意对象具有决定性作用。故注意可按其产生和维持是否出于自觉的意图和努力而分为有意的和无意的等两种。注意的生理基础是大脑皮层优势兴奋中心的形成和稳定，是根据负诱导规律——皮层上的一些区域的兴奋引起其他区域的抑制——而发生的。优势兴奋中心能保证对当前作用于脑的对象产生最清楚的反映，故注意是深入了解事物、提高工作效率、防止意外事故的必要条件。特别是，以注意为基础的“专注”精

神，是学习、研究和一切事业取得成功的重要保证之一。注意的基本特征有：注意集中性、注意稳定，注意范围（注意广度）、注意分配和注意转移等。

注意广度　即注意范围，注意的基本特性之一。指同一时间内所能注意到的对象的量。实验证明，成人的注意广度为4～6个彼此不联系的客体。被注意的对象越集中，排列得越有规律，越能成为相互联系的整体；注意者的实践、知识经验越丰富，注意广度就越大。注意广度的生理基础是大脑皮层优势兴奋区域的扩大。注意广度的扩大，对于提高学生的学习成绩和排字工人、电报员等的工作效率，具有重要的实践意义。

注意分配　注意的基本特性之一。指在同一时间内把注意分配到两种或两种以上的不同对象或动作上。例如，学生在听课过程中，将注意分配给听（讲）和记（笔记）。注意的分配是有条件的。重要条件之一就是，在同时进行的几种活动（动作）中，只能有一种可以是不熟练的，而其余都已达到了相对"自由化"的程度，无需更多的注意就能熟练地进行。此外，同时进行的几种活动之间应当是有联系的，须形成某种系统，或者先是其中一种达到熟练程度。教师、学生、乐队指挥、驾驶员和众多"一脑多用"的劳动者，都需要分配注意，都应当具备善于分配注意的能力。现代复杂的科学技术和生产劳动，越来越多地要求人们善于精确地分配自己高度集中的注意。

注意转移　"注意"的基本特性之一。指在某一时刻区间内，注意从一种对象转换为另一对象，而且是有意识的。例如，数学课堂教学中经常出现的一种注意转移是，由"听"（教师讲课）转换为"做"（练习，习题）。注意转移是注意从一种状态到另一种状态的必须演变，而不同于"注意分散"中注意对象转变的偶然性。注意转移的快慢和难易，既取决于原来注意的紧张程度，又依赖于后来所注意对象的吸引力是否达到足以破坏原来所注意对象的吸引力的程度。为了使注意转移能及时而有效地完成，可以而且应当采取一些辅助性措施。

性格　与个性（人格）不能等同，是个性的重要组成部分。是一个人较稳定的对现实的态度和与之相应的习惯化的行为方式，如果断或寡断、谦逊或自负、诚实或虚伪、刚强或懦弱，热情开朗或沉默寡言等。性格是在个人生理素质的基础上，在社会实践活动中逐渐形成、发展和变化的。由于所走的生活道路、所处的社会环境和所受教育的条件有所不同，每一个人的性格往往因此而形成不同的特征。

学习　有广义与狭义之分。广义的学习是生物体普遍存在的适应其生存环境的积极手段之一，主要指人不断获得知识经验和技能、形成新习惯、改变自己的行为的能动过程；动物虽然也借助学习积极适应环境，但这种积极并非自觉的，而是依靠遗传本能。本能的变化即使是微弱的，也往往需要千万年，而人的学习变化即使是巨大的，也不过只需几分几秒钟。人猿

到人的进化，从火的使用到宇宙航行，都是一系列极复杂的学习心理过程。狭义的学习是人对客观现实的认识过程，主要指学生在学校里有目的、有计划和有系统地掌握知识技能和行为规范的活动。关于学习理论，心理学家们一直在争论不休。他们当中有：沃森（华生）和桑代克等人的刺激—反应理论，苛勒和考夫卡等人的格式塔理论，托尔曼和布鲁纳等人的认知理论，以及我国孔子的“学而时习之”理论。“学”是闻，见，可以接受书本知识和感性知识，也包括思维活动；“习”是练习，温习，也包括“行”或“实践”的含义。可见，学习一词，源出孔子名言。

学习论 主要研究学生知识的获得和保持，揭示学生学习过程的基本心理规律。一方面，分析学生学习知识和形成技能的性质、基本过程、方式和方法，从而揭示其间的心理规律；另一方面，还要分析影响学生学习的各种因素及其间的相互关系，从而促进学生的学习。数学学习论主要研究内容有：学习的意义和分类；数学学习的特点和基本过程；数学知识、技能、思维活动的获得和保持；数学学习的动因；数学学习的迁移和数学学习的评价等。

学习心理 见学习心理学。

学习目的 见学习动机、动机。

学习曲线 又称练习曲线。表示学习进程（指其各种因素，如练习时间或练习次数等）与其效果之间的关系的曲线。学习通常都要经过一定的练习，把历次练习的过程及其效果用统计方法处理，然后绘制成曲线图解，就可以看出学习过程的进步情况。通过学习曲线可以看出学习过程的效率、速度、准确性等方面的变化和特点。学习的进步，练习成绩的提高，虽然一般说来是逐步上升的，但由于各种原因所致，逐步上升的共同趋势又区分为若干不同情况：①学习进步先快后慢；②学习进步先慢后快；③学习进步先后比较一致；④练习中期往往出现进步的暂时停顿现象，即出现学习曲线上的“高原期”；⑤练习成绩的起伏现象。一般说来，学习成绩起伏是正常现象。

学习迁移 一般称“迁移”，学习心理学重要概念。指先前的学习对以后学习的影响。从作用上区分，有正迁移和负迁移。凡先前的学习对以后学习产生积极影响，起促进作用的为正迁移。例如学习整数加减法有助于学习整数乘除法，学习分数的基本性质有助于学习分式的基本性质等。反之，凡先前的学习对以后学习产生消极影响，起促退作用的为负迁移。例如学习整数乘法之后出现 $a^3\times a^5=a^{15}$，学习乘法对加法的分配律后出现$\log_a(M+N)=\log_aM+\log_aN$等。不管是正迁移还是负迁移，都有迁移量的大小区别。从内容上区分，有特殊性迁移和一般性迁移。前者是指学习某一内容后对相似材料有特殊的适用性，动作技能的迁移多属此种迁移。一般性迁移指原理的迁移，这是一种更重要的迁移。例如每一个数学原理的应用都是一般迁移。布鲁纳十分重视原理的迁移，认为这是教育的核心和重点，教育的根本目的就在于用基本的和普遍的原理来不断扩大

并加深学生的认识。学习方法和态度的迁移也都属于一般性迁移。教育心理学历史上首次做迁移实验的是美国心理学家 W•詹姆斯。关于为什么能发生迁移的问题，一般有以下几种观点：①形式训练说。②共同因素说，美国的桑代克为代表。③概括化理论，以美国心理学家 C•H•贾德为代表。④关系理论。掌握迁移规律，对提高学习效率有重要意义。

学习动机 直接推动人去学习的内部原因。学生学习行为的引发，若由外部因素所致，这些外部因素称作诱因。诱因必须通过作为内因的动机才能发挥作用。研究表明，学习动机不是单一的结构，而是由需要、兴趣、爱好、对学习必要性的认识、学习情绪以及意志因素等组成的复合体。国内外普遍认为，兴趣是学生学习最主要或核心的动机因素之一。学习动机与学习目的既有联系，又有区别。前者是引起学习的原因，后者是学习期望得到的结果。但是，学习目的又常常是引起学习动机的诱因，对学习动机的激发、维持起支配和调节作用。

学习兴趣 指一个人对学习活动的一种积极的认识倾向和情绪状态。学习兴趣可以提高学习效率，从而是学习的原因，又是学习的一种结果。学习兴趣大体分直接的和间接的两种。前者由所学材料或学习活动——学习过程本身直接引起，后者由学习活动的结果间接引起。两者经常是融合在一起的。学习兴趣导致一种极明显的学习自觉性。学生学习兴趣的培养，主要在于教师要使学习活动本身有趣味。方法有：加强教材的趣味性、系统性、科学性；提高教学水平，使教材和整个教学过程都适合学生口味，真正地学有所获；了解学生原有的学习兴趣，在此基础上不断扩展和提高其学习兴趣的基础；帮助学生认识学习某一学科的社会意义及其与个人的关系。

学习场论 德国完形心理学（格式塔心理学）的代表人物之一、拓朴心理学家勒温提出的一种学习理论。他把物理学的场概念引入心理学，认为个人的心理行为是在一种心理场或生活空间中发生的，是由所在场作用于他们的力决定的；学习也是依存于生活空间而产生的，它是场的认知结构的变化。他反对桑代克的尝试和错误说以及巴甫洛夫的条件反射说，而特别重视顿悟和认识。勒温用动力场解释顿悟学习，认为有效学习必须具备的三个条件是：领悟、目标、认知结构。目标是人们注意的结果和客体。个人一旦知道了吸引他的目标，就试图寻找得到它的方法，并据此调节自己的行为。顿悟的产生则是生活空间的认知结构的形成或改变。他认为学习是由四种变化构成的：认知结构的变化；动机的变化；团体属性和思想意识的变化；肌肉的随意控制及熟练的长进。而认知结构的变化是具有特殊意义的概括或顿悟。他认为在认知范围内，学习就是一个获得新的认知结构或改变旧的认知结构的过程。美国教育心理学家比格认为，场论心理学在教学上的应用是很有成效的：①场论认为，人既非依赖环境，也不独立于环境之外；人既非环境所创造，也并非与它无关。②场论学习理论是

以“目的”为中心的，凡行为都有目的，所有的学习活动都由目的指引。③场论心理学家把学习都集中在“认识”上，他们试图使学习者通过自己的眼睛观察世界，而不是让环境和教师把知识灌进自己的头脑。④强调学习情境的重要性。勒温认为教师在教学中的作用是为学生树立一个榜样和创造一个学习情境，以启发学生学习的内在兴趣。⑤勒温强调当前的情境应集中注意于同时发生的情况。在他看来，场论心理学的一个基本特征应当是描述影响个人的心理场，如果教师不了解个别学生学习生活的心理世界，他将永远不能给学生以恰当的指导。学习场论强调心理事实的实在性及其影响，而排除客观现实的作用，有一定的片面性。

学习态度 指人对学习活动所持的一种比较稳定概括的思想、兴趣或目的倾向性。学习态度由三个主要因素组成：一是对学习活动的认识；二是对学习活动的情感浓厚与否；三是对学习活动的实际行动。参见态度。

学习定势 学生在学习活动中经常所处的一种惯性心理状态。生活经验、知识结构、思维方式，以及需要、愿望、态度等都能构成学生学习的惯性心理状态，对后续的学习发生定势作用，从而使学习活动不一定必要地产生一种方向性。消除思维定势和学习定势消极作用的方法之一，是在惯性心理状态形成之后，暂时将这种状态搁置一段时间，待其定势作用减弱以后，再继续解决下边的问题。

学习疲劳 学习活动的一种状态。指在生理和心理方面产生怠倦，致使学习效率下降，甚至发展到不能继续学习的状况。主要分生理的(或身体的)学习疲劳和心理的学习疲劳等两种。学习既包括身体的活动，也包括精神的活动，但主要是精神活动。因此学习疲劳既受身体疲劳的影响，又受心理疲劳的影响。发生学习疲劳的原因是多种多样的。它不仅取决于所从事的学习的性质和数量，也和一个人的学习动机、学习态度、学习兴趣等个人的特点以及环境的条件有关。一般地说，儿童的身体作业比精神作业更容易疲劳。心理的疲劳一般不象身体疲劳发生的那样迅速，所以，如果一个人有了强烈的学习动机和积极的学习态度，就能够较长时间地持续学习而不感到十分疲劳。许多研究指出：需要紧张的注意、积极的思维和记忆的学习活动，都容易发生疲劳。不愉快的作业较愉快的作业更容易疲劳，学习内容单调也会引起心理的疲劳。另外，在异常的气温、湿度、缺氧、噪音、光线不良等外界环境条件下影响学习，也容易疲劳。调节和恢复学习疲劳的一般措施：合理安排学习；适当休息；学习环境要适宜。

学习理论 关于当代各派学习理论的概称。这些理论主要有：学习格式塔说，学习联结说，学习场论，符号学习说，经典的条件反射说，操作条件作用说，认知结构论，社会学习论，数学模式论，学习的活动理论，教学的控制理论，智力动作按阶段形成理论等。

学习需要 见学习动机、动机。

学习心理学 心理学分支之一。以学习过程中的心理现象及其规律为主要

研究内容，是“教学心理学”的对立概念。广义学习心理学研究人的知识和技能的获得与积累、行为改变和习惯形成的规律，影响知识经验、技能和习惯形成的因素，知识经验和习惯形成后的保留与遗忘的规律等。广义学习心理学属理论心理学范围。狭义学习心理学是教育心理学的一个组成部分，属应用心理学。它研究学习过程中的心理活动规律，主要内容包括：①学习的基本心理因素，如学习动机、学习兴趣等。②学习的积极性，如注意、情感与意志等。③认识过程，如感觉、知觉、记忆、想象与思维等。

学习联结说　见“尝试和错误说”。

学习格式塔说　见“顿悟说”。

学习的活动理论　苏联加里培林学派提出的一种学习理论。心理学家Л•Я•加里培林和Н•Ф•塔雷金娜等人从心理学家А•Н•列昂节夫的活动心理学理论出发；反对学习理论上的官能主义与行为主义观点，对学习的实质、学习的类型、教学与发展的关系、教学的最佳方式等方面，提出了独特见解。在学习的实质方面，该派认为，人类的学习是主体为了适应社会生活的需要，以获得处理事物的社会经验为目的而进行的一种活动。学习不同于游戏，同生产性劳动也有区别。只有当活动是满足认识需要时，此活动才是学习。该学派认为，学习中的定向环节直接制约执行环节而对学习成效具有决定性意义。因此，学习中的定向基础是划分学习类型的主要依据。学习的定向基础的建立，包含三方面的任务：①建立保证新的动作得以正确执行的客观条件系统；②使这种条件系统在学生意识中反映出来；③选择合理的定向映象的建立过程。在实际学习中，由于解决这三方面任务的方式不同，可能造成定向基础的概括性、完备与独立性方面的差异。这三种因素不同的结合会造成多种不同的学习类型且具有不同的成效。教学上必须注意选择与创造最佳的学习类型。在教学与发展的关系上，学习的活动理论支持Л•С•维果茨基关于教学在儿童心理发展中起主导作用的观点。但是他们认为，教学上如果仅仅考虑到针对“最近发展区”的教学内容，不考虑掌握这种内容所必需的新的动作，不把这种新的动作包括在教学内容之中，则此教学内容不可能直接获得教学的发展效果。在教学中，必须使学生在掌握新教材的同时，掌握必需的新的动作，才能引导学生的心理发展。学生在学习新教材时掌握新的认识动作越多，则教学的发展效果就越好。

学生学习的特点　学生的学习是在教育情境中进行的，是凭借知识经验产生的、按照教育目标有计划、有组织地进行的比较连续和持久的行为变化。与一般的人类学习相比较，学生学习还存在如下基本特点：①学生学习是在人类发现基础上的再发现过程。②学生学习是从掌握理论开始的。人类学习认识的过程是“实践——理论——实践”，而学生学习的过程则为“理论——实践——理论”。③学生学习的目标是既定的，而且是在教师指导下进行的。④学生学习是依据安排好的教学计划、课程和教材

进行的，学习的主客观条件是极为充分的。⑤学生学习的主要目的不在于“用”，而在于“奠基”和增强人的素质。

定义　又称界说。是揭示概念内涵的逻辑手段、方法。定义由被定义项、定义项和定义联项三部分组成。例如，“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”或“平行四边形就是两组对边分别平行的四边形”是平行四边形的定义。其中，被定义项是“平行四边形”，定义项是“两组对边分别平行的四边形”，定义联项是“叫做”或“就是”。因为概念反映事物的本质属性，同时又是语词的逻辑内容，因此，给概念下定义既可从揭示概念的内涵的方面进行，也可从揭示表示概念的语词的含义方面进行。前者所得定义叫做真实定义，后者所得定义叫做语词定义。前举平行四边形定义和定义“含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程”都是真实定义。把“积、商、幂、方根等四种对数运算法则的合称”规定为“对数运算法则”的含义，那么，它就是数学语词“对数运算法则”的语词定义。定义的作用主要是：第一，通过定义，可以把对客观事物的认识总结和巩固下来；第二，定义对明确概念具有清晰、扼要、确定和醒目的作用；第三，定义是关于概念的科学含义的“法规”，它为人们提供了一个赖以进行判断、推理、论证的统一确定的思维标准。参见数学语词概念。

定势　也叫“思维定势或心向，思维的一种惯性或惰性。指由一定的心理活动所形成的某种趋向状态，影响或决定同类后继心理活动的发展方向或形成的现象。也就是用一种现成的模式去“套”同类另外一些问题的惯性。例如，让学生连续解答五至八道加法应用题后，有的学生对减法应用题可能会用加法去“套”答，这就是解答加法应用题所形成的定势。定势现象存在于各种心理活动之中，其积极方面可以保证心理活动的稳定性（前后一致），其消极的一面在于某些应当及时中止的心理趋势，由于定势的存在而被延续下来，形成不妥或错误的后果。定势概念最先由德国心理学家缪勒和舒曼在1889年提出，后由苏联心理学家乌兹纳捷加以改造，发展成为一种理论，形成苏联定势心理学派。

定理　一种真命题。这种命题的真实性必须根据其他已知概念和真命题，经过逻辑推理而加以证明。例如，“平行四边形的对角线互相平分”，“如果 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）的两个根是x_1, x_2，那么$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$”以及正弦定理、余弦定理等，都是数学定理。定理同公理相比，其真实性远不及后者直观——不证自明，而定理再直观也需进行严格证明。定理还有一个鲜明特点是，其应用比较广泛，这是它同一般数学证明题的主要区别。在中学数学教材中常有这样的现象，在别的书上的一个定理，却被中学教材作为一个被证明题安排在复习题中。这一现象的另一面是，凡被严格论证过的数学习题，

都是定理；只是为了保证教学效果，一般不准使用而已。这就表明，在数学定理和数学证明题之间，也不存在严格的界限。

定向思维　任何思维活动都是一个过程，都是运动，都有方向，都可以改变方向。所谓定向思维是指为已知条件所确定了方向的思维，思维从起步到结束必须沿此方向进行，不得更改。在中小学数学教学中，教材上的大量练习、习题的思维方向大都比较单纯，基本属定向思维。但是，正因为方向单一，所以学生如果一时寻不准思维"门路"，那就会感到问题更加困难。可见，发散思维在此对于思维选向定向是有作用的。

定义式命题　见派生定义。

官能心理学　哲学心理学理论的一种。主张心灵（或"心"）具有不同官能，强调"心"是由多个生来具有的官能所组成，各种官能能独引起各种心理活动。它起源于古希腊对灵魂官能的划分，如柏拉图认为灵魂具有理智、意志和情欲等三种官能。"官能心理学"一词由德国心理学家C·沃尔弗（1679～1754）首先使用。沃尔弗不仅把"官能"用作叙述和区别心理活动的名词，而且也用作解释心理活动的名词，使之成为发动心理活动的心灵力量。他认为心灵的各种官能能互相分离，能孤立地加以训练，西欧18世纪教育上出现的形式训练说即以此为据。

空间知觉　关于客观对象的空间特性（形状、大小、远近、深浅、高低、方向等）的知觉。各种空间知觉都有自己相应的生理机制，它们都是在实践活动中，当种种不同感觉，特别是视觉和运动觉发生时，在大脑皮层中形成复杂的暂时神经联系系统的产物。在数学教学中发展学生的空间知觉水平是培养学生空间思维能力和形象思维能力的必要前提，不可忽视。空间知觉的发展方向：一是人们日常所在、司空见惯的空间，二是宏观的宇宙空间，三是微观的粒子空间。因此，应当引导学生在广泛阅览中读一些关于宇宙飞行、空间探索、天文学和粒子物理方面的读物。

空间思维　见立体思维。

实在　见存在。

视觉　辨别物体明暗和颜色的一种感觉。由光源直射或物体反射的光线作用于眼球的视网膜，引起其中感觉细胞的兴奋，再经视神经传入大脑皮层视区，便产生视觉。视觉是整个视分析器活动的结果。视觉在对物体空间属性，如大小、远近等的区分上，起着重要的作用。统计表明，一个人通过视觉所接受的知识信息，在各种感觉（包括视觉）所接受的全部信息中占第一位。可见，在一般教学（包括数学教学）中，充分发挥视觉的作用无疑是科学的，有效的。

视野　眼睛固定地注视正前方一点并围绕这一点转动眼睛所能看见的空间范围。一只眼睛和两只眼睛的视野是不相等的。各种颜色的视野也大小不同：在同一亮度下，绿色视野最小，红色较大，蓝色更大，白色最大。广义的视野，一般常用以标志人的知识面，从而有"知识视野"之说，而开阔学生的知识视野，乃是中小学各科教学的重要任务。数学教学中的知识

视野的开阔，主要应在“横向”、“断面”、“交叉”等学科方面开展工作。

诡辩　故意违反逻辑规律和规则的要求，为错误论点作辩护的各种似是而非的论证。源出希腊语，从技巧、智慧一词转化而来。在现代文献中，诡辩一词有时也指一种主观主义、相对主义、折衷主义的世界观和方法论；指一种冒充辩证法、貌似辩证法的形而上学世界观和思想方法，通称诡辩论。进行诡辩的具体方法通常称为诡辩术。常见的诡辩术有偷换概念、偷换论题、强词夺理、模棱两可、捏造论据、机械类比、以偏概全、循环论证等。数学诡辩是违反逻辑规律、规则和基本知识，通过似是而非的推演，而得出荒谬的结果。数学教师在数学教学过程中，为了掩盖自己已经觉察到的知识或教法上的缺点错误，有时也会不自觉地坠入诡辩之中，这些做法对学生影响很不好，是思维的畸形发展。

线性思维　即一元坐标思维，或相对于平面思维的宽阔性而专指逻辑思维的单纯性。线性思维的基本含义是：①发生在一维空间中，即思维的自变量只有一个；②具有明确逻辑性。中小学（特别是中学）数学教学的课堂教学，给人的直观印象就是一种线性思维模式：单线条的，清沏流畅。但与同年级的语文教学比，就觉得数学课思路很狭窄（在一维空间内），呆板（缺乏二维空间的灵活幅度），总没有语文课那样生动。

练习曲线　见学习曲线。

组合关系　见组合概念。

组合概念　被同一种或同几种关系连结在一起的，同一普遍概念下的两个或两个以上的单独概念所组成的集合体，叫做组合概念。相对于组合概念而言，原普遍概念及其属（种）概念叫做个体概念。连结每一对（组）个体概念的关系，叫做组合关系。例如，相反数就是由两个数（都是单独概念或个体概念）并为“相反”关系（即绝对值相等而符号相反）连结起来组成的一个组合概念。又如，相似三角形也是一个组合概念，它由两个三角形（单独概念或个体概念）组成，组合关系是：①对应角相等；②对应边成比例。现行中学数学教材中的组合概念，还如：同类项，倒数，余（补）角，垂（斜）线，同位角，对顶角，同心圆，平行线，全等形，相似多边形，位似图形，等圆，异面直线，平行平面，垂直平面，共轭复（虚）数，等。关于个体概念的例，如，对于组合概念相反数来说，数以及每一个具体的数都是个体概念，对于组合概念相似三角形来说，三角形以及每一个具体的三角形都是个体概念等。组合概念之所以叫做“组合”概念，原因之一就是因为组成它的成员不成“单”，而是成“双”成“对”成“组”。因此，对于组合概念不能象对个体概念那样称做“一个”，而应称做两个“一对”或“一组”。组合概念与组成它的相应个体概念之间，都不存在属种关系。例如，相对于组合概念“相似三角形”的个体概念是“三角形”；组成相似三角形的个体概念是相似三角形中的每一个具体的三角形。显然，在相似三角形与

每一个具体的三角形及它们共同的属概念“三角形”之间，都不存在属种关系。组合概念还存在两种极鲜明的特性。其一是：组合概念的属（种）概念仍然是组合概念；它可以从组合关系概念的属种关系方面来确认，也可从组成它的个体概念的属种关系去判别。例如，根据上述性质可知，相似多边形是相似三角形的属概念（因为个体概念多边形是个体概念三角形的属概念），而全等三角形又是相似三角形的种概念（因为关系概念全等是关系概念相似的种概念）；同理又知，平面几何中的“共面线”是“非重合线”的属概念，而“相交线”和“平行线”又都是“非重合线”的种概念等。其二是组合概念具有对称性或反身性。即对处于组合关系中的诸个体概念，任意交换它们的位置，不改变原组合概念的实质，例如，我们说A是B的相反数，也可以说B是A的相反数。因此，在组成组合概念的个体概念之间，可以使用“互为”、“互相”等词。例如，“A是B的相反数”和“B也是A的相反数”可以合称一个命题“A、B二数互为相反数”；又如，两个平面互相垂直，一组直线互相平行，两个代数式互为有理化因式等。

经典的条件反射说　指美国和西方心理学家对巴甫洛夫关于条件反射形成的学说而言。为了区别于斯金纳的操作条件作用说，西方心理学家则把巴甫洛夫关于条件反射形成的学说称为经典的条件反射说。巴甫洛夫的条件反射学说，对研究学习的心理学家影响很大，尤其对美国行为主义心理学影响更大。1919年，行为主义创始人美国心理学家J·B·沃森，就采用了巴甫洛夫的条件反射概念，系统地阐述了他的行为主义心理学的理论体系。他从行为主义的立场出发，认为心理学的研究对象是行为，而行为的基本构成因素就是刺激和反应。他把行为和反应分为遗传的反应和习惯的反应。他采用条件反射概念来说明习惯反应，认为一切复杂的习惯行为都是通过条件作用而逐渐形成的，他把它叫做条件反应、交替反应，并且把条件反射形成的程序和过程总称为条件作用。在此之后，特别是巴甫洛夫于1927年发表《条件反射》以后，条件反射的研究就在美国盛行起来，许多行为主义心理学家都以条件反射的概念和方法来研究和说明行为的学习问题，把条件作用作为学习行为的基础。1930年以后，美国的新行为主义理论开始形成，这些新的理论的核心也是所谓“条件作用”论。应当指出，沃森等人只是把巴甫洛夫的条件反射学说看成是条件反射形成的程序和过程而已，而其条件作用说同巴甫洛夫的条件反射学说在基本理论观点上是不同的。例如巴甫洛夫的条件反射学说是研究和探索高级神经活动的生理规律的，他不否认意识、心理，认为人因为有第二信号系统的活动而与动物存在着本质的差别。而沃森等人则根本否认意识，而将意识归之于行为，他们仅仅注意肌肉和腺体的生理学而忽视大脑皮层的生理学，混淆人与动物的本质区别。所以，行为主义在条件作用的名称下，实际上是把巴甫洛夫学说变成了行为主义的一

个变种。

相似论 是用辩证唯物主义的观点对客观世界中大量存在的相似现象和原理进行探讨，获得客体与主体发展过程中的各种相似现象之间的内在联系和基本规律，以求提高人们对科学、技术工作的予见性和认识水平的一种理论。这里的相似，指人类科学发展史和社会发展史中，如同史学家惊叹的那样，"呈现着惊人的相似"。客观事物发展过程中存在着"同"和"变革"，因为只有"同"才能有所继承。只有"变革"，事物才能向前发展。所以相似不等于相同，相似是客观事物存在的"同"与"变革"矛盾的统一。相似现象就是客观世界物质的基本粒子在统一场作用下运动的一种和谐协调而又相互适应的一个组合形式。相似现象分横向相似系列，纵向相似系列及空间多方位相似系列。在相似性方面，又有功能相似，结构相似，动力相似，几何相似等。相似现象中有三种相似关系，其一是相似现象和本质的关系；其二是宏观结构相似与微观结构相似的关系；其三是静态相似和动态相似的关系。相似规律有：①事物都是由相似的单元、层次排列组合而来的；②相似的基因、相似的条件和环境产生相似的结果；③事物包含的相似功能越多，其作用就越大，应用就越广；④各种学科中，往往由一个或几个相似功能较多的学科作为带头学科，而这个带头学科又有一条带头的原理，决定着它内部的相似规律和系列。怎样利用相关关系和规律改造客观事物呢？一是按照基本的相似原理和关系，把所要研究的问题区分成一定的相似系统和类别；二是分类后进一步对事物进行详细解剖分析；三是解剖分析后再综合优化。

相对关系 见相对概念。

相对概念 对于属性的理解，受思维定势或感知限度的影响，常常产生一种偏狭之见，以为只有在对象的"自身"范围内所呈现出来的属性，才是对象的属性，而存在于该对象与其他对象之间、把该对象同其他对象连结在一起的某种特定关系，如组合关系等，则不被认为是对象的属性。这是常量数学的相对静止状态给人们的认识留下的一种思维局限性。如果说，"初等数学"主要是关于常量的数学的话，那么，"高等数学"便可以被认为主要是关于变量的数学，而变量数学的核心、精髓，正是量与量之间的依存关系，即对象与对象间的相互联系。因此，概念"自身"所体现的属性和把该概念同其他概念连结在一起的某些关系，都是概念的属性，而且"关系属性"是一种更深刻、更全面、更具一般意义的属性。

反映具有"自身"属性(指种差)的对象的概念，叫做绝对概念；反映具有"关系"属性（指种差）的对象的概念，叫做相对概念(实际上，"自身"属性是组成对象的诸元素之间的一些"内部关系"；"具有'关系'属性"也可写作"处于某种关系中")。

例如，平行四边形就是一个数学绝对概念。因为它所反映的是具有"两组对边分别平行"这种"自身"内部呈现出来的种差（即组成平行四边形的两组对边相互之间的一种"内部关系"）的一类对象——四边形中

的一部分。

又如，对数则是一个典型的数学相对概念。因为它所反映的是这样一些数b，它们同数N（以a为底，$a>0$，$a\neq1$）之间，为$a^b=N$这样一种数学关系所连结。三角形的外接圆也是一个数学相对概念，它反映这样一些圆，在它们同某些三角形之间，为一种所谓“外接”（即三角形的顶点都在图上）的数学关系所连结。中学数学相对概念在初中阶段出现150个左右，约占全部初中数学概念的40%以上。高中阶段，这个比数则上升为50%以上。这是因为，数学进一步学习和研究的对象，已经从呈静态、孤立态的对象逐步转向呈动态、联系态的，处于更加宏观的关系中的对象。值得注意的是，中学概念教学中不少著名的难点或重点概念，多是数学相对概念。如方根，对数、函数、反函数，极值，二面角的平面角，复数的模，排列，组合，极限，导数等。

相对概念总是同某种关系连结在一起，而这种关系的另一“端”，又总是涉及另一个或几个概念。相对概念之所以名之曰“相对”概念，正是因为它总是相对于被涉及的其他概念而言的。例如，sin30°系相对于30°角而言，比例中项系相对于比例中的另外两项而言，线段的定比分点系相对于线段上其他各点而言，函数系相对于自变量而言等。同相对概念相对的概念，叫做相对概念的对称概念。连结相对概念及其对称概念的关系，叫做相对关系。组合关系实际上是相对关系的一个特殊情况。

数学相对概念的教学要点有二，一是抓住“相对性”这个关键，务必明确：凡相对概念必涉及它的对称概念，必存在将相对概念及其对称概念连结在一起的相对关系。离开对称概念和相对关系，相对概念是不可思议的。二是有别于绝对概念，要明确数学相对概念的定义方式。见数学相对概念的定义方式。

点状思维　一种低级的非科学性的思维。这种思维的特点是：会使用某些日常概念或概词，也能作出比较简单直观的判断，但明显地缺乏推理能力。孤立地思考问题，断断续续地讲话，在交际中，只有连猜带摸才能了解其意。

尝试和错误说　美国心理学家桑代克主张的一种学习学说。他根据对动物所做的学习实验，认为尝试和错误是动物学习的基本形式。在重复尝试中，失败动作逐渐减少，成功动作逐渐增多。桑代克认为，学习就是刺激和反应间联结的加强。联结加强的因素，一是效果，二是重复。反应的“满意”效果加强联结，“不满”或“烦恼”效果削弱联结，这叫效果率；反应重复的次数愈多，联结愈牢固，这叫练习律。1930年以后，桑代克把这两个定律略作修改后直接搬用到人类，断言人类和动物的学习没有质的差别，从而混淆了人和动物的界限。

思维　（1）在哲学基本问题中，思维相对于存在而言，是精神的同义词。思维和物质，谁是第一性的，哪个是本原，向来是唯物主义和唯心主义的分歧点、分水岭。有人认为：思维是宇宙三大物质运动（即，大自然

运动，人类社会发展运动，思维运动）之一。也有人指出：思维科学是从哲学中最后分化出来的一门具体科学。这两种认识，都带有哲学的色彩，有一定学术价值。（2）心理学认为，思维是客观事物的本质属性在人脑中的反映。是在感觉、知觉和表象等三种低级心理活动的基础上而发展形成的一种高级心理活动。感觉、知觉和表象都是感性认识，而思维是理性认识。思维的基本形式是概念、判断和推理。思维过程表现为分析、综合、对比、抽象和概括。思维的物质外壳是语言，一切思维的内容和结果，只有通过语言表达出来，传播出去，思维才有社会意义。（3）现代思维科学研究在人类关于思维探索所取得的成果的基础上，正在重新概括思维的确切含义，并产生了一些初步观点。认为：思维的器官是脑，脑的主要而特殊的功能是思维；开动脑筋就是思维。思维科学接受哲学关于思维的概括，并将进一步致力于哲学（把思维作为它的部分内涵）所难能解决的那些问题——一门具体科学的具体问题。思维科学同心理学比较，前者关于思维概念的外延，明显宽于后者关于思维概念的外延。这是因为，心理学把思维作为众多心理现象（过程）之中的一种现象来研究，只能触及思维的某些一般性心理学问题，不可能象思维科学那样，把思维做为唯一的对象而展开全面、深入的研究。因此，心理学所涉及到的关于思维的某些内容，往往是局限的、肤浅的。例如，迄今为止，心理学所谓的（即在心理学理论体系中能够成立的）思维，主要还是抽象思维中的演绎思维体系。与此相反，思维科学的思维内涵不仅把心理学的思维内涵一包在内，而且主张思维科学研究“有意识”的思维，即人能加以自我控制的全部思维。尤其启发人的是，国内外不少学者甚至主张：动物也有思维。总之，思维科学正处在它的萌发阶段，包括“思维”在内的许多重要基本概念，其内涵均未获得权威性的定义。可以相信，思维科学研究的发生和发展，必将使思维和其他一些概念的内涵日趋完善，必将为心理学、哲学和其他有关学科关于思维的认识，提供越来越丰富的科学的依据。

思想　（1）即观念，指看法。（2）指相对于感性认识的理性认识成果，也即思维的结果。思想可以表现为通过概念的联系，概括地说明现象的本质和规律的理论原理，也可以表现为观点的综合的理论体系。思想是在实践的基础上对客观存在的反映，这种反映是否正确，又要通过实践来检验。凡是经过实践检验证明符合客观实际的思想都是正确的思想，不符合实际的思想都是错误的思想。错误的思想对客观现实的发展起阻碍作用，正确的思想对客观实的发展起促进作用。一切思想因人而异。

思路　思考问题的线索、途径或程序。思路由思维的目的为存在的前提。但是，为了同一目的的思路，往往不是唯一的。思路和实际可行的路子不一定是一码事。解决问题前，思路多一些一般说来是好的，它可以使人们进行充分地优选，从而确定一条最佳行动路线。数学解题中提倡“多

思”，思维主张“发散”就是这个意思。

思维学　思维科学的基础学科之一。研究思维的形式、结构、过程，类别以及其他规律的一门学科。传统的思维学一向是哲学的研究内容，主要指逻辑学。古希腊亚里士多德的《工具论》，中国古代墨家的《墨经》等，是古代辑逻学的代表作。两千多年来，逻辑学（主要是形式逻辑和数学逻辑）研究进步很快，比较成熟，知识也较普及，故有“逻辑即思维”之谬。现代思维学的基础理论研究，包含三个部分：抽象思维学、形象思维学和特异（灵感）思维学。现代思维学的应用理论研究，主要探讨科学研究、文艺创作、管理决策，学校教育等社会实践过程中多种多样的思维模式、过程和其他规律，从而有科学思维学（如数学思维学）、文艺思维学、管理思维学、领导思维学、教育思维学等应用学科理论。在工程技术方面，现代思维学是计算机、智能机设计与制造的理论基础，因而相应又有若干分支学科理论，如数理语言学、结构语言学、密码和文字翻译技术、图象和模式识别技术等。

思维工具　源出亚里士多德和培根都把逻辑称为“工具”。这就是既不同于物质工具，又不同于一般知识工具的“思维工具”。现代一些逻辑学家也把逻辑称为工具，例如，“形式逻辑是认识客观世界的辅助工具”，是“论证思想和表达思想的必要工具”（金岳霖：《形式逻辑》第11—12页，人民出版社，1979年第1版），“应用逻辑是作为增长知识的工具而建立起来的”（苏联柯遍宁语，载《逻辑科学》1985年第二期）。作为思维工具的逻辑，不是人脑主观自生或先天授予的，而是人类认识的总结，是人类所得到的“对世界的认识的历史的总计、总和、结论”（列宁语）又作为求得新知的方法，不断地重新回到现实的认识过程中去，并在无数次的现实的认识过程中被精炼、概括、上升为对现实世界进行再认识的方法和规则。迄今为止，人类创造了三种基本的思维工具，这就是形式逻辑、数理逻辑和辩证逻辑。前两种逻辑已基本成形，辩证逻辑早已为人们不自觉地应用，但其科学的理论体系正在形成中。以上三种逻辑都属理论逻辑，它们还有些分支，如模态逻辑、命题逻辑等。与理论逻辑相对，还有应用逻辑。黑格尔提出：“任何科学都是应用逻辑，因为每一门科学都要以思想和概念的形式来把握它的对象。”（《逻辑学》下册，第455页）同应用逻辑并列的还有一种逻辑，就是理论逻辑在特定实践领域中的应用。如规范逻辑、法律逻辑、诉讼逻辑、刑侦逻辑等。广义地讲，这些也都是应用逻辑，为了与上述特定涵义的应用逻辑相区别，称之为实用逻辑，理论逻辑、应用逻辑、实用逻辑都是思维工具。

思维内容　指思维主体在思维过程中，运用一定思维形式加工、处理并产生精神产品的信息。思维内容是与一定的思维形式紧密联系在一起的，离开了思维着的人脑和一定的思维形式，客观存在的一切自然信息和人工信息，不能称作思维内容，只能当作

思维内容的源或流。在一定的思维活动中，由于主要的思维形式不同，思维内容的性质也有所不同。例如，抽象思维的内容主要是抽象信息，如具有抽象性和概括性的概念、定理、定律、公式、法则和其他规律等；形象思维的内容主要是形象信息，如具有直观性和个别性的事物的表象、意象、描述意象和形象的系统等。

思维方式 作为主体的个人或群体（如一个民族、一种行业的人们等）在反映客体的思维过程中所表现出来的不同特点和风格。例如，近代科学技术为什么不在中国产生？对于这样一个问题，看法不一。其中一种观点认为：人类科学技术与文化等各方面的发展，不是取决于社会政治制度、语言文字、选才方式等因素，而是取决于千万年来形成的不同思维方式。这种观点从政治上说明东西方思维方式不同的例是：东方中国的政治是线性思维，一元化，统一占主导，人心倾向统一，故有封建大一统政权及其长期存在；而西方的政治是非线性思维，多元化，分裂占主导，人心倾向分裂、独立，靠自己奋斗求生存，故向外扩张、侵略。思维方式往往表现于倾向、习惯、角度、境界等不同的认知结构，是思考问题相对稳定的一种框架、模式。思维方式之形成，往往取决于价值观念和标准、文化传统和水平、知识结构、个性特点以及职业等多种因素。

思维方法 是人们为达到思维目的而必须遵守的规则和采取的手段。思维方法既不同于对客体而言的思维形式，又不同于对主体而言的思维方式，它是主、客观的对立统一体。其主观性表现在，它是以主体的思维目的以及达到目的的简便有效性为转移的，从这一侧面讲，思维方法又是实现目的的程序或捷径；其客观性表现在，思维方法也是人们对客观事物发展规律的反映，也就是说，思维方法是人们依据事物发展的客观规律而提炼、概括出来的，由此侧面出发，还可以说，思维方法是一种认知结构或思维结构，是一种结构技巧或艺术。作为一种思维模式，思维方法也有多种多类。例如，传统也作思维方法解释的逻辑方法，就有比较、分析、综合、抽象、概括、定义、划分、演绎、归纳等多种。

思维对象 当客观事物（及其信息）成为思维内容时，便是思维对象。客观事物在未被感知的时候，作为自在之物，它是存在着的，但还不是思维对象，尽管有可能成为思维对象。

思维机制 又称思维机理。就是关于思维如何发生、是怎样一种过程、其结构如何等最基本问题的科学解释。脑科学的深入研究是揭示思维机制和规律的一条重要途径。在历史上，笛卡儿根据“我思故我在”的命题，第一个提出了思维的反射机制。后来，这个学说为俄国的谢切诺夫和巴甫洛夫所发展。近些年来，关于思维的心理或生理机制的研究，又出现了许多理论，如：思维的大脑神经回路说，思维互补说以及行为主义学派、联想主义学派、格式塔学派、信息学派的观点等，但到目前为止，关于思维机制问题，还没有形成权威性的结论，仍然处在各家争鸣阶段。

思维机理　见思维机制。

思维过程　认识过程的高级阶段——理性认识阶段。认识过程是很丰富的，它包括感觉、知觉、表象、思维等心理过程。其中，感觉、知觉、表象等属于感性认识阶段；思维则是理性认识阶段。思维过程是在感性认识过程的基础上，对客观事物间接的概括的反映过程，是运用概念、判断、推理等思维形式，借助于语言，通过分析、综合对比、分类、抽象和概括等方法而实现的对感性认识材料进行加工、整理，从而揭示事物的本质和发展规律的过程。就是说，思维过程的主要任务是如何对事物实现理性的把握。按照反映程度，思维过程还可以相对地分为知性（即理性抽象）和理性（即理性具体）等两个阶段。知性阶段以形式逻辑思维为主要特征，用“固定的范畴”把握世界：即通过逻辑抽象，实现对思维对象的最简单和最一般的本质概括，形成抽象概念。知性虽然是思维发展的必经阶段，但它所反映的是事物某种抽象的共性或某一方面的本质，而看不到事物的特殊性或其他方面的本质，看不到作为对立面双方的共性与个性的相互联系、渗透和转化，看不到事物是多种本质的综合，因而不能真正反映事物的普遍本质和规律。思维过程的理性阶段以辩证思维为主要特征，用“流动的范畴”把握世界，全面把握事物的多种本质，实现“思维的具体”，在逻辑形式上则表现为具体概念。例如，对平行四边形来说，“两组对边分别平行的四边形”的抽象概括，它只能是一个处于知性认识阶段的抽象概念。也就是说，“两组对边分别平行的四边形”还只是一个抽象意义的概念：它只把握住了平行四边形”两组对边分别平行的四边形”这一共性和这一方面的本质，面对这一平行四边形共性与其余每种四边形的个性之间的联系、渗透和转化，对这一本质之外其他多种本质（例如从对角线或从面积等本质角度），却还没有把握，因而事实上并没有全面把握平行四边形的本质规律。只有全面解决了这些问题的平行四边形，才是认识的深化，才是理性的认识，才是一个具体的平行四边形。思维的知性阶段和理性阶段，在现实的思维过程中是不可分的，知性有待于发展到理性，理性则以知性为直接基础。思维过程由知性向理性的过渡，表现了思维由抽象到具体，由形式逻辑思维向辩证思维的运动，在逻辑形式上则表现为抽象概念向具体概念的运动。

思维形式　即构成思维的诸要素之间互相联系或结合的方式。思维形式相对于思维内容而言，也就是思维的结构框架或模式。作为抽象思维的主体内容的形式逻辑，其思维形式有三种，即概念、判断和推理。形象思维的思维形式是什么？这是一个正在探讨的问题。有人认为，就象抽象思维（指形式逻辑思维）的基本形式、基本元素或砖瓦材料是概念一样，形象思维的基本形式、基本元素或砖瓦材料，是事物的有机整体为感官所摄取的表象。语词，有些是表象的名称，有些则被定义为相应的概念。因此，形象思维既可以以表象为思维元素进行形象思维，也可以用表示表象的语

词概念为思维元素进行抽象（逻辑）思维。

思维进程 表述思维活动为实现思维目标而前进的路程。这段路程的值越大（在允许范围内），表明思维进程越大；反之则越小。也可以用思维速度来刻划思维进程。在以上两种表述中，前种强调的是累计距离，后者则是单位时间内所前进的距离。两种刻划各有其特殊性，应用时应注意。

思维运动 见思维活动。

思维材料 思维的载体，即思维所依附的能够表述思维的那些物质。按约·维·斯大林的观点，人的思维都是抽象的，它必须依附在一定的物质材料上才能具有现实和应用的意义。这种材料就是语言。我国的哲学界、语言学界和心理学界长期以来均以斯大林的理论为依据，认为语言是人类唯一的思维材料。后来有人提出异议，认为人的思维材料不只一种，即除去语言材料外，还有非语言材料。后者主要指形象材料。例如画家绘画，音乐家作曲，工程师进行设计时，他们都不使用语言，而主要是使用形象来思维。运用形象材料同样可以进行抽象，同样可以认识事物的本质。国外学者对思维材料问题也有不同见解。行为主义心理学家坚信语言是思维的唯一载体。皮亚杰则把语言在思维中的作用看得很轻，认为儿童的思维活动并不完全依赖语言。爱因斯坦则说："写下来的语句或说出来的语言在我的思维机制里似乎不起任何作用。那些似乎可以用来作思维元素的心理实体是一些能够（随意地）使之再现并且结合起来的符号和多少有点清晰的印象。"（《爱因斯坦文集》第一卷，第416—417页）。

思维呆滞 又称"思维惰性"。一种思维状态。其主要特征是：①僵化；②呆板；③滞留不前；④启动力大。前有阻兵，旁有埋伏，都可能造成思维呆滞现象。因此，在教学工作中，教师必须使学生听得懂、跟得上，才能从根本上清除了造成学生思维呆滞进而是"落荒而逃"现象的原因。

思维状态 一个人的思维活动在某段时刻的结构、形态、表征或模式。例如，思维定势、思维超前、思维滞后、思维呆滞等，都是一种思维状态。对于思维某段时刻的状态，及时了解，弄清性质和导致原因，并对控制加以调整，从而使原有状态变换为所希望的状态，这在课堂教学中是很重要的。

思维层次 思维是有层次的，这是思维结构的有序性的表现之一。例如，下面几种说法的层次性就是很明显的："生产的竞争主要是科学技术的竞争，而科学技术的竞争，又主要是教育的竞争"；"四个现代化，科技是关键，教育是基础，而中小学教育是基础的基础"；还有所谓宇宙三大运动：大自然运动、人类社会发展运动和思维运动三者之间的关系，以及思维的三种基本类型：形象思维、抽象思维和特异（灵感）思维之间的关系等，都是层次关系，都是思维层次性的具体表现。思维的层次性就好象思维在爬一座金字塔，一层一层地爬，一层一层地考虑问题，不同的层次说不同的话。有时候，不同层次的认识和语言是非常难以沟通的，这就

是所谓思想境界不在一个层次上。许多事物往往是一种层次性结构，如果思维不按层次去认识它，揭示它，那么我们就很难全面认识它，常常处于被动和盲目之中。例如，数学科学知识具有典型的抽象特点，这一点很少有人不清楚，但是数学科学知识的抽象是有层次的这一点，许多人却从来也没有想过。因此在学习中，便把学习算术的一套方法、语言和思路，搬来对付初等代数学习，或者把在中学学习初等代数的一套方法、语言和思路，搬到高等代数学习当中。搞不清理论层次，认识不到层次不同语言也不同，学习效果就是很难奏效的。事物结构中的层次性是非常普遍的现象，因而思维或认识上的层次观可以认为是一种哲学观。

思维空间　思维所及之范围。一个人的思维空间同他的知识视野大体一致，所谓开拓思维空间实则就是扩大知识视野。少见多怪，是由于知识少，相应的思维空间一时未能盛下新事物而导致的一种现象；只有识多见广才能产生相应的思维空间，以满足对任何新生事物的包容。散布于各类文章中的“点状思维”、“线型思维”、“平面思维”（即二元坐标思维）、“立体思维”(即空间思维)以及“多元思维”（即全方位思维）等概词，都是关于思维空间大小的区别提法：多元思维（全方位思维）就是在多维空间中发生的思维，立体思维（空间思维）就是发生在三维空间中的思维，平面思维（二元坐标思维）就是发生在二维空间中的思维，线型思维就是发生在一维空间中的思维，而点状思维就是一种连一维空间也谈不上的断断续续的缺乏逻辑性的思维。思维空间之大小不仅反映知识视野之宽窄，反映一个人思维境界之高低，尤其重要的是，它往往是使人不断开拓前进或是固步自封的决定性因素。人类社会发展同科学发展一样，总是随时都存在一个思维空间开拓与否的问题：思维空间不断开拓，社会就向前发展；思维空间收缩，社会就向后倒退。有些问题的解决，不开拓思维空间就办不到。例如求函数的极值，有时如不扩大自变量的取值范围（极值存在的空间）就得不到答案。

思维规律　客观世界的规律在人的思维中的反映，是思维对事物发展过程中的本质联系和发展的必然趋势的再现。客观事物的规律和思维规律是一致的，这种一致性是在认识的历史发展过程中逐步实现的，日趋完善的。思维规律中除去同客观事物规律相一致的部分外，还有一些特殊规律。例如形式逻辑的同一律、矛盾律、排中律、充足理由律等。又如辩证逻辑的从感性到理性、从现象到本质、从抽象上升到具体、从相对真理到绝对真理等。意义更具体的思维规律，那就是枚不胜举了。

思维怪圈　所谓怪圈系指这样一种现象：我们在某一等级系统中逐步上升（或下降），结果却意外地发现自己又回到了原来开始的地方。用形象方法表述怪圈，就是：把一长纸条的两端拧一个劲粘接起来（由此，本来有两个面的纸条变成了只有一个面的纸圈），便构成一个不分里、外（实际是里外合一）的怪圈。一个蚂蚁不论

从那一点开始顺圈爬行，它走过纸条原来的这面，接着又走过纸条原来的那面，看起来在前进，但总是会回到原来的地方，也就是跳不出这个怪圈去。怪圈是一种普遍现象，在数学基础研究中归结为"罗素悖论"。总之可以这样说：一个人总是想自己不可能想出结果的问题，总是做自己做不到的事，那么，这个人的思维便处于怪圈之中。能否及时识破怪圈，打破怪圈和跳出怪圈，是思维能否跃进到一个更高层次的必要前提。

思维定势 又称思维惯性。指一种惯性思维过程。人们在实践活动中，用某种方法或理论成功地解决了某一问题后，如果再遇到类似问题时，往往会不自觉地套用先前使用过的那一方法或理论，而不是首先考虑弄清那一方法或理论是否也适用于面前所遇到的新问题，这就是思维定势。它反映了人们在思考问题时的同化倾向，即只吸收外部世界中那些能同它有效结合的东西的倾向。人们在认识和实践过程中经常出现这种倾向，即倾向于看见以前曾经看见过的东西，或者倾向于看见希望看见的东西，从而形成一种思维定势。思维定势并非完全是消极的东西，即它可能带来或导致一种正确的结果，从而为人们所积极利用。但在许多情况下，思维定势往往是创造性思维的一大障碍。认识世界的目的是为了改造世界，而改造世界就更多地需要异向思维或多向思维。在原来方向上的失控延续或重复，局限于已有知识和经验，经常是人们深入认识问题、进行发明创造的重大阻力。

思维品质 即思维的特性。主要有：（1）思维的抽象概括性。思维的抽象过程。就是在思想上区别本质属性和非本质属性，从而抽取前者而舍弃后者的过程。思维的概括过程，则是在思想上将某种事物的属性推广为同类事物的共同属性的过程。（2）思维的间接性。思维能对没有直接作用于感官的事物加以反映，能对根本不能直接感知的事物加以反映，还能在对现实事物认识的基础上进行无止境的扩展等。（3）思维的逻辑性。就是说，思维过程有一定的形式、方式、方法，是按照一定的规律进行的。（4）思维的目的性。思维总是有目的的，总是与"解决问题"相联系，总是指向解决某种问题的任务。（5）思维的层次性。思维能力是智力的核心。智力是分层次的，智力的超常、正常和低常等层次之区分，主要体现在思维能力上。（6）思维的生产性。有人将思维的产品分为四大类：（一）是认识性产品，如调查报告、消息报道、社会动态和科研著述等；（二）是表现性产品，如文学作品、艺术创作等；（三）是指导性产品，如工作计划、工程设计、技术图纸和改革方案等；（四）是创造性产品，如科学研究中提出的新见解、新理论，技术发明，工业新产品、新工艺等。

思维科学 一门新兴的基础科学。按照中国科学家钱学森的观点，它同自然科学、社会科学、数学科学、系统科学、人体科学、军事科学、文艺科学等八大基础科学一起，共同组成了现代科学技术体系。思维科学的研究

对象是人的思维，包括它的特点、形式、作用、历史发展和其他规律，也包括它的生理、心理机制和哲学本质，以及关于它的人工模拟——计算机和智能机等。思维科学的全部理论也分三个层次：一是基础科学，如思维学、信息学等就属这个层次；二是技术科学，如思维科学方法论、数理语言学、模式识别、情报学等，均属这个层次；三是工程技术，如密码技术、计算机软件工程、文字学、计算模拟技术、人工智能等，均属这个层次。思维科学通往哲学的桥梁（即关于思维科学的哲学）是认识论。思维科学同认知科学极为相近或类似，但又不是一码事，因为后者的研究范围比前者狭窄得多。思维科学研究的方法主要有：通过脑科学研究的途径方法，认识思维的生理和心理机制；通过对某些思维结果、产品的创造过程的研究，认识思维过程及其历史发展；通过对思维的物质外壳——语言的研究来探讨思维问题；用内省法和思辩手段总结认识思维规律；用模拟法研究思维模式等。由于钱学森教授的积极倡导，思维科学在我国首先萌发以来，还只有十年多一点时间，研究刚刚开始，探索只是初步的、前奏式的，许多理论和实践问题，还有待于在今后的工作中去寻求答案。

思维活动　即思维运动。是关于思维的一种哲学观。按照这种认识，思维是同人类社会发展运动和大自然发展运动共同组成的宇宙三大物质运动之一，是在前两个层次上的第三个层次上的运动。迄今为止，思维活动是世界上被我们认识的仅有的一种能把物质的运动直接转化为精神的运动的活动。在我们研究和求答“人是怎样思维的”的过程中，无疑，思维是作为人的一种活动来对待的，据此，人们提出了种种猜想：它是化学的运动？它是电子的运动？它是神经脉冲运动？还是……？如此等等。思维运动被认为是物质运动，原因是，它至少是在作为物质的人脑中进行的。同物质运动相对，这儿提到的精神运动则指意识、认识、记忆、回忆、联想、判断、推理等。

思维结构　见认知结构。

思维素质　就个体而言，思维素质包括天赋的遗传因素（例如反应的灵敏与迟钝）和后天得来的知识视野、思想境界以及生活经验等。就群体而言，思维素质当然少不了个体因素，但更多的成份是群体条件：价值标准，视野境界，观念要素，方法途径；历史背景，现实条件等。一个民族的思维素质，对于其社会发展具有举足轻重的作用。

思维速度　任何一种思维活动都是一个过程，不妨以S表示它的量值，每一个过程又对应一个时间的值，不妨以t表示，那么，所谓思维速度的快与慢，则以商s/t来表述。

思维监控　对思维的自我监督与控制。以思维自身为对象，是思维结构中不可缺少的组成部分，其实质是思维活动的自我意识。其功能表现为：（1）对思维课题的意识、定向或注意。即对思维的正确性与思维方向可靠性的直觉估断，从而提高思维活动的自觉性和准确性。例如，思考与探索沿着何种方向前进，解题成功的可

能性多大，猜想或待证结论的正确性如何，等等。（2）对思维活动进程的监控，即对思维过程的自我估价、自我激励、自我控制。控制思维活动内外的信息量，排除思维课题外的干扰和暗示，删除思维过程中多余或错误的因素，提高思维活动的独立性和批判性。（3）对思维策略进行监控。思维活动的顺利进展，有助于肯定原来的思维策略；思维进程中的困惑或失败的体验，则促使修改原来的思维策略。这种监控，并不完全以暂时离开目标远近为标准，而是具有一定的弹性，有长远目光与整体观念的。数学解题过程中思维监控的必要性、作用以及对解题效率的影响极大，其机制系来源于大脑的思维实践，植根于解题经验的积累。

思维效率　思维是运动，是脑的劳动，凡劳动必有成果。思维成果是个多元函数，自变量可以是时间，可以是脑力，可以是脑力劳动所必需的精神（如知识、经验等）或物质(如生活品、营养品等）以及其他等。所有自变量的值积的单位值所对应的思维成果值，叫做思维效率。例如，在2小时内，甲生以乙生3倍的脑力做完18个题目，而乙生做了15个题目，那么，甲生的思维效率就是$18\div(2\times3)=3$，而乙生的思维效率就是$15\div(2\times1)=7.5$。自然，还可以根据需要设计另外的计算方法。

思维惯性　见思维定势。

思维超前　指思维向前超越现实一段相当长、而且较难为一般人所接受的距离。它同预测思维的区别是：预测思维是预先安排的，对可望而可及的未来所作的科学思考；思维超前则一般是盲目发生的，往往不能实现的某种灵机一动。思维超前同超前思维的区别是：超前思维是一种有一定科学依据但却近期难以实现的预测思维。

思维滞后　与“思维超前”是一对对立概念。指思维落后现实一段相当长、而且较难为一般人所接受的距离。这种思维现象总是企图使历史倒退，让现实返回到历史上的某一时刻，因而总是跟不上历史的步伐。例如，有人对现实某件事情不满的理由归结为“不如过去……”或者“这样的事过去是怎么办”等，就是思维滞后。思维滞后是一个“中性”名词，同“思想保守”不是同一概念。

思维惰性　见思维呆滞。

思维境界　一个人的思维空间所能达到的最大世界，也是一个人对客观事物的宽容程度的最大值。例如，数学史上许多新理论的诞生，常常遇上两种人的两种作用：一种人取怀疑、不承认、讥笑态度，另一种人则取理解、宽容、鼓励态度。实际上是两种思维境界，前者低狭，容纳不下新生事物；后者高瞻远瞩，总是使自己的思维境界达到对新生事物取宽容接受的程度。思维境界含横向阔度和纵向高度二义，但习惯常以高度为主。思维境界的高低，与一个人的出身、个性、知识、修养和认识水平都有关系。在中小学数学教学中，对同一节数学教材，由思维境界高低显著不同的两位老师来讲解，效果是大不一样的。思维境界的提高与思维空间的开拓是一致的，主要是通过扩大知识视野来实现。

思维模式　泛指思维规律、思维结构等思维过程中相对稳定、独具特点，并在相应的外延内具有标准的楷模作用的状态、形状或样子。例如，思维形式、思维方法、思维方式就是三类不尽相同的思维模式：思维形式是对客体而言；思维方法是关于主客体的对立统一物；思维方式则是对主体而言，等等。

思维器官　人体的生理机能是通过相应的器官的活动而实现的，人脑是实现思维机能的生理机构，所以说，人脑就是思维器官。但是，脑的机能十分复杂，思维只是脑的机能之一，而非全部。脑位于神经系统的中枢部分，种族进化到脊椎动物阶段才有脑出现，人类的脑是最发达的，标志之一是具备了思维机能。高等动物也有思维机能，但与人脑有着质的差别。大脑分为左右两个半球，每个半球的表面复盖着一层由神经细胞组成的灰质，叫大脑皮质。两侧大脑皮质通过胼胝体、前连合和海马连合互相连系。这种连系对于实现思维的协调统一有着重要作用。两半球间的连系切断后，每半球均可独立进行思维活动。神经元是脑的基本活动单位。脑内神经元估计有10^{11}之多。神经元之间有着秩序严格、机能特异、层次明显的错综复杂的连系和相互作用。神经元之间的连系叫神经回路。各种信息通过不同层次的神经回路，进行着不同水平的分析、综合、抽象和概括。高层次的神经回路构成思维活动的神经基础。脑内不同部位的神经回路在思维中的作用是有区别的。左侧大脑半球对于语言信息的处理占优势，右侧大脑半球对非语言信息，特别是与空间定位有关的信息处理占优势。但是，脑机能不同部位的分工是相对的，可塑性很大，不同神经回路之间可出现机能补偿。例如失去左脑或右脑的半脑人基本上可以正常生活，原因是他失去的半脑的功能由另一半脑作了补偿。

思维互补说　关于思维机制的一种学说。美国学者米盖尔·卡扎尼加认为，大脑的左半球是优势半球，它主管的“抽象思维”是“优势思维”。他认为左半球是聪明的积极的，右半球是被动的迟钝的。负责主要认识活动的思维是在左半球形成的。但是，多数学者认为，抽象思维和形象思维、左脑和右脑具有互补的优势，两者缺一不可。对裂脑人的实验表明，裂脑人很难搭积木，而正常人却能够轻易地完成。这是因为搭积木既需要形象思维，又需要抽象思维。近期，美国神经心理学学者爱克尔·霍农进一步证明了思维互补说。他发现，右半球象一个万能博士，形象思维善于提出解决新问题的各种尝试；左半球象一个熟练的专家，抽象思维善于按一定的程序有效地解决已知的问题。例如辨认陌生人靠右脑，辨认熟人靠左脑，翻译莫尔斯电码，生手用右脑，熟手用左脑。新任务往往由右半球接收，一旦找到了门路，左半球就取而代之。总之，左右半球承担的两种思维，无论是思维的方式、思维的对象，都各有其优势，只有实现互补，才会使大脑的思维功能得到最大的发挥。

思维稚化术　一种思维状态，也是一

种思维策略。它是指在客观世界面前保持一种儿童的思维状态，好奇第一，把认识对象当做首次所见而又感兴趣的东西来钻研。把熟悉的东西看成是陌生的，在平凡中找出不平凡的东西，就能够发现同中之异，思维才有高效率。由于熟知的东西不一定是真正全面知道了的东西，思维的稚化可以克服成年人由于经验的积累、知识的增多所形成的“世界本来如此”的消极定势，激励探求热情，多产生一些为什么。思维的稚化可以产生一般人在正常情况下不易产生的新思路、新方法、新创见、新体会。思维稚化术的内容如：保持童年的好奇心，对任何事物总爱问个为什么，不迷信现成的结论；尊重权威，又不迷信权威，保持思维的批判性；同比自己年轻而好学好问好钻研的同志交朋友，经常切磋问题；故意制造“陌生感”，自问：这东西应该是这样的吗？为什么不会是另外一种样子呢？

思维的伸缩性　思维的重要特性之一。人的思维好象周身生满触角，根据需要，随时从某处伸出，又往往为适应客观环境而随时缩回，直至龟缩成休眠状态。有人说，思维伸缩性的速度可以超光速。思维在解决问题过程中，这种伸缩性是频繁的、高速变化的，有时如万马奔腾、急流直下，有时则如窃窃私语、蚕食桑叶，有时如疯如痴，有时则肃静若无。思维的伸缩性是思维复盖问题的具体实施。没有灵活恰当的伸缩，就不能良好地复盖欲解决的问题，对欲解决的问题若不能完成必要的复盖，则没有可能真正解决问题。思维伸缩性的决定因素或“物质基础”，是知识掌握的多少和灵活运用的程度。例如，欲解一道主要用正弦定理来解决的问题，如果解题人根本就不懂正弦定理，那么他的思维触角（伸缩性）就不可能使他的思维能够完成问题解决所必需的复盖。另一方面，他虽然学过正弦定理，但他却对正弦定理无一点演绎解释或应用能力，那么，他的思维伸缩性就是极其小而迟钝的。也可以说他在此问题面前几乎处于“思维呆滞”状态。

适应　即感受器在刺激持续作用下所产生的感受性（有机体的分析器对刺激的感觉能力）的提高或降低的变化过程。例如从亮处走进暗室，起初几乎什么都看不见，经过对弱光的感受性的逐步提高，视觉慢慢恢复，叫做暗适应。反之，从暗室走向明亮处时，则有“明适应”发生。夜盲是暗适应能力减弱的结果。适应在嗅觉、听觉、肤觉、味觉等方面也会发生，在痛觉方面则不甚显著。由于视觉、听觉经常发生感觉适应，因此在教学和数学教学中必然会出现积极的或消极的“教学适应”现象，应当主动予以利用或防范。

种差　见属属性。

种属性　见属属性。

种概念　见属概念。

科学思维　日常思维的对立概念。一般有两种含义。首先，相对于日常思维而言，科学思维的典型特征主要是它的理性、深刻性和可靠性。理性也可以说是抽象性，就是说科学思维是从道理上、规律上、理论上来研究问题的。因此，科学思维所反映的问题

是深刻的，抓着了根本，揪住了实质，其可靠性也即由此所致。科学思维能力是科学家和一切从事科学研究工作的人的基本素质之一，也是一个民族、一个社会文明程度的标志之一。俗称“科学头脑”主要就是指科学思维能力、水平。其次，每一门类科学都有自己独特的思维方式和一般规律，都是一种有别于日常思维的科学的思维。例如，数学思维、文学思维、史学思维、艺术思维、化学思维、哲学思维等。在此种情况下，科学思维便是各门各类具体科学的特殊的心理过程的概称。在中小学数学教学中，关于数学科学内容的讲授，必须讲究数学科学自己的科学思维——数学思维，否则，教学效果便会从根本上受到影响，遗祸无穷。

重视　见再现。

复习　把识记过的材料实施重复识记，从而强化和巩固记忆痕迹的学习过程。它是积极防止遗忘的主要途径，是使人们获得知识、技能的必不可少的手段。理解是记忆的必要条件，但只有理解而无复习还不能保证精确而牢固的记忆。复习不仅能增强记忆，而且还能促进理解。要使复习取得良好的效果，在很大程度上要依赖于复习的正确组织。正确组织复习的做法有：①及时复习；②复习中阅读与尝试重现交替进行；③合理分配复习时间。

复合判断　见判断。

复合命题　见命题。

顺向思维　见双向思维。

保持　“记忆”的第二个分过程。指被识记的信息在人脑储存中得以延续时间的过程，是实现再现和回忆的重要保证。保持并非识记信息的简单保存，而是一个动态变化的过程。实验表明，保持在头脑中的信息，随着时间的推移和已有知识经验的影响，不仅数量上有增减，在内容上也会有变化。例如，已经熟记的公式经过一段时间后，既可能发生整体或部分的错记、漏记，也可能与其他公式发生混淆。错记、漏记、混淆等都是保持出了问题。

信号　指条件刺激物（或其代号）。信号就是预告：通知的意思。巴甫洛夫认为，信号作用是动物和人进行一切心理活动的根本前提。一切心理活动都表现为对信号的接收、编码和反应。信号分为第一信号和第二信号两种。凡是现实的各种具体实物刺激物直接作用于有机体而起信号作用时，都称为第一信号；而由人的言语、词和词组代替了具体刺激物而起信号作用时，则称为第二信号，即巴甫洛夫所说的“信号的信号”。

信息　信息论、控制论、系统论的基本概念之一。广义的信息是人类全部知识和其余客观事物运动变化状态之表征的总和。客观存在的一切事物均处于运动变化之中，这些运动变化在不同的时刻和不同的条件下，均呈现一定的状态和存在一些特性。反映或显示事物状态和特性的表征，包括自然的和人为的，都是信息。例如，月亮的圆缺，天气的晴阴雨雪，人的相貌，机器的轰鸣，教师的声音，学生学习的聚精会神，表示平行四边形的符号▱，代表圆周率的无理数π等，都是信息。狭义的信息，则指通过某

种载体展现出来的同人们的日常生活、工作关系密切的信号和消息。例如，新闻报道,戏剧电影广告,科技、经济情报，书信等。信息普遍存在于自然界、人类社会和思维领域，是一个富有哲学意义的概念。归根结底，信息是物质的一种具有普遍意义的属性。对于生物体来说，信息是一种心理现象。信息储存是神经组织的固有特性。信息的分析、综合和储存是人的心理活动的实质。有人认为，信息是指对接受者来说预先不知道的信号和消息。这个观点值得商榷。因为“预先不知道”或“知道”这是个信息价值问题，价值不大或干脆就失去价值的信息也是信息。特别是，“值价大小”是相对的，对这个人价值不大而对另一个人可能很大。

信息论 “老三论”之一。是研究信息的本质，并用数学方法研究信息的计量、产生、接收、传递、变换和储存的一门新兴的综合性学科，是现代思维和数学思维极为关注的一个重要研究方向和领域。美国贝尔电话研究所的数学家G•E•申农（1916～ ）被认为是信息论的创始人，他于1948年出版的著作《关于通讯的数学理论》被认为是信息论正式诞生的标志。关于信息的定义，众说纷纭，莫衷一是。主要观点如：认为信息是事物表现的一种普遍形式，信息就是消息；认为信息应是具有新内容、新知识的消息；认为信息与通信有密切联系。随着对通信问题的深入探讨，产生了三种不同的信息概念：一是“技术信息”概念，认为信息是物质属性的反映；二是“语义信息”概念，认为信息是我们适应外部世界，并向外部世界进行交换的内容的标记；三是“价值信息”概念，认为信息是具有价值性、有效性、经济性及其他特性的知识。现代自然科学则把信息看作是物质和能量在空间和时间中分布的不均匀程度，等等。信息的特征，一般认为有：信息是可以识别的，可以通过感官直接识别，也可以通过各种探测手段间接识别；信息是可以转换的，如语言、文字、图象、图表等信息形式就可以同计算机的代码以及广播、电视、电信的信号等互相进行转换；信息是可以再生的，如计算机收集的信息就可以用显示、打印、绘图等形式再生成。此外，可存贮、可处理、可传递等，也都可以看作是信息的特征。信息论认为，任何一个通信之所以需要，就是因为接收终端在收到信息之前，不知道发送的信息是什么。接收终端对发送的信息具有“不确定性”，当获得了信息之后，这种“不确定性”就可以减少或消除。信息数量的大小即以消除“不确定性”的多少来表示，而事物的“不确定性”的多少是用概率函数来描述的。所以申农等人建立了一个信息公式，公式中的量是统计量，常称统计信息或概率信息。在信息论中，采用“熵”这种量，来刻划对象的不确定程度，用收到信息后熵的减少来标志不确定性的减少，以此作为信息量的度量。有三种类型的信息论。一是狭义信息论，主要研究消息的信息量、信道容量以及消息编码问题等。二是一般信息论，主要也是研究通信问题，同时包括噪声理论，信号滤波与预测，调制

与信息处理问题等。三是广义信息论，不仅包括以上两种信息论的内容，而且包括所有与信息有关的领域，如研究心理学和管理信息等。信息论的基本思想已为我国教育界所重视，因为任何一门学科的教学，都是一个信息过程，有意识地运用信息论的基本原理指导课堂教学，同盲目地传授知识，效果是大不相同的。

胆汁质　见气质学说。

美感　一种高级情感。是在对自然现象、社会现象和艺术的观赏中，对于美的主观感受、欣赏和评价。人都有不同程度的美感能力，但不是天生的，而是在社会实践中产生和发展起来的。不同时代、阶级、民族和地区的人，固然有不同的美感，就是个人与个人之间也会因文化修养、个性特征等的不同而存在美感的差异。美感是从具体形象得来的，所以美感具有形象的直觉性和可感性等基本特征，离开了具体的形象，美感就不存在。人的态度、思想意识和道德感等，无不以形象思维的方式途径，渗入到美感的形象里面，构成美感的具体内容。因此，美感是形象、思想性和社会性的统一。美的标准既反映客观事物的属性，又受人的思想意识制约。所以，引起不同时期和不同阶级的人的美感的事物，既有共同的，也有不同的。人们从数学科学的抽象形象（或理想形象）中感受到一种特殊的美——数学美，这是一种抽象的美、逻辑的美、模拟的美。数学教育只有使学生感受到数学美的存在，他们才会对数学真正发生兴趣。

美育心理　教育心理学的一部分，研究美育过程中学生的心理活动和心理品质的形成。美育心理的主要内容是，探讨如何以音乐、美术、文学的艺术美和自然、社会生活中的现实美为教育手段，感染学生，发展他们的美感和鉴赏美、创造美与识别美与丑的能力，培养他们高尚的道德情操和文明习惯，促进他们的智力和身体的健康发展。由于数学美的特殊作用，数学美育也是数学教育不可忽视的任务和内容之一。

迷津　心理学做动物学习实验时用的一种仪器设备，用以观察动物如何获得经验和改变行为的过程。迷津有多种多样，较常用的一种是木制或金属制的盘，隔有若干条路径，有死路和活路。活路有捷径和迂回道路，通往食物箱或出口。把被试动物（如白鼠）放在入口处，便可观察它逐渐舍去死路和迂回道路而最后选择捷径的过程。

前科学　见潜科学。

前摄抑制　“抑制”的一种形式。指已经熟记的信息对当前正在识记的信息的干扰，使后者的识记效果受到消极影响。这种抑制现象最容易发生在前后两种信息十分相似的情况下。如学生初学乘法时，动辄便使用先前已学习过的加法进行运算而想不到使用乘法，这是过去的神经过程痕迹抑制当前神经过程的结果。在教学中，学习活动形式多样化和劳逸结合，可防止或减少前摄抑制的发生。

逆定理　如果一个定理的逆命题也是一个定理，那么这两个定理叫做互逆定理；其中一个定理叫做另一个定理的逆定理，也可以说：将一个定理的

条件和结论交换位置后所得到的定理，叫做原定理的逆定理。例如，定理“在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等”和定理“到一个角的两边的距离相等的点，在这个角的平分线上”就是两个互逆定理。

逆命题 见命题的四种形式。

逆向思维 见双向思维。

逆否命题 见命题的四种形式。

活动 指有确定目的，并具有一定社会职能的各种动作的总和。也就是人们为达到某种目的而采取的有意识的行为动作的总和。社会生活条件决定了活动的性质、目的和发展。人的心理是在人的实践活动中形成和发展起来的；心理又调节着人的各种实践活动。按活动的对象和目的不同，可以把活动划分为多种，但最基本最主要的活动是生产活动。此外，还有科学实验活动、学习活动等。

派生定义 一种特殊的属种定义。通过派生定义法而获得的定义。派生定义不象典型种属定义那样，对被定义概念的内涵采取直陈式的揭示方式，也不象发生定义那样，把被定义概念的种差寓于被定义概念的产生或形成状况之中，而是这样一种模式：假设被定义概念存在一个典型属种定义（一般说来，这是可以做到的），将其所揭示出来的被定义概念的内涵，以一个或几个由其导出且与其等价的属性取而代之，从而有与典型属种定义等价的命题（组），用这样的命题（组）来定义概念，所得的定义就叫做派生定义。例如，圆周率概念，用典型属种定义法定义是：圆的周长同直径的比值。但实践和推理均可证明，这个比值就是常数3.14159……。若以π表示，则有命题“$\pi=3.14159\cdots\cdots$”，它显然是由圆周率的前述典型属种定义的内涵派生出来并且与其等价的。利用这个命题，可以给圆周率另外一种定义：“圆周率就是$\pi=3.14159\cdots\cdots$”或“$\pi=3.14159\cdots\cdots$叫做圆周率”。这样一个定义，就是圆周率的派生定义。又如，零指数幂a^0（$a\neq0$）这个概念，产生于指数运算（指数运算法则$a^m\div a^n=a^{m-n}$，$a\neq0$，运用于幂自除时所导致的一个新概念），本可把它定义为“若$a\neq0$，则$a^0=a^m\div a^m$”，即“任何不等于零的实数的零次幂，是以该不等于零的实数为底数的任何次幂自除所得的商”，这是一个典型属种定义，意义比较直观。但是，任何不等于零的数自除，其商均等于1，因此有命题组“$a\neq0$，$a^0=1$”，用这个命题组作为零指数幂的定义，就是一个派生定义。因为，“$a\neq0$，$a^0=1$”由前述典型属种定义“若$a\neq0$，则$a^0=a^m\div a^m$”导出且与其等价。在中学数学教学中，数学概念的派生定义虽然不多，但却都感到比较“难”。原因是：首先，派生定义所揭示的概念的内涵，较之典型属种定义所揭示的内涵，其真实性（或客观存在）不那么直观，给人以需要“证明”之感觉。某些人之所以产生“证明定义”的多余企图即由此导致。其次，派生定义的表述“不象定义”，而更象定理、法则、规律等命题。这就更加强化了“证明定义”的思维定势。对此，必须明确：①定义式命题和判断式命题的区别：判断式

命题是关于已知概念与另一个已知概念之间的某种断定；而定义式命题则是对未知概念（被定义概念）关于已知概念的某种等价规定，即用已知概念对未知概念所作的解释。②判断式命题的真实性，在大多数情况下不易直观感知，往往需要根据已知的真命题，通过推理来证明；而定义式命题实际上是对新发现的客观对象的直观承认并命名，它的真实性由其客观存在可以直观说明，而无需加以推理证明。“定义是不可证明的”或“对定义不要企图予以证明”一类说法，是从企图证明定义走向另一极端。恰切的说法是：定义无需证明。

举止形态学　见非言语行为。

突变理论　“新三论”之一。现代思维与数学思维十分关注的一个领域。客观存在两种基本的变化方式，一种连续的变化，在数学上早已成功地运用微积分获得了圆满的解决；另一种变化，如岩石的断裂，火山的爆发等，这是一些事物从性状的一种形式突然跳跃到根本不同的另一种形式的不连续变化，称之为突变，也译为灾变。不连续变化过程，传统的微分方程是无力解决的。法国数学家R·托姆（1923～　）教授在前人研究的基础上，于1972年发表了《结构的稳定性与形态变化学》的名著，运用微分映射的奇点理论研究非连续性突变，奠定了突变理论的基础，标志着突变理论的正式诞生。突变理论研究各种形态、结构的非连续突变现象及其规律。1980年，英国数学家桑德斯出版《灾变理论入门》一书，指出：“作为数学的一部分，灾变理论是关于奇点的理论。”所谓奇点，是相对于正则点而言的。函数达到极大或极小值的点就是函数的导数等于零的点，就是最简单的奇点，或称临界点。三维欧氏空间，临界点的集合是一个曲面，称为临界曲面。使函数取极小值的点叫稳定点，临界点不一定是稳定点，所以临界曲面上的点可能使系统稳定或不稳定。突变理论把描述状态的那些量称为状态变量，而把引起突变原因的连续变化的量称为控制变量。例如，在汽——液相变模型中温度和压强是引起水突变原因的连续变量，故称控制变量，水的密度则为状态变量，密度高的状态对应着液态，密度低的状态代表着汽态。突变理论发表以后，国际数学界引起激烈争论，褒贬不一。褒者认为是继牛顿、莱布尼兹的微积分以后最大的发现，是数学的一次革命。也有的加以抨击，认为不连续现象可以用连续方法解决，而对于社会科学中的突变现象又不能做定量描述。这都是偏颇之见。

语言思维　是“运用或借助语言进行思维”的缩称。研究和实验表明，尽管语言和思维不是一码事，更非如斯大林所说“只有唯心主义者才会谈到同语言的‘自然物质’不相联系的思维，才会谈到没有语言的思维”。然而，思维和语言的确存在着极为密切的关系，语言对思维确实具有极为重要的影响和作用（反过来也一样）。在历史上，语言的发展是大脑和思维发展的重要动力；语言直接影响思维，人们的知识，绝大多数是通过语言间接接受而得；语言能帮助修正思

维，从而增强思维的严密性，提高其正确性；特别是，人们的社会交际、思维交流，大多是借助语言来实现的。因此，运用和借助语言进行思维，即语言思维，就是一个具有实际意义而且十分重要的概念了。所谓语言思维就是说，语言是位于现实与思维之间的一种中介物，它既可被当作客观事物的识记信息，因而又可被作为思维的对象或内容。语言思维就是以语言为对象或内容的思维。一般说来，由于语言总是由表示概念(表象)的词和表示概念间的关系的判断词句所组成，所以，思维直接反映客观事物而获得的概念（表象）和关系判断等内容，便可以由识记客观事物的语言信息（词、句等）所代替、从而使思维对客观事物的直接反映转换成为思维通过语言对客观事物的间接反映，就是可行的了。经验证明，善于讲演和善于写作的人，大都是善于语言思维，并且是其思维明显受益于语言的人。

语言心理学 运用心理学的观点和方法研究语言的一门学科。作为心理学的一个应用分支学科，它主要研究人获得（包括理解和使用）语言的心理过程、心理机制及其发展规律。因此，不可将语言心理学误为“心理语言学”。实际上，后者是语言学的一个应用（于心理学）分支学科。语言心理学揭示了语言学中的心理学规律，无疑为语言学研究和数学提供了重要的科学依据。语言心理学各派对于人们如何获得语言问题，在认识上有分歧：美国新行为主义者奥斯古德和毛勒等认为，儿童的语言主要是通过学习、强化以及对上下文概括等途径获得；美国学者米勒和乔姆斯基等认为，人具有一种先天的理解和派生语言的能力和生理心理机制，儿童对语言的获得、理解和使用，主要由先天因素决定。当代语言心理学广泛用于诊断和治疗各种言语障碍症、外语教学和本族语言的启蒙教学等方面，并已成为工程心理学、航空心理学和宇宙心理学的重要组成部分。

语词—逻辑记忆 见逻辑记忆。

绝对概念 见相对概念。

耗散结构论 “新三论”之一，现代思维与数学思维十分关注的一个领域。耗散结构论是比利时自由大学教授I·普利高津（1917～ ）在1969年提出的一种新理论。耗散结构理论认为，一个远离平衡的开放系统（无论是力学的、化学的、生物学的或社会的系统），在系统的某个参量变化达到一定的临界值时，通过涨落发生突变(即非平衡突变)，就有可能从原来的混沌无序状态变为一种在时间、空间和功能方面的有序状态。这种远离平衡的开放系统，是一个在非线性区形成的宏观有序结构，这种宏观有序结构需要不断与外界交换物质和能量才能维持相对稳定性，才能不致因为外界的微小扰动而破坏了相对的稳定性。由于这种宏观有序结构需要耗散物质和能量才能维持其有序状态，所以称之为耗散结构。该理论是研究耗散结构性质，以及它的形成、稳定和演变规律的科学。由于宇宙中几乎所有事物都可看成是与周围环境有着相互依存和相互作用的开放系统，因此耗散结构理论的研究成果能广泛地应

用。它能被用来解释生命形成的过程，说明社会调节机制的形成和城市的扩展。阐述思想潮流的兴起和思维结构的变革等等。

素质　人的先天的解剖生理特点。主要是神经系统和感觉器官方面的特点。素质是心理活动发展的生理前提，不能决定人的心理内容和发展水平。人的心理活动是在遗传素质与环境教育相结合中发展起来的。近期研究认为，素质同脑和感官的微观结构有关，尤其同大脑皮层细胞群的配置、神经细胞层结构的个体特点有关。素质也是在社会实践中发育成熟起来的，某些素质上的缺陷可以通过学习和实践获得不同程度的补偿。

热情　一种比较高级的情感形态。是对某人某事所表现出来的，包括信任、亲近、支持或拥护、积极、关心等多种情感交织的一种复杂的心理倾向。热情应献给正义的事业和正派的人，从而发挥积极、促进作用。否则，热情将会招致违反热情本来目的的严重后果。至于某些心怀鬼胎的“热情”，实际上是阴谋诡计，不在该词的外延范围之内。

格式塔心理学　见完形心理学。

原命题　见命题的四种形式。

原始思维　主要指相对于文明社会而言的原始社会中人的思维，有时也指相对于思维发展处于较高水平或较高阶段而言的较低级阶段和较低级水平的思维。不论哪种含义，原始思维都是一个具有时间性的概念，它不是对思维发展的某一点的界定，而是指人类思维发展起始阶段的特殊性及其特征。原始思维的起始上限是人类起源的上限；原始思维的下限，原则上应当是文明社会历史的开端。原始思维的本质特征在于，它是一种非概念推理性的直观象征思维，也可以说是在形成抽象思维前的、初始阶段的具体形象思维。研究原始思维对于探讨现代人的现代思维的由来与发展，可以提供许多启发和借鉴。

原始概念　又称无定义概念或基本概念。定义概念的规则之一，是所谓不准许“恶性循环”。就是说，不能用尚未定义或意义不明确的概念来解释未定义或意义不明确的概念。根据这个规定，根据属种关系普遍存在的事实和“属＋种差”的定义公式的普适性，可以断定：没有属概念的概念，是不可定义的。那么，没有属概念的概念是否存在呢？确实存在这样一些“祖宗式”的概念，在它们之“上”，再也找不到能够用来定义它们的已定义的上位概念了。这样一些概念，叫做原始概念。例如，中学数学的数，量，自然数，值，运算，体，面，线，点，平面，曲面，线段，直线，图形，轨迹，集合，变换等，都是原始概念。原始概念外延最宽，是最高的属概念，是不能按“属＋种差”的公式给其以定义的概念，因此又叫做无定义概念或基本概念。数学原始概念或无定义概念，是最先从客观对象中归纳、抽象、提炼出来的理想存在，是最初用它们来定义其他未知概念的属概念，是最基本的数学概念。所以，“无定义”不等于“无意义”。或者说，原始概念无定义，但却有意义，否则，就不能使用它们来解释在它们之后的所有未知概念了。无定义

的原始概念的意义，一般取以下几种方法予以明确：①描述举例法。就是借用日常概念或其他已知概念，形象地描述其特征，举例说明其存在。初中数学关于原始概念“几何体”的意义，就是使用的此种方法予以明确的。②公理启示法。就是通过关于无定义概念的公理的学习，让学生从公理中细细琢磨体会概念意义的方法。这种方法比较抽象，中学一般不直接采用，但在某些情况下，把它作为描述举例法的引伸和辅助，让学生在前种方法的基础上，加深对无定义概念的认识，也是可取的。例如，关于原始概念“直线”的公理“两点确定一条直线”和关于原始概念“平面”的三个性质公理（高中《立体几何》全一册，甲种本，第3—4页），都有助于体会理解直线或平面的基本含义。③循环解释法。每一自成系统的知识领域，都有自己起码数量的原始无定义概念。讲解某个领域的知识自然要遵守逻辑顺序，先讲什么，后讲什么不可随意颠倒，以免形成互相解释的恶性循环。但对相对独立的两个以上的知识领域来说，先讲或后讲哪个领域的知识，往往没有限制的必要。在这种情况下，运用学生已知的某一知识系统的某些已知概念，来解释另一未知知识系统的原始无定义概念，也能达到明确概念的目的。这种方法是词典注释词义时所使用的方法。例如，在小学里，关于自然数的认识，均渗透了集合论的观点。初中伊始，教材则明确写道：“我们在生产劳动和日常生活中需要计算物体的个数，就使用了自然数1、2、3……。”在这里，实际上是以“物体的个数”解释原始概念自然数，也就是以集合论的已知知识来解释数系知识系统的原始概念，因而可以认为是一种循环解释法。

原始发现思维 见发现思维。

顿悟说 一译领悟说。心理学关于学习的一种学说，由格式塔心理学家苛勒等首先提出，并以其来对抗桑代克的尝试和错误说。顿悟说认为高等动物和人类的学习，根本不是对个别刺激作出个别反应，而是对整个情境作有组织的反应的过程。所谓组织过程，指知觉经验中旧结构(格式塔)的豁然改组或新结构的豁然形成。人脑对整个环境作有组织的反应，提供一种组织或完形作用，这种组织或完形作用就是学习。组织或完形的过程就是顿悟过程。顿悟说强调了有机体与环境的相互作用和有机体的能动作用，是正确的。但它把尝试与顿悟绝对对立起来，认为学习不是依靠尝试，而是由于顿悟，即突然地理解；尝试与错误除了干扰之外，对学习不起作用，这种观点是片面的。

顿悟思维 见灵感思维。

倒摄抑制 “抑制”的一种形式。指后来识记的信息对刚刚熟记的信息的干扰，使前一信息的识记效果受到消极影响。这种抑制最容易发生在前后两种信息非常相似的情况下。若两种信息完全相同，学习即复习，不产生倒摄抑制；两种信息越相似，倒摄作用越大；两种信息完全不同，倒摄作用越小。倒摄抑制的生理实质是后起的神经过程对先前发生的神经过程痕迹发生抑制作用的结果。例如，中学

数学教学中学习过一元二次方程，特别是在学习一元二次函数后不久，便学习一元二次不等式，若一元二次不等式的“解集”反回去干扰一元二次方程的“根”以及二次函数的“值域”等概念，使得原来比较清楚的概念，现在却与后学概念混在一起，区分不清，就是一种倒摄抑制作用所致。

爱好　心理特征之一。是一个人对从事某种活动的倾向性。爱好是一种动力，它对人的能力的发展起着举足轻重的作用。爱好保持时间比爱好更富有现实意义。爱好的轻易转移就是见异思迁，一般不会收到好的效果。一般说来，爱好愈有意义、愈稳定、愈强烈，其效果就愈好。爱好还同积极的人生密切相关，凡有强烈爱好的人，往往是人生观比较积极的人。因此，在中小学教学中，应当注意培养学生有意义的业余爱好，并注意遏制在应学习的功课中区分爱好或不爱好的错误方向，以免造成偏科现象。

脑科学　思维科学的一个基础学科。是以脑为研究对象的各门科学的总称，是一个大科学系统。主要研究大脑结构和功能，大脑与行为，大脑与思维的关系，大脑的演化、大脑的生物组成、神经网络及其规律等。脑科学研究的主要目的，是要揭示这块高度复杂而有序的物质是怎样进行工作的，是怎么思维、怎么产生意识、怎么处理信息的。研究大脑的方法主要有：黑箱方法；电学方法；脑损伤法；神经元方法；化学方法；综合方法等。脑科学研究具有重大的理论意义和实际意义。脑如何产生意识的机制一直没搞清，如果这个问题搞清了，对于坚持唯物论和批判唯心论，将会提供有力的证据。研究大脑如何健康地发育，更好地工作，防止其老化和早衰，对于提高整个人类的智力水平和充分挖掘大脑的潜力，具有极为重大的意义。特别是，脑科学研究及其成果将对人工智能研究和对智能机的研制提供极珍贵的文献资料，并将发挥决定性的作用。

准数学定义　数学教学用词。凡讲“数学定义”，不言而喻，是指可定义数学概念的各种定义。数学无定义概念和数学不定义概念（准数学概念），虽然不能给出严格的数学定义和没有必要在数学教材中再下定义，但对它们分别运用恰当的解释方法，也能明确概念的意义，也能够起到相当于数学定义的作用，所以便把运用这些方法解释数学无定义概念和数学不定义概念所得的概述（包括语词定义）叫做准数学定义。

准数学概念　见数学概念。

疲劳　指人在活动过程中某些器官或整个机体力量的自然衰竭状态。工作速度的减缓和工作质量的下降则是疲劳的客观指标。引起疲劳的原因既有生理的也有环境条件的，而单调、无兴趣的工作导致的疲劳比生理原因引起的疲劳要早得多。

阅读心理　阅读是一种从书面言语中获得意义的心理过程，也是一种基本的智力技能，而这种技能又是取得学业成功的先决条件。阅读活动的结果不是机械地把原文说出来，而是要通过内部言语，用自己的话来理解或改造原文的句子和段落，从而把原文的思想变成读者的思想。为此，首先，

识字要达到一定的自动化程度；其次，内容要适合读者的知识经验，否则，虽然认识一些个别的字，也无法理解。阅读心理研究表明，阅读时眼睛往往是几个字或整句一起看的。眼球也并非一往直前连续不断地移动，而是有间歇地作忽动忽停的跳动。但看清字词是在眼停的瞬间。在朗读过程中，“看”先于“读”的先行程度叫做视读广度或视音距。视音距越大则知觉单元越大，理解越完全，阅读能力越强。理解是掌握阅读技能的最主要的标志，读者的理解越接近于作者所表达的意思，阅读技能就越高。一个人理解阅读材料的能力，部分地依赖于他运用口头语言的能力。

递归论　又称递归函数论、能行性理论。数学逻辑四个主要分支理论之一。包括古典递归函数论及它在超穷对象上的推广。古典递归函数是在自然数上定义的一种函数，对未知值的计算往往是回归到已知值的求出，故以“递归”命名。它主要是用数学方法研究“可构造性”或“能行过程”的学科。各种递归函数本身的构造也是它研究的重要方面。迄今为止，递归论已取得了丰硕成果。它不但在数学基础理论方面有极其重要的应用，而且在其他新兴学科，尤其在电子计算机科学中已愈来愈显示出它的重大作用。

悖论　是指在逻辑思维中出现的一类自相矛盾的状况：如果在某一理论体系中推出了两个互相矛盾的命题，或者证明了一个与两个互相矛盾的命题等价的复合命题，那么，就说这个理论包含着一个悖论。历史上曾经出现过一些著名的悖论，如芝诺悖论，伽利略悖论，说慌悖论和一些数学悖论等。仅以逻辑和数学的符号而得以构造或表达的悖论，叫做逻辑数学悖论，简称数学悖论。著名的数学悖论有布拉里—福蒂悖论、康托尔悖论和罗素悖论。罗素悖论又可通俗地表述为“理发师悖论”。内容是：萨魏尔村有一位理发师，他给自己立了一条规则：他只给村子里那些自己不给自己刮胡子的人刮胡子。那么，这位理发师给不给自己刮胡子？

能力　一种重要的心理特征。通常指完成某种活动的本领。包括完成某种活动所采取的具体方式、程序、效率，以及为顺利完成该种活动所必需的个性方面的心理特征。例如从事数学科学学术活动的人不仅需要从事一般科学研究所具备的那些心理特征（如在选择科研方向或课题方面表现出来的鉴赏超前和猜想本领等），而且尤其需要由数学科学研究所特别要求的提炼数学模型和运筹数学模型的运算推理论证能力。又如从事数学教育研究和实践的人不仅要求具备关于数学科学方面的心理特征，而且尤其需要关于教育科学方面的一些本领，如语言表达能力、板书技能等。由于各种活动所必需的心理特征在各人身上的发展程度和结合方式是不同的，因而能力特征也是人各不同的。能力发展的制约条件，一方面是人的生理素质，另一方面是人所处的环境、教育条件和实践活动。能力和知识、技能联系密切，但不可把能力归结为知识或技能。可以认为，现代意义的能力主要来自知识，是被发掘出来的蕴

藏在知识中的能量的作用；技能技巧则是知识或能力的专门应用或巧妙一时的应用。能力的形成和发展较知识的获得与巩固以及技能技巧的学习和掌握，都要慢得多，困难得多。关于能力的分类，有人依据巴甫洛夫关于第一和第二两种信号系统在人的高级神经活动中哪个占优势的情况，将能力区分为艺术型、思维型和中间型等三种。艺术型是指第一信号系统占相对优势的高级神经活动类型，特点是鲜明的直接印象，形象的知觉和记忆，丰富的想象；思维型是第二信号系统占相对优势的高级神经活动类型，特点是倾向于分析和系统化，倾向于比较、概括和抽象的思维；中间型是指两种信号系统相对平衡的高级神经活动类型，特点是处于艺术型和思维型之间，两者的特点兼而有之。

能量　智力测验术语。用以标示智力或能力可能发展的限度。测验者认为所测量的智力或实际所表现的能力，是一种潜在的综合心理能量，它主要是由先天遗传所决定的能量（即智力或能力可能发展的限度）按某种固定的速度呈现出来。因此，根据对幼儿的学习测验结果，便可以预测他的智力或能力将来发展的限度。

预测思维　目的在于对事物的未来状态进行准确描述的思维活动。预测思维往往是根据现实发展的需要，有意识、有计划地发动和组织的。除去不容置否的科学依据外，它的另一明显特点是可望而不可及。

理想　想象的一种。以现实发展的客观规律为依据，令人向往并且只要经过艰苦奋斗便能实现的想象。理想是最有吸引力的长远奋斗目标，是主观愿望和意志的表现。理想和现实之间存在一段距离。这段距离如果过长，那么理想便成为幻想；这段距离如果很短，那么理想便成为意义不大的“随想”。中小学思想教育的一个重要内容和任务，就是引导学生树立远大而美好的理想和为实现理想而奋斗的决心与毅力。理想不仅是人生仕途概念，而且也是一个科学用语。理想能力在认识活动中，在构造理想模型、设计理想实验的过程中，具有举足轻重的作用。理想化是现代科学追求的目标，也是经常使用的手段，这在数学中尤其典型。

理解　按照某种道理去解释事物和把握事物的心理活动。理解在不同的场合具有不同的方式，其水平随认识的水平而变化。建立在感性认识基础上的理解，往往是肤浅的世俗的，因而是软弱无能的，只有建立在理论认识基础上的理解才是深刻的科学的，因而是强有力的。理解是一个心理过程。对一个概念或一个定理，一个人或一件事的理解，都需要一段时间，一段经历，直到达到所要求的水平。在数学教育过程中，关于对数学科学知识的理解要求虽有统一明确的规定，但学生实际达到的水平，却因人而异，参差不齐。

理智型　按理智、情绪、意志哪一种占优势而划分的一种性格类型。是理智占优势的性格的人的共同称谓。理智型性格的人的特点是：冷静、沉着、有分寸、举止规矩大方，感情不易冲动，三思而后行。理智型性格的人如果受某些主客观条件的左右，那

么其“理智”就有可能成为保守、畏难、优柔、两面派甚至阻力的代名词。

理智感 一种高级情感。是关于对客观事物的认识活动本身的情感体验。它和人的求知欲、认识兴趣和解决问题的需要的满足相联系，主要表现是：对合乎原则性、逻辑性的思维活动及其所导致的正确思想产生肯定性情感，反之则产生否定性情感。在认识过程中，对某一疑难问题未想出解决方法时有紧张感，对已想出的方法未证实其效果时产生犹豫感或怀疑感，证实其有效后产生喜悦和确信感。理智感是在人认识周围现实的智力活动过程中产生的，它对创造性的思维和实践活动具有促进作用。

理论思维 是相对于感性直观思维（如具体形象思维）的一种抽象概括和理想地模拟的思维过程，是基于感性认识之上而建立在理性层次中的认识活动。这种活动用概念、原理、观点和逻辑体系并以概括的形式来反映客观事物的内在联系和普遍的特性，揭示事物的本质和规律。例如，生动的直观不可能把握的光速运动、复杂的原子内部变化规律，以及大量的数学极限等，只要靠理论思维便可轻易解决。理论思维的特点主要有：①在纯粹状态下考察对象，这些对象被称作理想对象。②是由思想到思想的推移，有严密的逻辑规律。③力求抓住普遍必然的规律，从而理解特殊和个别的事物。理论思维对于人的认识活动具有重要意义。正常的人脑都有理论思维的潜在能力。但是，必须通过对于以往理论的学习，特别对于哲学的学习，这种潜在的能力才能转变成为现实可用的理论思维能力。

理论逻辑 见数学逻辑。

理想对象 见理想模型。

理想存在 见有形存在。

理想形象 同具体形象相对。指理想存在的对象反映到人脑中所产生的表象。见理想存在、形象记忆。

理想事物 见理想模型。

理想实验 又称假想实验、思维实验或抽象实验。是在思维活动中设计塑造的理想过程，是人们在思维中操作理想事物去追求某种理想目的的理想过程。可见，理想实验虽也叫“实验”，实际上却是一个思维过程。但是，理想实验也不是脱离实际的主观臆造。它是以实践为基础，以理论为指导的，它也是严格遵守实验的科学法则的。理想实验的作用主要在于，它往往是对某种高深理论的验证或说明，而这种验证或说明是一般具体实验所永远办不到的。例如，伽利略设计的惯性定律的验证，就是一个理想实验。又如，数学中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，也是一个有助于理解多种数学概念的理想实验。

理想模型 又称理想事物、理想对象。人们为了便于研究而构造的一个高度抽象的理想存在、人工实在。例如，数学中的点、线、面，力学中的质点、刚体，流体力学中的理想流体，分子物理学中的理想气体，电学中的点电荷，光学中的绝对黑体等，都是理想模型。纯数学中的所有概念、命题和推理论证，都是理想模型。它们作为理想化的形态，在现实中是不存在的，因此，凡理想模型都是理想存

在。理想模型也不是什么不可捉摸的东西，它是以具体生动的客观存在为依据、为原型、为模特儿的：客观存在的事物包含着多种矛盾，因而具有多方面的特性，但在一定条件下，必有一种主要矛盾或主要特征。理想模型正是突出地反映了客观事物的主要矛盾，主要特征，完全抛开了其他方面的矛盾或特征。理想模型的作用或意义是：第一，可以使问题大为简化而又不会发生大的偏差。因为理想模型同它的原型比较，还只是"相似"而非"全等"的东西，但这种"相似"却是发生在质上的，而不是皮毛表面的东西。第二，可以使许多在具体实践中不能进行的实验、计算、推证等科研手段，移植到相应的理想模型上进行。第三，可以同其他方法配合，使许多不可能再出现的事物及其变化过程，重现于人的面前。理想模型是创造性思维的典型产物。

推论　由某一定义、公理、定理等真命题直接导出，并且其真实性相当直观的真命题。例如，从定理"三角形任何两边的和大于第三边"可以得出一个推论："三角形任何两边的差小于第三边"。从圆的定义"线段OA绕它固定的一个端点O旋转一周，另一个端点A所经过的封闭曲线叫做圆"导出的"圆上各点到定点（圆心O）的距离都等于定长（半径的长r）"也是一个推论。推论也是真命题，它与定理的不同之处，主要在于推论的导出过程比较"直接"、"简单"，所以它的真实性相当直观。

推理　抽象（逻辑）思维、数学思维的基本形式之一。思维在反映客观对象，在对象的某些已知属性的基础上，发现并导出新的属性的过程中所采用的框架或一般模式。可概述为：根据一个或几个已知的判断来确立一个新的判断的思维形式。例如，"$\because a=b$，又$b=c$，$\therefore a=c$"；"正方形既是有一组邻边相等的矩形，又是有一个角是直角的菱形，所以正方形同时具有矩形和菱形的所有性质"；"凡能被2整除的数都是偶数，10能被2整除，所以10是偶数"；"由于直线的位置可以由直线上的任意两点唯一确定，而一次函数$y=kx+b$的图象是一条直线，所以要画$y=kx+b$的图象，只要先确定这条直线上的任意两点，然后过这两点画一条直线就行了"等，就是几个简单的数学推理。可以看出，每一个推理都是几个判断有机结合而成的。反之，没有任何联系的判断也是不能组成一个推理的。推理方法多种多样，有的推理方法所得的结论绝对可靠（例如演绎推理所得的结论），有的则不一定可靠（例如归纳推理所得的结论）。推理所得结论的可靠或不可靠，仍需实践检验来鉴定。

教师心理　研究教师的心理特点以及教师工作中的心理学问题。它是教育心理学的重要内容。教师心理问题主要有：教师的心理特点（包括情感、意志、兴趣、能力、职业心理和年龄等方面的特点）；教师的人际关系（包括师生关系，教师之间、教师同学校领导人之间、教师同学生家长之间的关系等）；教师的威信和其他有关问题等。

教育三论 教学论、学习论和课程论概称“教育三论”。

教育心理 关于教育领域内所有心理问题的概称。见心理、教育心理学。

教育心理学 心理学的一个分支。研究人在教育过程中的心理活动规律的学科。教育心理学的具体任务主要是揭示受教育者形成或完善心理特征和道德品质、掌握知识和技能技巧以及发展智力和增强体力的心理过程，从而为提高教育质量提供科学依据。教育者(如教师、学校职工以及服务人员等）在教育过程中的心理学问题，是教育心理学研究的一个特殊的领域。教育心理学除去研究受教育者心理问题的学习心理学和研究教育者心理问题的教学心理学等两个基本分支学科外，还可根据受教育者在不同年龄的学习心理问题，另行划分，从而有儿童教育心理学、青少年教育心理学以及成人教育心理学等分支学科。由于不同的学科教育存在各自不同的心理问题，所以，还可以按学科标准进行划分，从而有政治思想教育心理学、语文教育心理学、数学教育心理学、物理教育心理学、化学教育心理学、生物教育心理学、历史教育心理学、地理教育心理学、外语教育心理学、艺术教育心理学、体育教育心理学等学科教育心理学科。教育心理学的创始人是美国心理学家 E·L·桑代克（1874～1949）。

教学发现思维 见发现思维。

教学的控制理论 即教学控制论。苏联心理学家Л·Н·兰达于1962年提出，后为心理学家Н·Ф·塔雷金娜等接受并发展。这一理论来源于心理活动的构造观点，斯金纳的程序教学思想与控制论思想对该理论的形成也有一定影响。教学控制论的核心思想，是主张运用控制论的基本原理和方法，分析研究学校中的教学问题，结合实际教学特点，改革传统教学过程，从而建立起全面控制的教学系统，实施控制式教学。兰达等认为，控制任何过程的理论，实质上就是利用客观规律来达到一定目的的方法学理论。教学是一种有计划的活动，其目的在于使学生形成一定的心理过程及特性。学生的心理过程是有规律的，因而是可以控制的，问题在于如何揭示借以控制这一过程的规律。从控制论观点看，传统教学方式因为存在一些问题而未能达到最佳水平。这些问题是：①控制作用的断续性与反馈联系的偶然性；②教学结果评定的主观性；③师生系统中控制与受控制双方的变动性。为要建立全面控制的教学体系，兰达等认为，首先必须使教学程序化，实施程序教学。其次，在教学过程中必须建立起良好的反馈联系，以便及时发现和纠正一切背离正常掌握过程的种种倾向。塔雷金娜提出，实施控制式教学，必须解决下列问题：①解决一般控制理论提出的教学理论问题；②确定控制的目的（教学目的）；③确定学习心理活动的原初状态；④确定基本的掌握程序；⑤明确教学中的反馈联系的含义；⑥正确处理学习过程的调节。

接受学习 一种学习方法，与“发现学习”相对。即学习者把以现成的定论形式呈现给自己的学习材料与其已形成的认知结构相联系，以掌握这种

学习材料的学习方式。接受学习不可与机械学习划等号，它在一定的学习发生条件下，完全可以是有意义的。接受学习（或认知—接受学习）理论的提出者是美国心理学家D·P·奥苏伯尔。见奥苏伯尔学习理论。

控制论 “老三论”之一。是研究各种系统的控制与调节的一般规律的新兴的综合性学科，是现代思维和数学思维极为关注的一个研究方向和领域。1948年，美国数学家N·维纳（1894～1964）的专著《控制论，或关于在动物和机器中控制和通讯的科学》出版，宣告了控制论的诞生。控制论的基本概念是“信息”和“反馈”。维纳认为，客观世界存在一种普遍的联系，即信息联系，任何组织所以能够保持自身的稳定性，是由于它具有取得、使用、保持和传递信息的方法。这个信息变换过程可简化为：信息→输入→存贮→处理→输出→信息。在这个过程中存在着反馈信息。所谓反馈，是指一个系统的输出信息反作用于输入信息，并对信息再输出发生影响，起到控制和调节作用。控制论的主要方法，有信息方法，黑箱系统辨识法和功能模拟法。信息方法认为，系统借助于信息的获取、传递、加工和处理、以实现它的运动。信息方法揭示了机器、生物机体和社会生活等不同运动形态之间的信息联系，揭开了事物运动更深层次的规律。黑箱就是那些既不能打开、又不能从外部直接观察其内部状态的系统。例如人脑。所谓黑箱系统辨识法，就是用相对独立的原则确认黑箱，用观测和主动试验考察黑箱，建立模型阐明黑箱，逐步解开黑箱之“黑”。功能模拟法是仅着眼于所分析的系统的功能描述和模拟它对外界影响的反应方式，而不要求分析系统内部的机制和个别要素，不追求模型的结构与原型相同。可以通过对模型的研究来认识原型本身，预测原型的未知行为和功能。维纳十分强调数学逻辑对于控制论所起的作用。因为任何一种控制系统，在从输出端接收反馈信息后，必须根据输出值与目标值之间的差值进行判断、推理、作出决策，再将相应信息加以输入，才能进行控制或调节。控制论在发展过程中，已出现了工程控制论、生物控制论、社会控制论和人工智能等分支理论。控制论在教学中的应用，正在酝酿诞生一门新的分支理论——教学控制论。

控制联想 联想的一种，与自由联想相对。是在某些条件限制下所进行的联想，例如，限制被联想的两个语词是同义词(如从圆周率到无理数π)、反义词（如从正数到负数），或者是部分和整体的关系（如从三角形的高到三角形，从自然数想到正数），等等。

辅助符号 见数学符号。

逻辑 英文logic一词的音译，导源于希腊文logos，原意主要指思想、思维、言辞、理性、规律等。这是一个多义词，主要指：①指客观事物的规律性；②指思维的规律性；③专指“逻辑学”；④指一种特殊的理论或观点等。

逻辑学 思维学的传统内容。是关于思维形式及其规律的科学。包括形式

逻辑、数学逻辑和辩证逻辑。参见形式逻辑、数学逻辑和辩证逻辑。

逻辑记忆　又称语词—逻辑记忆。以关于感知对象的概念（语词）、判断（命题或语句）、推理论证（长句和文章）等逻辑程序特点为识记内容的记忆。反映客观对象本质属性的概念、判断和推理论证，具有科学的逻辑程序，一环扣一环，严密无间；同时，概念、判断和推理论证又是与语词、命题（语句）、长句和文章相对应的，不可分割的。因此，逻辑记忆把语词（含句、文）作为形象外壳，把逻辑程序作为形象内涵来识记、保持和回忆，既严密、科学，又形象、直观，是记忆发展的高级状态，是文明程度的表征之一。

逻辑主义　数学基础研究中一个学派的观点，代表人物是英国的B·A·W·罗素（1872～1970）和A·N·怀特海（1861～1947）。认为全部数学可以归结为逻辑，因而是逻辑的一个分支；逻辑是不反映任何实在联系的任意结合的符号体系。认为只要承认了逻辑的概念与公理之后，数学中的一切概念都可以定义，数学中的一切公理都可以证明。一般人对逻辑主义都抱有怀疑态度。但是，由集合论导出基数，把整个数学建立在集合论之上，却也是目前一般人所采用的态度，而这显然是由逻辑主义的说法得来的。所以，逻辑主义对数学影响比较大。

逻辑代数　见布尔代数。

逻辑思维　见抽象思维。

符号语言　在科学中所使用的各种符号信息的概称。在形式逻辑中，曾采用符号来表达思维的逻辑形式，如用“S是P”表达肯定判断，用“$M—P$，$S—M$，所以，$S—P$”表示直言三段论等。在数理逻辑中，更广泛地使用各种符号，如$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$等。这说明，逻辑学和其他科学（如数学、物理学、化学等）一样，也存在自己的符号语言。符号语言还只是一种辅助的语言手段，它只有以普遍语言为基础才能存在，也只有借助于普通语言，才能揭示出所引用的符号的涵义。符号语言均有自己特定的涵义，同一个符号用在不同的学科或场合，意义不一定相同。见数学符号。

符号逻辑　见数学逻辑。

符号学习说　又称目的性行为主义、符号——格式塔说。符号——意指说或期待说。美国行为主义心理学家托尔曼提出的一种学习理论。他认为，动物和人的行为都具有目的指向性。学习者在达到目的的过程中，必须认知各种环境条件，这种认知是达到目的的手段或途径。托尔曼用符号这一概念来代表对环境的认知。如果学习者认识了抵达目的的途径，就可以说形成了“认知地图”。所以，学习者是遵循着指向目的的一些符号，即根据一张“认知地图”，学的是符号及其所代表的意义，不是机械的运动反应；学的是行为的途径，不是动作模式。托尔曼的学习理论虽未建成一个严密而完善的体系，但由于他善于发现重要的课题，又工于设计巧妙的实验，因而对心理学尤其对学习心理学产生了一定的影响。

符兹堡学派　思维心理学的一个流

派，因为产生于德国的符兹堡大学而得名。其代表人物是德国心理学家O·屈尔佩（1862～1915）。主张人的思维不靠感觉、表象因素，而是人的内省里就有“思想元素”，思维过程的进行是靠“思想元素”来进行的。他们称“思想元素”为“无表象元素”，即既非感觉又非表象的决定思维过程的准备状态。符兹堡学派曾就有没有“无表象思想”与冯特为首的莱比锡学派展开过论战。后者坚持思维是由感觉和表象所构成的。

第一信号系统　以具体事物及其属性的刺激作为信号，作用于有机体所形成的条件反射系统。具体的信号即第一信号。光线、声音、气味、滋味、温、冷、压、痛、触等都可以作为具体的信号。由第一信号引起的第一信号系统是人和动物所共有的现实的反应系统。人类在第一信号系统的基础上，还具有特殊的条件反射系统，即第二信号系统。故人类第一信号系统与动物的第一信号系统有本质上的区别。第一信号系统对于有机体适应环境、保存和延续种族有重要作用。

第二信号系统　以代表一定具体事物及其属性的言语、语词为信号，作用于人脑所形成的条件反射系统。巴甫洛夫把作为条件刺激物作用于人脑的言语、语词称为第二信号，它是具体事物的信号，所以又称它为“信号的信号”。第二信号系统是在第一信号系统的基础上形成的，是人类所特有的条件反射系统。巴甫洛夫认为，两种信号系统的协同活动是人的抽象思维活动的生理基础。

第五代计算机　又称智能机。由日本政府于本世纪80年代末首先提出并规划研制的最现代化的一代新型电子计算机。前四代电子计算机的划分标准是“器件工艺”，即电子管为第一代，晶体管为第二代，集成电路为第三代，超大规模集成电路为第四代。但对第五代而言，器件工艺不再是唯一的、甚至不再是最本质的划代区分标准。同前四代相比，第五代无论在设计思想、体系结构、应用领域等各方面，均都发生了革命性的变化，要为其下一个准确的定义已不是易事。有的权威人士主张从“信息系统”的角度划代。如此，原始的信息机既缺乏理论，又缺乏经验，属于第一代；以计算机为主体的现行信息处理系统已积累了大量信息处理的经验和技术，但仍没有建立起相应的信息理论，属于第二代；未来的信息系统应该是既有科学的信息理论基础，又有丰富的信息技术经验，属于第三代。就是说，日本所谓的“第五代”计算机应属“第三代”。那么，所谓第五代或第三代计算机的真正设计意图是什么呢？综合资料表明，目前正在着手研制的“第五代计算机”或“智能机”，实质上是一种极力模拟人的思维的机构，故又称思维机。它既能推理、判断，得出结论，又能理解自然语言和识别图象。智能一词源出拉丁语LEGERE，意思是采集、收集、汇集，由此进行选择，形成一个印象。如果能设计一种会收集、汇集、选择、理解、领悟和认识的机器，就是创制了智能机或思维机。智能机或第五代计算机的基本组件和功能是：①可供人和机器之间相互作用的智能

接口，相当于人的感官；②能储存知识信息的知识库，相当于人脑的记忆功能；③能高效并行处理的解题推理机构，相当于人的意识、下意识和某些情感。

第二级条件反射 指在巩固的条件反射的基础上所形成的条件反射。在巩固的第二级条件反射的基础上还可以形成第三级条件反射，其余依此类推。但实验证明，狗最多只能形成第三级条件反射。而人通过两种信号系统的协同活动，则能形成多级的条件反射。

假说 假说是科学发现的早期阶段，是科学思维的一种超前意识。任何科学发现都以科学假设为先导。因为科学发现不是一个瞬间行动，而是一个过程。要求科学家等候把全部所需资料收集齐后再去作出发现，是不切实际的。他们必须更快地提出假说去指导他们下一步的工作，以加速发现过程。恩格斯指出："只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假说。一个新的事实被观察到了，它使得过去用来说明和它同类的事实的方式不中用了。从这一瞬间起，就需要新的说明方式了——它最初仅仅以有限数量的事实和观察为基础。进一步的观察材料会使这些假说纯化，取消一些，修正一些，直到最后纯粹地构成定律。如果要等待构成定律的材料纯粹化起来，那么这就是在此以前要把运用思维的研究停下来，而定律也就永远不会出现。"（《马克思恩格斯选集》第3卷，第561页）他又说：对各种相互联系作系统理解的需要，总是一再迫使我们不得不在最后的终极的真理的周围造起茂密的假说之林。假说应视为科学方法论的基石，科学家正是借助假说充分发挥他们的创造性，走上成功的发现之路。善于提出假说的科学家，比只知道搜集资料的科学家工作会有成效的多。假说是在观察、实验的基础上建立的，通过科学研究的观察、实验，发现了"新的事实"，从而提出对这种事实的假定说明。假说是以事实和科学知识为根据的，它是人类认识接近客观真理的方式和途径，是人类洞察世界的能力和智慧的高度表现。但是，假说只是根据有限数量的事实对事物的存在和规律性所作的假定说明，因此具有推测的性质，有待于实践的检验或科学的论证。假说的提出和验证，都需要运用各种思维方法和推理形式。

领悟说 见顿悟说。

粘液质 见气质学说。

情调 情感的基本性质。用以区分情感类别和度量情感高尚或低级的心理学概念，通常指同感觉、知觉等相联系的一些情绪色调。如有人喜欢大红大绿等刺激性强烈的颜色，有人则喜欢浅淡、憩静的颜色，可以说这是两种情调；又如有人忧国忧民，积极乐观，有人则男男女女、悲悲切切，可以说这是高低有别的两种情调。人有何等情调，是由客观感知对象的刺激强度、性质、刺激次数和主观知识、修养、观点等因素所决定的。文艺作品常利用情调的感染作用来加强艺术效果。关于情调的研究，是艺术心理学的重要内容。

情绪 见情感。

情感 又称感情，简称"情"。人有

喜怒哀乐等心理表现，它是人在认识客观事物过程中对客观事物所作的评价或“体验”。情感与认识密切联系而又有区别。认识所反映的是客观事物的特点，情感则是由客观事物的特点所引起的人的某种反应。情感的表现，是伴随各人的立场、观点和生活经历而转移的。现代心理学把因有机体的生理需要而产生的关于客观事物的反应（评价或体验）叫做情绪，如由于进犯刺激、性刺激、食物刺激等引起的无条件反射：恐惧、愤怒以及性欲和食欲等较低级的情感，都是情绪，它是动物和人所共有的，虽然两者有本质的区别。心理学把人的复杂的社会性情感称为高级情感，并划分为道德感、美感和理智感等三种。情绪和情感的划分是相对的。与人的社会需要（如对劳动、交际、艺术、文化知识的需要）相联系的高级情感，有时可能以鲜明勃发的形式表现为一种情绪；与人的生理需要（如对食物、水、空气、运动的需要）相联系的情绪，有时也可能由赋予它的社会内容而改变它的原始表现形式。情感与情绪相比，情景性和冲动性不象后者那么强烈，也较稳定，与人的意识密切相关，带有社会历史制约性。

情操　以某一或某类事物为中心的一种复杂的、有组织的情感倾向。如求知欲、爱国心等。在心理学史上，有人曾把情操分为求知、审美、道德、宗教四种。通常所说的情操，特别从语言意义上看，是指高级情感和操守（坚定的行为方式）的结合。例如，一个人对事业的热爱使他奋斗终生，而不管个人年龄、地位、经济状况发生什么变化。这种高度的事业心就是一种情操。情操因个人修养程度不同而存在个体差异，它是一种高尚的人品。

情绪型　按理智、情绪、意志哪一种占优势而划分的一种性格类型。这种性格的人，情绪占主导地位，主要表现是，感情变化频繁，举止轻易受情绪勃发，反复无常，自相矛盾，但与人没有深刻或持久的矛盾，办事易发动但不能持久。

情绪记忆　又称情感记忆。以感知过的情绪或情感为识记内容的记忆。人对自己亲身经历过的某些激动感情的场景的记忆常常是深刻而持久的。某些教师及其教学之所以没有给学生留下多少记忆,往往是因为其人、其教学均无激情可言。中学数学教育主张在课堂教学中要生动活泼，要有吸引力，目的无非是使学生多接受一些激情，多增加一些情绪记忆。

情感记忆　见情绪记忆。

超前思维　一种预测思维。它有科学依据而且超脱凡俗人的一般想象，一般不易实现，对现实具有指导作用。超前思维是思维能动性的高度表现。

联觉　由一种感觉引起另一种感觉的心理现象。例如，看到红、橙、黄等色彩，可引起暖的感觉，还可以引起深远感，使小的房间在感觉上变大；看到蓝、紫、绿等色彩，可引起冷的感觉，还可以引起浅近感，使大的房间在感觉上变小。联觉是两种感觉分析器在生活经验中建立特殊联系的结果。联觉现象在绘画、建筑、花布设计、环境布置等方面经常得到应用。联觉现象在教学中加以恰当应用，往

往会增强教学效果。

联想 由一事物想到另一事物的心理过程。包括由当前感知的事物引起对另一事物的回忆，或由想起的一件事物又想到另一件事物，都是联想。客观事物总是相互联系的。把各种相互联系的事物，按照从此一事物到彼一事物的顺序反映在大脑中，便形成各种不同的联想：在空间或时间上相接近的事物之间形成接近联想（如由陈景润想到哥德巴赫猜想）；在相似的事物之间形成类似联想（如在两个相似三角形之间，从一个三角形的边角关系想到另一个三角的边角关系）；在存在对立关系的事物之间形成对比联想（例如关于一元二次方程与一元二次不等式的对比）；在存在因果关系的事物之间形成因果联想（例如从对一个定理的误解想到学生在做习题中出现的错误）。联想在心理活动中占有重要地位。回忆常常通过联想来实现，尽量形成或利用联想，是促进记忆效果的一种有效方法。在举一反三的推理过程中，联想也起着一定的作用。

联想主义心理学 哲学心理学理论的一种，又称联想论、联想派，流行于17～19世纪。这种理论与官能心理学相对立，认为“心”或“心灵”的内容，所有的心理活动，都是经由很多感官得来的观念有条件地联合而成的。这些条件就是各种各样的联想，如相似、对比、接近等。以联想作为解释记忆、思维和学习基本原则的联想主义，始于英国的霍布斯和洛克。“观念的联合”一词就是洛克首先使用的。他在说明简单观念产生的主客观原因之后，指出联合在复杂观念形成中的重要作用。联想主义对欧美现代心理学的影响甚大，桑代克的学习理论实质上就是以“刺激—反应的联合”形式出现的新联想主义。

掌握学习 一种学习方法。即学习者在最佳教学和足够时间条件下掌握学习材料的学习方法。美国心理学家B·S·布卢姆（1913～ ）是提倡这一学习方法的代表，其中心思想是，只要提供最佳的教学并给以足够的时间，那么，多数学习者是能够获得优良的学习成绩的。布卢姆提出有助于掌握学习的良好条件是：①学习者必须清楚地理解教学目标，即学习任务；②学习者必须具备能顺利地进行该项学习任务所必要的知识与技能；③学习者必须具有掌握该项学习任务的意愿，不惜时间与精力；④教师对于学习者要学习的材料提供有关线索，保证他们主动积极地投入学习过程，对其成就给以强化、反馈和校正；⑤适当鼓励学生互教互学。不少人认为，掌握学习注意真正掌握规定的各学科内容，破除分数、等第观念，是可取的。但它对学生独立学习的训练较少助益，尤其是为了促进合作和保护学生的自尊心，可能会使学生的灵活性和创新精神受到损害。

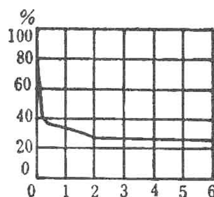
最临近的种概念 见最临近的属概念。

最临近的属概念 设有A、B二概念，A是B的属概念，B是A的种概念。如果在A、B之间不再存在这样一个“中间”概念：它既是A的种，同时又是B的属，那么，属概念A便叫做种概念B的最临近的属概念，简称

最临近属，种概念B则叫做属概念A的最临近的种概念，简称最临近种。一般都有约定，凡提及属概念和种概念，如无特别说明，均系指最临近属和最临近种而言。例如，四边形是平行四边形的最临近属，平行四边形是四边形的最临近种；整式方程是一元二次方程的最临近属，一元二次方程是整式方程的最临近种等。而在多边形和平行四边形之间，以及在方程和一元二次方程之间，均不存在这种"最临近"的属种关系，因为，在它们之间分别存在各自的一个中间概念"四边形"和"整式方程"。

遗忘　对识记过的对象不能再认知或回忆，或者表现为错误的认知或回忆。遗忘可以分为部分遗忘、全部遗忘；暂时遗忘、永久性遗忘。若不经过重新学习则不能再认或回忆，称之为永久性遗忘；一时不能再认或回忆，但在适当条件下可以恢复再认或回忆的遗忘，叫做暂时遗忘。关于遗忘的原因，主要有两种解释：一为"消退说"。认为大脑中的记忆痕迹因得不到强化而逐渐消退，以至最后消失；另一种是"干扰说"。认为大脑中的记忆痕迹由于受到了内外因素的干扰，引起相应的抑制，以致产生遗忘；抑制消除后，记忆就会恢复。防止遗忘的有效手段是对识记信息加深理解和概括，及时回忆、复习和应用。

遗忘曲线　描绘遗忘速度、表明遗忘变量和时间变量之间的关系的图象（见附图）。由德国心理学家H·艾宾浩斯(1850～1909)创制，故又称艾宾浩斯曲线。他根据本人所记住的无意义音节为识记对象进行实验，结果表明：遗忘依赖于时间，遗忘的进程在识记后最初几小时速度比较快，以后逐渐缓慢，最后有一部分很难忘掉。但根据后来心理学家的实验，遗忘速度在很大程度上决定于识记材料的性质的数量，遗忘曲线的形式也因之而异。熟记有意义的对象，遗忘速度在最初较慢，在识记对象数量显著增加时，由于不易形成牢固联系，遗忘速度就先快后慢，接近于无意义识记对象的遗忘曲线。



艾宾浩斯的无意义音节遗忘曲线
0—6：表示天数　0—100%：表示经过不同时间间隔熟记材料再现的百分比

短时记忆　记忆的一种，以形成或保持时间的长短为划分根据。是指识记信息在人脑中留下较短时间的刺激痕迹，其保持时间约为1—3分钟。第一次看到的数学公式或偶尔使用一次的电话号码，对它们的记忆都是短时记忆。

智力　又称智能。主要由蕴藏在知识、智慧中的能量所导致的能力，也就是理解和运用知识的能力。观察能力、记忆能力、想象能力、分析判断能力、运算变换能力、推理论证能力等都是智力。智力的核心是思维能力。智力的作用集中表现在反映客观事物深刻、准确、完全的程度上。一个人的智力是在其先天素质的基础上，通过社会教育和个人努力，在学

习和实践中发展起来的。知识就是力量。但知识和能力（智力）不是同一个层次上的概念。智力的内涵，在心理学界是一个长期争论不休、至今尚无权威界定的概念，归纳起来，大致有以下几种不同的看法：①智力是适应新情境的能力；②智力是指一种学习能力；③智力即抽象思维能力；④智力是从事艰难、复杂、抽象、敏捷和创造性的活动，并能集中精力保持情绪稳定以从事这种活动的能力；⑤智力是一个人能够为着某些目标而行动、能够理智地思考和有效地适应环境这三种能力的综合表现。也有人认为，智力就是智力测验所测量的东西或解决某种智力问题的能力。关于智力的结构，见二因素论。

智能　见智力。

智商　即智力商数，用以标示智力发展水平。常见的智商有两种：①比纳—西蒙测验量表所使用的比率智商。它根据下列公式求得：智力年龄（MA）÷实足年龄（CA）×100＝智力商数（IQ）。如某儿童的智龄和实龄相等，运用上述公式计算，智商等于100，即标示其智力相当于中等儿童的发展水平。智商低于100或高于100，则智力就偏低或偏高，其中智商在80以下的称作“愚蠢”，智商在120以上的称作“聪明”。测验者还认为智商基本上是不变的，教育对促进智力发展水平意义也不大。②威克斯勒测验量表所使用的离差智商。把一个儿童的测验分数与同年龄组正常人的智商平均数之比作为智商。也就是同年龄组的智商平均数都是100，标准差是15。如果被测验者的加权分数比同年龄组的平均数小一个标准差，其智商就是85；反之，多一个标准差，其智商就是115。值得注意的是，由于智龄并非始终随实际年龄增长而增长，所以上述第一种智商计算方法多已废弃不用。

智龄　即智力年龄，比纳首先采用的术语，用以标示智力发展的水平。某一年龄儿童的智龄，是用测验量表对一定数量的同年龄儿童进行测验，根据其平均成绩来确定的。如一个足龄五岁的儿童，在五岁组测验上及格，其智龄便是五岁，即认为其智力水平相当于实龄五岁的普通儿童水平。如在六岁组测验上也能及格而在七岁组或以上组均不及格，则其智龄便是六岁；如在五岁组测验不及格而在四岁组测验上及格，其智龄便是四岁。总之，一个儿童的智龄与其实足年龄不一定相等，智龄不及实龄越多，发展水平就越低；智龄超过实龄越多，则发展水平就越高。测验量表编制者多断定十三四岁或十五六岁为智力成熟的极限。

智能机　见第五代计算机。

智力因素　见智力和非智力因素。

智力技能　又称心智技能。指经过练习巩固起来的接近自动化的智力活动本领。它是借助于内部语言在头脑中进行认识活动的技能。如运算、阅读、写作等都属于智力技能。人们学习不仅是增加知识，还需掌握一定的智力技能。如学习数学不能只理解数形概念、法则、定理，而且要使这些知识转化为运算、论证的技能。领会与某种智力技能有关的知识，是该智力技能形成的必要条件，而智力

技能的形成则是顺利学习、进一步掌握知识的充分条件。可见智力技能既是学习目的，又是完成学习任务的重要手段。智力技能有以下特征：就智力技能对象而言，它是一种观念活动，如法则、规则运用自如，因此具有观念性；就智力技能形式而言，它是借助内部语言在头脑里默默地进行，因此具有内潜性；就智力技能结构而言，它是从完整到压缩、简化，因此是有简缩性。

智力测验　心理学用以测量人的智力水平的一种方法。它是在心理测验的基础上，于1905年由法国心理学家A·比纳（1857～1911）和T·西蒙（1873～1961）用语言、文字或图画、物品等形式，第一次编制出一套智力测验量表，用来测量儿童的智力水平。测验时，要求被试者用文字或动作进行解答，然后依照公式、计算出被试者的智龄和智商（或用其他方法计算成绩），从而确定其智力水平的高低。此法是根据当时法国教育部的要求，用来检查小学生留级的原因的。目前应用较广的智力测验，还有威克斯勒测验量表，这种测验可应用于儿童和成人的智力测验。

智力常态分配　心理学智力测验术语。认为人的智力是一种变量，智力的个体差异很大，而且在个别人身上的分配量是随机的或偶然的，但在一定数量人口中的分布是有规律性的，即符合概率论所说的“常态分配”的。也就是说，人类的智力总是两头小中间大。如以智商划分，则智商在70以下的占1—2％；70—89的占18—19％；19—109的占60％；110—129的占18—19％；130以上的占1—2％。男子中智力高、低的人比女子多，而女子中智力中常（即智商在90—109）的人，其比数又比男子为高。

智力动作按阶段形成理论　苏联心理学家П·Я·加里培林提出的一种学习理论。加里培林与Н·Ф·塔雷金娜等人从心理学家Л·С·维果茨基的人类心理本性的社会、历史主义观点，心理的文化、历史发展论观点与心理活动的内化说出发，从20世纪50年代初开始，对智力活动的本质及其形成问题，进行了一系列研究，于1953年创立了智力动作按阶段形成的理论。这一学说认为，智力动作的本性，来源于外部的物质动作，是外部的物质动作的反映。智力动作的形成是外部物质动作向知觉、表象和概念转化的结果。其转化过程是通过一系列阶段来完成的。在每个阶段都产生新的反映和动作的再现以及它的系统的改造。智力动作必须按照这些彼此相联、逐步提高的阶段来形成。加里培林提出，任何新的智力动作形成，必须经历下列五个基本阶段：①动作的定向阶段。主要任务在于使学习者了解动作的原样，从而建立起调节动作执行的定向映象。②物质或物质化动作阶段。也叫动作以物质或物质化形式形成的阶段。物质动作与物质化动作的区别在于动作的客体。前者为实物，后者为实物的模拟品。③出声的外部言语动作阶段。特点是动作开始离开它的物质或物质化客体，以出声的外部言语来完成各个实在的操作。这是动作由外部形式转化为内部形式的开始。④不出声的外部言语动

作阶段。同前一阶段的区别在于言语减去声音，在于言语机制方面的改造。⑤内部言语动作阶段。这一阶段是随着外部言语过渡到内部言语而到来的，是动作在智力水平上形成的最后阶段。

程序学习 一种自动化的教学和学习方法。为了帮助教师将课堂的集体情境改变为个人的学习情境，而把学习材料分成许多小的步子，并系统地排列成便于学习的程序。它要求学生对每一步所提出的问题作出反应，确认反应正确以后，再进入下一步。如此逐步前进，以至实现教学目的，完成学习任务。美国心理学家普雷西和斯金纳创立于本世纪30—50年代，先是运用于自动化教学机器，以后发展为不用机器而只用程序教材的程序学习。编制学习程序应遵循的原则：①小步子原则；②积极反应原则；③及时反馈原则；④自定步调原则（即为了适应个别差异，学习者确定符合自己能力和水平的进度）；⑤低错误率原则（即根据学习者可能产生的错误，考虑补充程序和反复修改，以使错误减至最低限度）。一般说来，程序学习是掌握许多学科领域里已确定的知识内容的一种有一定成效的方式，但不是学习科学方法、讨论有争议性问题、表达思维的独立性与创造性的适宜而有效的“策略”。它照顾到个别差异，便于自学，但对培养良好的师生、学生之间的社会关系却少助益。程序学习还在不断发展之中，其技术装置已发展到了计算机辅助教学，只是理论和技术上尚处探索阶段。

等价命题 设有两个有关的命题，如果从其中一个命题的正确能够推出另一个命题也正确；反之，如果从其中一个命题的错误能够推出另一个命题也错误，那么，这样的两个命题叫做等价命题。例如，原命题和它的逆否命题，原命题的逆命题和原命题的否命题都是等价命题。而原命题和它的逆命题，原命题的否命题和原命题的逆否命题，原命题和它的否命题，原命题的逆命题和原命题的逆否命题等，都不一定是等价命题。也即：互为逆否关系的两个命题是等价命题，互逆或互否关系的两个命题不一定是等价命题。等价命题的存在为人们提供了一个方便：当对某个命题的研究发生困难时，可以转向对它的等价命题的研究。

集合论 数学逻辑的四个主要分支理论之一。集合是一个无定义的原始概念，直观上可以理解为由任何对象汇集成的一个整体，或具有某种属性的事物的全体。集合论的创始人是G·康托尔（1845～1918），他给集合确定的意义是：“一个集合就是我们的直观或我们的思想上那些确定的，能区分的对象的成一整体的汇集，这些对象称为这集合的元素。”研究集的运算及其性质的数学分支叫做集合论。经典集合论在19世纪末已成为近代数学的基本工具之一，但它本身尚有许多重大问题没有解决。为此，在20世纪初创立了公理化集合论。经过哥德尔、科恩等人的工作，特别是选择公理和连续统假设的协调性和独立性的证明以及力迫法的产生，已使集合论和数学逻辑的其他几个分支有了新的

发展。

奥苏贝尔学习理论　本世纪50年代以来，不少人认为，在教学中普遍应用的讲授法会导致机械学习，而发现法是促进有意义学习的好方法，并形成一股褒（发现法）贬（讲授法）思潮。在这样一种背境下，美国心理学家奥苏贝尔提出了他的有意义学习理论（或接受学习理论）。由于他的理论属于认知心理学派，但他又不象布鲁纳那样强调发现学习，而是强调有意义的接受学习，所以他的理论又称"认知—有意义接受学习理论"。奥苏贝尔认为，学习根据内容可分为机械学习和有意义学习，根据学习方式可分为接受学习和发现学习。奥苏贝尔指出，学习者原有认知结构中的适当知识是否与新的学习材料建立"非人为的联系"和"实质性联系"，乃是区分有意义学习和机械学习的两个标准。接受学习是指学习的全部内容是以定论的形式呈现给学习者。这种学习不涉及学生任何独立的发现，只需要将所学的新材料与旧知识有机地结合起来（内化）即可。发现学习的主要特征是不把学习的主要内容提供给学习者，而让学生独立发现，然后内化。接受学习可以是机械学习，也可以是有意义学习；发现学习可以是有意义学习，也可以是机械学习。总之，在学校条件下，学生的学习应当是有意义的，而不应当是机械的。因此，好的讲授教学是促进有意义学习的唯一有效方法；探究学习，发现学习等不宜在学校里经常使用。

普通逻辑　见形式逻辑。

普遍概念　概念的外延，有的很大很宽，有的则很小很窄。小（窄）之最甚者，情况之一是只包括一个具体对象；大（宽）者一般包括许多具体对象，大（宽）之最甚者，则包括无穷多个具体对象。外延仅仅包括一个具体对象的概念，叫做单独概念。外延包括许多甚至无穷多个具体对象的概念，叫做普遍概念。例如，自然数2、$\triangle ABC$、方程$x^2-x-6=0$、45°的正弦、函数　$y=\frac{12}{x}$、圆周率、无理数e等，它们的外延只包括它自己，因而都是单独概念。相应的，自然数、三角形、一元二次方程、α角的正弦、反比例函数、比值、无理数等，它们的外延都包括无穷多个具体对象，所以都是普遍概念。普遍概念外延内的每一个具体对象，都是一个单独概念，或者说，凡普遍概念都是由具有共同的本质属性的若干单独概念组成的。数学教学过程中的"举例"，从思维的角度看，就是把对普遍概念的一般性讲解，具体为相应的某一单独概念的分析说明，从而降低抽象程度，使问题更直观。另一方面，这种分析说明，绝不可同普遍概念的概括证明等同看待，否则就会出现"以偏概全"的逻辑错误。除特殊情况外，普通概念都可进行逻辑分类（划分），例如，自然数可分为奇数和偶数，三角形可分为直角三角形和斜三角形等。对单独概念不能进行逻辑分类（划分），但从系统的观点出发，对单独概念可以施行"肢解"，从而有整体概念与分部概念之分。见**整体概念**。

道德感 一种高级情感。是关于人的行为是否符合社会道德规范的情绪体验。或者说，是同行为的道德评价相联系的一种情感。如对不道德行为表示义愤并做出具体反应；对各种有益于社会的行为表示赞赏；对工作产生责任感等。随着人的行为的社会价值不同，产生不同的道德评价，而这种评价本身以及对这种评价产生何种性质的情感，在阶级社会里，主要是由阶级观点决定的。不同社会、不同历史时代、不同阶级和不同的个人均有自己的道德标准，因而有不同的道德感。

属性 客观事物所表露或内在的一切，都叫做属性。例如，运动是物质的属性，能用语言表达思维是人的属性，能进行感情交际是动物的属性，能传授数学科学知识是数学教学的属性，可施行加减乘除四则运算是实属的属性，含有未知数是方程的属性，有四条边是四边形的属性，未知数用 x 来表示是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的属性，对角相等是平行四边形的属性，等等。

属属性 根据概念的内涵与外延的反比关系可知，种概念之所以成为种概念，是因为它的内涵大于其属概念的内涵，或者说，它的内涵包括属概念的内涵。这样，我们便可以把一个种概念的内涵分成两部分，一部分是与属概念内涵的相同部分（即属概念的内涵），另一部分是与属概念内涵的相异部分。例如，按此分法，平行四边形内涵的两个部分是：①是四边形（即具备四边形的全部内涵）——与属概念内涵的相同部分，一般以属概念的名称来代表；②两组对边分别平行——与属概念内涵的相异部分。又如，对一元二次方程来说，它与它的属概念整式方程的内涵相同部分是“是整式方程”，相异部分是“含有一个未知数”和“未知数的最高次数是2”。这种概念的内涵中与其属概念内涵的相同部分，或者说，属概念的内涵，叫做种概念的属属性，又称共性，或称属；种概念的内涵中与其属概念内涵的相异部分，叫做种概念的种属性，又称个性，或称种差。例如，梯形的属属性（属或共性）是“是四边形”，种属性（种差或个性）是“一组对边平行”和“另一组对边不平行”；概念空集的属属性是“（是）集合”，种差是“不含任何元素”；数列的属或共性是“（是）一列数”，种差是“按一定次序排列”等。需要强调指出的是，种概念的属属性（属或共性），也即属概念的内涵，多以属概念的名称简记之，或者省略不记，也或以与其等价的某个短句代替之（此时，多因属概念还没有确定的名称）。

属概念 又称上位概念。设有甲、乙二不同的普遍概念，如果甲概念的外延包括乙概念的外延，那么，甲概念便叫做乙概念的属概念（即上位概念），简称属，乙概念则叫做甲概念的种概念（即下位概念），简称种。例如，多边形是四边形的属概念，四边形是多边形的种概念；四边形是平行四边形的属概念，平行四边形是四边形的种概念；平行四边形是菱形的属概念，菱形是平行四边形的种概念，等等。其他如，方程和整式方程，整

式方程和一元二次方程，相似多边形和全等多边形等，前一概念都是后一概念的属，后一概念也都是前一概念的种。概念的属种区分不是绝对的，而是相对的。一个概念B，对概念A来说，可能是种概念，而对概念C来说，又可能是属概念；反之也然。例如前例中的四边形、平行四边形、整式方程等绝大多数属（种）概念，均具此二重性。

属种定义　又称典型属种定义。是概念最普遍的一种定义，由属种定义法所得到的定义。概念的属种定义建立在下述基础上：首先，人们认识客观世界，总是遵循从已知到未知、用已知解释未知，进而将未知变成已知这样一个往复循环、逐步深入的规律；其次是，概念间属种关系的实际存在。因此，如果作为上位概念的属概念和所需要的其他有关概念都是已知的，那么，利用已知的最临近的属概念（代表属属性，即共性）和其他已知的用以表述种差（个性）的有关概念，来解释未知的种概念（下位概念，也即被定义概念）便是可能的了。据此可得属种定义的定义公式：被定义的种概念＝种差＋最临近的属概念，或：种差＋最临近的属概念＝被定义的种概念。例如，“方程就是含有未知数的等式”或“含有未知数的等式叫做方程”，“平行四边形就是两组对边分别平行的四边形”或“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”，“向量就是既有绝对值大小又有方向的量”或“既有绝对值大小又有方向的量叫做向量”等，都是数学属种定义。关于概念的属种定义，教学中应注意：所谓定义概念，就是揭示概念的内涵，内涵包括属属性和种属性（种差）。在属种定义中，内涵的属属性部分，是以最临近的属概念的名称来蕴含的，这种不同于种属性的表述方式，应引导学生予以特别注意。除去原始无定义概念外，一切数学可定义概念，都可以运用属种定义法而获得自己的属种定义；一切数学可定义概念通过其他定义法所获得的各种相应定义，也都可以归结为属种定义。

强化　生理心理学称增强某种刺激与有机体某种反应之间的联系为强化。在“暂时联系”形成过程中，条件刺激必须与无条件刺激在时间上反复结合。这种反复结合，就是对暂时神经联系（即条件反射）的强化。条件反射的建立和巩固是无条件刺激强化的结果。凡经过反复强化而且已形成的牢固的条件反射，其条件刺激也可以作为强化刺激与新的条件刺激结合，形成二级的或更高一级的条件反射。对于人类来说，语言刺激对新的条件反射的形成，也可以起强化的作用。强化概念在数学课堂教学中经常得以应用。

想象　以现有感知表象和记忆表象为基础，在大脑中建造尚不具体存在的形象的心理过程。例如，纯数学概念都是想象出来的。又如“相互平行的两条直线在无限远处相交”，这种理想化的“相交”也只能在想象中存在。人们以记忆中保持的表象为素材，经过加工改造完全能够构思出尚未感知过甚至从不存在的理想事物形象。按照想象内容的新颖性和创造性

的不同，想象可分为创造想象和再造想象。

概念 是抽象（逻辑）思维的基本形式、基本元素或砖瓦材料。如同任何事物和现象都有自己的表现形态、组织结构和发展状态一样，思维作为一种现象，也有自己的状态、结构，并取一定的表现形态去完成刻画所表述的客观对象的本质属性的任务。思维在“反映”客观对象的过程中，一般要完成三项任务：第一是在对象的某些已知属性的基础上发现并导出新的属性；第二是在某个时刻要对对象是否具备某一属性作出明确的结论；第三是为了把对象同其他有关对象严格区别开来，而对该对象从本质上进行界说。对应于以上三项任务，思维形成了自己的三种基本形式：推理、判断和概念。反映并确定客观对象的本质属性的思维形式，叫做概念。例如，概念“含有一个未知数并且未知数的最高次数是2的整式方程”就反映和确定了一类数学对象的本质属性，这类数学对象就是一元二次方程，因此表示这一概念的名称也叫做一元二次方程。又如，概念“两组对边分别平行的四边形”反映和确定了另一类数学对象的本质属性，这类对象以及反映该对象的数学概念，叫做“平行四边形”。一般情况下，凡常用的概念都至少有一个相应的名称，因此，在提及某个概念时，只需指出其名称便可。如自然数、面、集合、方程、开方、微分、把分母有理化、约分、黄金分割、对称、一一对应、全等、相似、零指数幂、圆周率、绝对值、对数、函数、数列、行列式、必然事件、复数、定积分等，就是在中学数学中讲授的一些数学概念，都是对数学中某类客观对象的本质属性的反映和确定。据上可知，平行四边形，矩形，对边，相等，……这是一些数学概念。人们根据对这些概念之间的某种科学联系的认识，用适当的语词表达出来，于是得到：“平行四边形的对边相等”，“矩形的对边相等”，“矩形是平行四边形”，……这则是一些数学判断。再把这些数学判断之间存在的联系加以科学地表述，得：“因为平行四边形的对边相等，而矩形是平行四边形，所以矩形的对边也相等”，这则是一个简单的数学推理了。由此可见，推理是判断与判断的有机结合，判断是概念与概念的有机结合，概念，则是最基本的思维形式，是思维的基本单位或砖瓦材料；只有首先形成概念，思维的判断和推理才是可能的。

感知 有两种意义：知觉的别称；感觉和知觉的统称。

感觉 客观对象的个别属性（如声音、颜色、气味等）在人脑中的反映。由来自客观对象的一定刺激直接作用于人的感觉器官引起（如视觉由光线刺激引起，听觉由声波刺激引起等）。刺激在感官内所引起的神经冲动，由感觉神经传导到大脑的一定部位，便产生感觉。感觉是感官、脑的相应部位和介于其间的神经等三个部分所联成的分析器统一活动的结果。由于分析器的不同，感觉分为视觉、听觉、嗅觉、味觉、肤觉、运动觉、机体觉、平衡觉等数种。无机物没有感觉，而只有一种跟感觉相似的单纯

的物理反应或化学反应。随着生命的出现，产生了生物的反映形式，即刺激感应性。刺激感应性包含着感觉的萌芽。感觉正是在刺激感应性的基础上，经过长期的社会实践而发生发展起来的。人的感觉与动物的感觉有质的不同，动物的感觉只是自然发展的结果，而人的感觉除去自然发展外，还是社会发展的结果。感觉是人认识客观现实的第一步，属于感性认识阶段。一切更高级、复杂的心理过程，都是借助于感觉与知觉配合所提供的素材而产生的。但是，仅凭感觉认识客观对象是片面的，肤浅的，难以从本质上掌握对象。

感知取景　人们主动摄取感知信息的一个重要概念，特别是思维活动中获取表象或形成概念的一个重要环节。感知取景就是要把感知的“镜头”对准感知对象的最佳位置，以便使思维能够输入准确的感知信息——表象或概念。感知取景是因人而异的，所以对于同一个概念往往产生歧义，发生争执，也可能形成不同的观点和理论体系。值得注意的一个极端现象是，低劣的感知取景会导致劳而无获，并进而导致延缓相应的科研进程。抽象思维的感知取景同形象思维的感知取景存在对应关系，前者应从后者得到启发，并应主动移植其许多成功的思想方法。

感知限度　又称最大感知范围。指一个人对信息感知的最大限度。例如，一个人在数米内能听见另一个人讲话，但却不能听见(懂)远在数（千）公里外的讲话声(无线电广播)，这说明后者超出了人耳的感知限度。人的每种感官都有相应的感知限度，平常人的同一感官的感知限度，基本是一个统计常数，差别不大。但是，人与人之间的综合感知限度是大有区别的。因为，所谓综合感知限度不仅包括各种感官的整体功能（不等于各种感官的单独功能的机械和），而且主要决定于人的思维境界、知识视野和能力强弱。例如，一位经验丰富的教师在课堂教学中，即使他不面向学生，仅凭某些微弱的信息，他便能断定某学生在干什么。这种现象表明，教师对学生动态的感知限度远远大于工人。而工人对机器动态的感知限度又远远大于一个教师。人类普遍存在的一个自觉或不自觉的努力方向，就是不断扩大自己的感知限度。“千里眼”望远镜，报刊图书的印刷发行，无线电通讯，宇宙飞行器，……实际上都是人类扩大感知限度的产物。感知限度的不断扩大，大体有两个方向，一是直观范围或时空间隔之“大”，另一个方向是大同中之辨小异。例如，在某人看来无论如何也是“相同”的东西，另一人却能富有说服力地讲出其“明显的区别”。这就说明后者的感知限度大于前者。

感觉记忆　见瞬时记忆。

辐合思维　见收敛思维。

辐射思维　见发散思维。

暗示　在一定的条件下，用含蓄、间接的方法对人的心理状态和行为产生影响的过程。其表现为使人按一定的方式行动或接受一定的意见、信念。暗示可以由人施授，也可以由情境施授。可以采取言语的形式，也可以用手势、表情或其他暗号。暗示的种类有

直接暗示、间接暗示、自我暗示和反暗示。有效的直接暗示能引起预期反应而不致引起可能的反抗，而有效的反暗示则必须引起反抗才能达到预期的效果。人在感觉、知觉、记忆、想象、思维、情感、意志等方面都能受到暗示。

错觉 对客观事物产生的一种错误的感觉。常见的有：①在对比中或在过去经验影响下产生的错觉。如长短相等的两条线，一横一竖，成T字形，看起来竖比横长。②在一定心理状态影响下产生的错觉。如惊慌时的"草木皆兵"，惶惑时的"杯弓蛇影"等。③某些精神病患者产生的错觉。错觉并不一定总是"错"，它常常在建筑、雕刻、戏剧布景、绘画、服装设计和教学中得以应用。在数学教学中，教师故意喧染某种错觉导致的结果，或者让学生在正确答案和错觉导致的答案中作选择等，往往能获得正常（或正面）情况下所不能得到的教学效果。

简单判断 见判断。

简单命题 见命题。

新三论 见三论。

意会 同言传组成一对对立概念，是人们进行思维交流的两条不同的传播通道。所谓言传，就是通过语言信息并按照语言信息的规律来传播思维；所谓意会，则主要是通过尽可能少的语言信息，启发对方产生思维感应和进而出现思维共振，从而使对方领悟前者的意图。意会是人的一种基本的理解能力，而且随着思维水平的提高而提高。许多言传难能奏效的思想交流，通过意会反而能有效地实现。在中小学数学教学中，不少有经验的教师，在某些适当的时刻，也常常使用意会手段并获得极佳的教学效果。

意志 决定达到某种目的而产生的心理状态，是人的意识的能动作用的表现，往往从语言和行动中表现出来。世界观对意志的形成和作用有一定影响。意志在人的社会实践中形成和发展，为客观规律所制约。发挥意志的作用时，绝不能违背客观规律和超越客观条件许可的限度而为所欲为。认识过程是意志产生的前提；反之，意志又能调节认识过程。情感可以成为意志的动力；而意志对情感起控制作用。行动是意志的反映；意志则对行动起调节作用。

意识 人所特有的反映客观现实的大脑功能。这种功能是有目的的自觉反映。对于物质（即客观现实）来说，意识是第二性的，即存在决定意识。无机物没有意识，一般高级动物也没有意识。人的意识是在动物心理发展的自然基础上，通过社会劳动和语言交际作用而逐步形成和发展起来的。生理学认为，人的意识以具有第二信号系统为特征。意识对物质的反应是能动的，它使人能够用从客观现实中引伸出来的理论来指导自己的行动，使行动具有目的性、方向性和预见性，因而意识能对物质发展进程发挥促进或阻碍作用。在哲学中，意识同精神、思维是同义词，都是指人脑对客观现实的反映。在生理学中，一般把意识理解为觉醒、知晓的一种状态。心理学则把意识看作是自觉的心理活动，甚至还把意识与心理作同一

概念使用。实际上，心理包含意识（过程），也包含无意识（过程），其外延显然大于意识的外延。数学知识是一种意识的结果或产物，它是直接反映客观现实（状态及其变换）和间接反映现实的共同产物。

意志型　按理智、情绪、意志哪一种占优势而划分的一种性格类型。这种性格的人，意志因素起主导作用。意志型性格的人的特点是：办事干脆，追求明确的奋斗目标，自信自强自立，自制力突出，决心坚定不移。意志型性格受某些条件制约可能走向消极的一面，其主要表现是固执已见，顽固，孤家寡人。

意识域　指在短时间内对客观事物所能觉察到的范围。一个人在清醒的时候，任何一瞬间所能明显而自觉意识到的事物，都只限于当时注意所集中的部分，其他部分都是比较模糊地被意识到的。或者就是不被注意的。但如果对周围事物依次加以注意，就能够形成一种有意识的、比较完备的图案。意识域的大小是同注意广度相联系，而由当前任务的要求所决定的。培养注意的特性，可以使意识域扩大。

意义识记　建立在理解的前提下的识记。与机械识记相对，主要特征是理解。对所要识记的材料理解得越深刻，即分析其各部分的特点和内在联系，并尽可能同已有的知识经验融会贯通，形成多样化和系统化的联系，就会使识记更全面、迅速、精确而牢固。在实践中，不应使意义识记同机械识记互相对立起来，而应交替使用，形成互补结构：意义识记协助机械识记条理化、机械识记则可协助意义识记加以巩固。

数学化　所谓数学化，首先是从思维上讲的，即用数学的基本观点观察、分析所面临的问题。其次是运用数学语言来描述刻画问题。第三是运用数学方法解决问题。对任何一门学科的研究，对任何一个问题的处理，如果能做到以上三点，就可以说是“数学化”了。

数学公式　是某些数学命题的符号标记（但数学命题不一定都表示为公式的形式）。例如，梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}h(a+b)$ 所标记的命题是：“梯形的面积等于梯形的高与上、下底之和的乘积的一半”，乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 所标记的命题是：“两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方的差”等。一般说来，将若干具体符号按照一定的数学原理用相应的关系符号连接起来，即形成数学公式。例如前两例中的公式就是用相等关系符号连接而成的，而不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,b>0)$ 以及近似等式 $\sqrt[3]{1\pm a}\approx 1\pm\frac{a}{3}$ 等，则是分别用不等关系符号和近似相等关系符号连接起来的数学公式。特别地说，用等号连接的数学公式的组合方式是：将标记同一个概念的两种符号用等号连接即成。中学数学常见的数学公式，绝大多数是这类特殊的公式。凡是用数学符号记述的数学定义（如：$a\neq 0$，

$a^0=1$；$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$，$a\neq 0$，p是正整数等）、数学性质（例如根式的基本性质$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a\geqslant 0$等)、数学法则(例如对数运算法则$\log_a 1=0$，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$等）、数学规律（例如乘法对加法的分配律$a(b+c)=ab+ac$等）和数学定理（例如正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 等），等等，都是数学公式。在公式教学中，要注意公式成立的前提条件或应用范围，不得任意扩大或缩小。

数学存在 是一种比较典型的理想存在。数学思维的每一个对象（一个数、式、图形，一条性质、法则、定律，一种推理、论证等），都不是在人的一般感知限度以内所能感知的具体存在的实事实物，而是为了反映这些具体存在而从具体存在中提炼出来的理想存在。另一方面，数学存在并非反映全部的具体存在，而是仅只反映具体存在的结构、结构状态和结构状态从一种状态到另一种状态的变换过程。还须知道，对应于数学抽象思维的层次性，数学存在的层次性是非常明确的，不了解这一点，可以说还不了解数学。例如，同样都是数学存在，自然数、方程、群等概念，就不是同一层次的数学存在。

数学名称 为了适应思维及其传播交流的需要而赋予给被认识的数学对象的某种语言识记信息。在尚未形成关于数学对象的科学概念之前，这种识记信息还只能是数学对象或其表象的一种名称。而当形成关于数学对象的科学概念之际或其之后，数学名称既是数学对象的名称，同时又是识记关于数学对象的科学概念的数学概词。见数学概词。

数学论证 见论证。

数学观念 现代思维和数学思维的观察角度、基本原则或重要特征之一。所谓数学观念，主要是要求形成以下几种思维出发点和习惯运用相应的数学语言来描述刻画现实问题：①状态观。数学解决的一切问题，都是对客观现实某种状态的模拟。②变换观。客观现实处于运动变化中，数学则以各种各样的数学变换加以反映。③序结构观。许多自然现象和社会现象，必需从“序”这个结构上去分析解决。④坐标观。大自然的一切（包括人类社会）都处于一定的时空之中，大量的现象涉及到时空相对位置问题，需要在相应的坐标系中去解决。⑤关系观。关系是普遍存在的，一切均处于关系中，“数学就是研究关系的”。⑥连续观。离散，间断是特殊的，连续是普遍的。即使是用离散、间断的观点看问题，也不要忘记连续。⑦集合观。物以类聚，人以群分。集合现象是客观存在的一种普遍形态。⑧对应观。这实际上是一种比较典型特殊的“关系”。要突出关系概念中的对应思想。⑨极限观。极限，也是事物存在的一种状态，可以叫“终极”状态。物极必反。说的是走极端不利时，不要走极端。但是，许多变换非“反”不可，那么，“物极”——走极端就是必要的了。⑩统

计观。对符合统计规律的事物，就不能用非统计的观点去看。数学观念的内涵是丰富多采的，是在不断发展变化的，以上十种思想观点，仅仅是初步的概括，是部分的概括。

数学求解　运用数学方法寻求问题答案（或结果）的论证或变换过程。任何一种数学求解，均由下述因素组成：①未知元素。这是数学求解的最终目标。②已知元素。包括求解问题所明确给出的已知条件和除此之外的一切可以做为求解依据的其他已知因素。③求解程序。一方面，这是由一系列数学变换组成的过程，这些变换的最终要求是，用已知元素表出或刻画出未知元素。无疑，数学求解变换是对客观存在的量（包括已知的和未知的）的状态变化（即从一种状态到另一种状态）的模拟。另一方面，数学求解程序，又是一个数学思维的严格而科学的顺序，是数学思维在可能存在的若干种程序中的一种可行路线。数学求解的效率，主要决定于三个因素。第一个因素是关于已知元素的知识要充分、熟练、准确。这是数学求解的知识库、信息源，应当能随时提供求解所需要的任何知识信息。第二个因素是对量与量之间的组合状态及其变换应了如指掌，熟而生巧。第三个因素是要有良好的宏观控制能力和优选思维能力。使自己在求解过程的任何时刻，都能从全局出发而对局部行动做出评价，并在必要时加以及时调整。

数学判断　见判断。

数学规定　数学思维必需遵守的人们共同制定的一些数学“法规”。大体有两大类：一类是，对数学科学发生发展过程中出现的、不依人的意志为转移的某些新生数学对象和其它内容予以确认，从而做出的一些相应的规定。例如，所有的数学公理和数学定义都是这种规定。这些规定是“内容”的规定，具有“必然”性，只能“顺应道理”，不可强行更改。另一类是可以“自由创造”的关于数学内容的识记信息的共同约定。例如，所有的数学符号乃至各个民族的全部数学专用语言，都是这种约定。这些约定都是数学内容的识记信息，可以自由创造，也可以根据需要随时更改。数学规定的作用，主要是为数学思维提供依据和理想的信息，并为数学思维的正常进行和交流提供保证。数学规定的这些作用，在中小学数学教学中比在数学科学的原始发现过程中，更加鲜明，更加迫切，更富有数学意义。例如，为什么要规定“$a\neq 0$，$a^0=1$”，能否作另一种不等价的规定？为什么规定$\sqrt[2n]{a}$中的$a\geqslant 0$？等等，原则上应让学生至少意会其原因。又如，中学数学在“二次根式”一章的开始，便规定：“在本章里，如果没有特别说明，所有字母都表示正数。”这实际上是为了语言表述的方便简要而作的临时规定。但是，学生是否明确这种规定的根据，能否使自己的思维严格限制在所规定的范围内？类似问题解决不当，都可能导致教学失误。

数学命题　见命题。

数学定义　见定义。

数学思维　一种高级形态的抽象思维，是现代思维和科学思维的重要工

具、标志、支柱。根据如下：第一，数学思维的抽象层次之多、抽象程度之高，为一般抽象思维所不及；数学科学为用之大，一个很重要的原因是来自获得它的数学思维的抽象层次和抽象程度。正如电视塔越高，其电磁波的覆盖面积越大一样，数学思维仰仗其抽象层次的逐层升级，总是能够获得一个足以覆盖所要解决的问题的高度。第二，数学思维借助于自己的特殊语言——以符号化、公式化和形式化为特点的数学语言，具有一种为一般抽象思维所相形见绌的模拟构造能力。数学科学"无孔不入"的渗透能力，同这种模拟构造能力是密切联系、直接相关的。第三，一般认为，数学思维是一种典型的抽象思维。实际上，这还是很表面的一种看法。确切一点说，数学思维是典型的"抽象形象思维"。就是说，在数学思维中，不仅存在抽象思维，也存在形象思维，并且，数学思维中的"形象"并非具体形象，而是理想形象、高级形象，即"抽象形象"。数学思维对具体存在的第一层次抽象，是一般意义下的抽象，这同物理学产生"质点"、"刚体"的抽象并无两样。数学思维对第一层次抽象所获得的理想形象实行第二层次抽象及其以后发生的第三层次乃至更多层次的抽象等，便是数学思维的高级抽象形态——抽象形象思维了。而现代思维、科学思维的重要特点之一，正是形象思维和抽象思维并存，两者相互渗透、紧密结合、难解难分和合二而一的高级抽象形态。第四，数学思维的对象是客观事物的存在、存在状态和存在从一种状态向另一种状态的变换过程。而任何一门科学研究的对象，都有自己的存在、存在状态和存在从一种状态向另一种状态的变换过程。因此，任何一门科学都需要数学，数学思维也的确有能力去解决每一门类科学的那些最带根本性的问题。这也就是那些有眼光的哲学家、数学家之所以自信地告诉人们，任何一门科学只有能够成功地运用数学时，才称得上成熟的根本依据。

数学语言 表达数学思维的科学语言。主要特点：一是简练。不仅体现于量上之少，而且见著于质上之精。它从一开始便透过表面而潜入内部，直取要害，明揭规律，总是在本质上反映问题。数学语言不允许存在与反映本质规律无关的文字，不允许去表达情感。二是严密。数学语言的严谨致密结构，是数学思维的严密性、逻辑性的反映。它不允许以偏概全，不允许臆测臆断。序的颠倒就是两种意义，一字之差则表示截然不同的两个概念。三是精确。数学语言的精确特点是数学科学揭示描述方法定量化和思维方法逻辑化的直接反映。它不允许存在外延模糊或内涵不定的概念，不允许制作似是而非的命题，更不允许以"差不多"、"想当然"为依据。它要求有一说一，有二说二，差多少说多少，描述越精确越好。四是理想化。这是数学思维或数学构造性程序模型化的直接反映。由于这一特点的存在，才导致了数学语言的符号化、公式化和形式化。数学思维是一种为日常思维所望尘莫及的高速科学思维，如果不是用理想化的数学符号、

数学公式和数学形式来表达，而是借用日常语言来表述，那么其冗长和费解，几乎可以使数学思维处于中止状态。数学语言分基本形态和高级形态等两大类。基本形态主要由表示数学概念的数学语言基本单位——数学概词、表示数学判断的数学概词组合——数学命题和表示数学推理的数学命题组合——数学论证以及具有其他专门用途的数学语言等组成。数学语言的高级形态，主要包括：数学书面语言的符号化、公式化、形式化和数学口头语言的理想化及其具体表现。开展数学语言研究的意义在于：第一，不仅可以填补科学语言的一项空白，而且能够使数学科学和思维科学在其各自的边缘上获得延展。第二，在高等师范院校数学专业和数学教育界开展数学语言学习及研究，不仅可以体现高师数学专业的师范特点，而且为中学数学教育研究又开辟了一块阵地。第三，开展数学语言研究，不仅能使教师传授数学知识更见成效，而且对于传播、普及数学知识，迅速提高民族文化水平和科学素质，具有现实意义和战略意义。第五，数学语言研究对中学数学教学的明显作用将使中学生至少进一步获得如下好处：一是将使他们顺利通过从初等数学教材到高等数学专著（含教材）的“阅读关”或“语言关”；二是在学习数理逻辑和电子计算机课程前，将使他们具备良好的专业语言基础。

数学素质　即数学科学素质，是指一个人的数学科学的素养水平。主要体现在下述几个方面：第一是在数学思维方面，是否具有明显的数学思维特征。第二是数学观念方面，当面临问题的时候，能否及时、准确地从相应的数学观念出发、入手。第三是运用数学语言表述数学问题的水平。第四是对于一些基本的数学基础知识能否全面和熟悉地掌握。第五是基本数学能力（例如数学运算能力、数学抽象思维能力、数学形象思维能力、数学猜想和提出问题的能力等）是否良好地形成。

数学悖论　见悖论。

数学基础　现代数学理论的重要组成部分。它把数学作为一个整体，专门研究数学的对象、性质和方法等最一般性的问题，核心是数学理论的逻辑问题。历史上许多大数学家，对数学基础方面的课题都很关心，曾分别提出和解决过许多具体问题。数学基础问题的直接诱因，首先是在集合论研究中出现了悖论；其次是数学公理系统的无矛盾性、独立性和完备性问题的提出。从哲学角度看，数学的本质，数学与逻辑的关系，也成为数学基础的重要研究课题。于是从20世纪初开始，相继形成了数学基础研究中的逻辑主义、直觉主义和形式主义等三个学派。数学基础的研究，对数学逻辑的发展起了很大作用，反过来运用数学逻辑的研究成果，也解决了许多数学基础中的重要课题。

数学推理　见推理。

数学逻辑　又称符号逻辑、数理逻辑、理论逻辑、现代形式逻辑等。它是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学。但是，它对推理的研究，只是研究推理中的前提和结论之间的形式关系，而这种形式关系又是由作

为前提和结论的命题的逻辑形式决定的。数学逻辑对推理的研究，是借助于数学中常用的形式化语言的方法进行的。也就是说，是通过反映前提与结论的形式关系的逻辑演算进行的。因此也可以说，数学逻辑是用数学方法研究逻辑问题，特别是研究数学中逻辑问题的科学。命题逻辑和谓词逻辑是数学逻辑的基本组成部分，是数学逻辑其它各分支的共同基础。最严格意义下的数学逻辑，指纯逻辑演算。广义的数学逻辑，也即人们通常所说的数学逻辑，还包括已成为数学分支的集合论、证明论、模型论和递归论。最广义的数学逻辑，把各种非经典逻辑也包括在自己的范围之内。

数学符号 数学科学专用的一种书面语言。数学符号语言的主要特点是：（1）简明性 如果说，概念的名称是概念内涵的集中概括的语言表达形式或语言结晶的话，那么，概念的符号便是概念名称在书面形式上的再度概括和集中，它使概念内涵的书面表达，找到了一种更加理想化的简明形式。例如，分式的基本性用数学符号表述是：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$，(其中$M$是不等于零的整式)。显然比其文字陈述简明得多。(2) 直观性 表现于三个方面：一是“象形直观”，即以生动的图形来表露抽象的数学含义，例如角的符号，圆的符号等；二是“义形直观”，即用一个或尽可能少的几个同其数学含义有关的某种字母来表示一个数学概念的名称，例如表示体积的符号V（英文体积一词Volume 的第一个字母），虚数单位符号i（法文 Imaginaire的第一个字母，意：虚的）等。（3）唯义直观 这类符号是在前两类符号的基础上，冲破其来源之局限，从书面形态、结构，到其所表示的数学含义，都是人为的规定。例如17世纪出现的乘法符号×，16～17世纪流行起来的相等关系符号=和括号{ }，〔 〕，( )等。数学符号的类别，就概念符号而言，可分以下四类：一类是表示数学具体概念的符号，如△，⊙，V，π，e，i，sin30°等，叫做具体符号；二是表示数学过程(运算)概念的符号，如+，−，×，÷，$\sqrt[n]{\ }$，!等，叫做运算符号；三是表示数学关系概念的符号，如=，≒，≡，∽，⟺，>，<等,叫做关系符号；四是不表示任何概念，只在数学符号的组合、使用中，起决定顺序或连接转折的作用，如，∵，∴，∋和括号等，叫做辅助符号。另外，数学符号还可按“结构”分类，从而有单一符号和复合符号之说。前者如，a，△，tg，+等,这些符号不能再进行分解；后者如〔a，b〕，sin30°，tg$a$，$|a|$等，这些符号由单一符号根据数学意义组合而成，所以还可按意义进行分解。中学数学关于符号的教学应注意：第一，既要引导学生认识数学符号的优越性，又不可过多地引用符号，造成喧宾夺主的被动局面。第二，通过数学符号，加强数学思维能力和数学语言表达能力的培养，充分进行“顾形思义”和“顾义思形”的训练。第三，顾形（义）思

义（形）的一个诀窍，是善于发现组成数学符号的各个部件与概念内涵之间的对应关系，明确每个部件所表示的数学含义。第四，纠正符号错误要从概念上找原因。第五，注意数学符号中的“一符多义”和“一义多符”现象，以免造成思维混乱。

数学概词　人类在认识客观世界和自身的社会交际中，为了适应思维和传播思维的需要，对已感知的对象，总是首先赋予其某种识记信息。在尚未形成关于对象的概念时，这种识记信息还只是对象或其表象的一种名称，一般说来，它与它所识记的对象或其表象之间，并不一定存在、也无须追求什么本质的必然的联系。但在形成关于对象的概念之际或其之后，情况就与前不同了：对于已有名称的对象，往往赋予名称以相应确切的内涵，将名称定义为概念；对于刚刚形成概念而尚无名称的对象，则选定或创造一个语词，既作对象的名称，又用以识记新形成的概念。识记概念的语词，叫做概词，也叫做概念所反映的客观对象的名称。显然，概词的逻辑意义就是概念的内涵，也就是它所反映的对象的本质属性。这是概词同还不是概词的一般对象名称的根本区别。由于数学概念是反映并确定相应一类数学对象的本质属性的思维形式，所以，在数学科学语言中，也存在名称，概词及其相互区别的问题：当还没有形成关于某类数学对象的概念时，识记数学对象的语词叫做数学对象的名称；在形成关于某类数学对象的概念之际或其之后，识记数学概念的语词既可叫做数学概词，又同时是相应某类数学对象的名称。在后种情况下；概词和名称可以相互替代使用。在数学发展史上，无理数就是先为数学对象（许多具体的无理数）的名称，形成无理数概念后进而被“追认”为数学概词的。而大量现代和近代数学中的概词，则是在形成相应数学概念的同时而予以选词定称的。

数学概念　反映并确定数学对象的本质属性的最基本的数学思维形式、基本元素或砖瓦材料。中学数学概念可作如下分类区别。第一类是原始概念或无定义概念。例如，数、量、自然数、值、运算、体、面、点、线、平面、曲面、线段、图形、轨迹、集合、变换等、都是散布于中学数学教材相应部分的数学原始概念。它们都是不能按照“种差＋属概念”的逻辑公式给其以定义，而采用“准定义”的方法（如描述举例、公理启示、循环解释等）来明确意义的概念，故称无定义概念。第二类是可定义概念。中学数学的可定义概念，就是那些可以按照“种差＋属概念”的逻辑公式给其以定义的概念。它们是全部中学数学概念的绝大多数，其中比较典型和重要的类别如：数学绝对概念、数学相对概念；数学组合概念；数学具体概念、数学抽象概念（含数学过程概念和数学关系概念）等。这些数学可定义概念，都是通过揭示它所反映的客观对象的本质属性来明确其意义的，因而又都是数学的“真实定义”。第三类是不定义概念。中学数学的不定义概念，又称“准数学概念”，包括三种情况：一是一些其意义在使用中被相对地加以“数学确定”的日常

概念（如同旁、至少、分别、相应、互为、重合、统称、属于、连接、不存在、无意义、无穷、无解、平滑等）；二是一些其他学科的概念（如断面、光速、浓度、摄氏度、V型槽、重力加速度、周期、坡度、比重、拱桥、双曲拱等）；三是一些与“真实定义”概念相对的数学语词概念（如勾、股、弦、辅助线、余弦定理、加法交换律、不等式同解原理、两个数的平方差公式、分式的基本性质等）。

数理逻辑 见数学逻辑。

数学抽象度 指数学抽象物的抽象程度，用以刻划数学抽象物的抽象层次。凡数学中确定的各种基本概念、定义、公理、定理、模型、法则、证明方法等等，都可称为“数学抽象物”。抽象是认识事物本质，掌握事物内在规律的逻辑方法。抽象是在对客观对象的属性和特点的分析、综合、比较的基础上进行的，是在社会生产活动过程中从人类实践需要上产生的。数学抽象又分三类。（1）弱抽象 也可称概念扩张式抽象，即从原型中选取某一特征加以抽象，从而获得比原结构更广的结构，使原结构成为后者的特例。例如，采用概念外延的逻辑包含关系，有

欧氏空间⊂内积空间⊂距离空间⊂拓扑空间

上式中右边空间比左边空间更抽象，记为链

欧氏空间$\prec$内积空间$\prec$距离空间$\prec$拓扑空间

其中$\prec$是构成链的序关系。上式右边空间比左边空间广，但右边空间的拓扑结构比左边空间弱。再如正方形$\prec$矩形$\prec$平行四边形$\prec$四边形，也是弱抽象。因此概念扩张式抽象是一种减弱结构法，故称“弱抽象”。（2）强抽象 也称为“强化结构式抽象”，即通过引入新特征强化原结构来完成抽象，故称“强抽象”。如在函数概念中引进连续性概念（结构），构成连续函数的概念，我们认为连续函数比函数抽象，记为函数$\prec$连续函数。类似地，有如下链

函数$\prec$连续函数$\prec$可微函数$\prec$解析函数

（3）广义抽象 除弱抽象与强抽象外，还可以有各种意义下的抽象。例如若定义概念B时用到概念A，或证明定理B中用到定理A。则称B比A抽象，记为$A\prec B$。因为每一抽象物都是经历一个抽象过程而形成的概念结构，所以处于一条链上的诸抽象物的个数代表着抽象层次数，因此可用链的长度来规定“抽象度”。抽象度是比较而言的，所以常用的是“相对抽象度”。设p与Q是抽象物集合M中任何一对相联（位于同一条链上）元素，若在M中有一条完全的链（即其中再也插不进另外元素的链）：

$$(\lambda):\ p\prec p_1\prec\cdots\prec p_{r-1}\prec Q。$$

则链(λ)的长度r，即定义为Q关于p的相对抽象度，记为$\deg(Q|p)=r$。若联接p与Q的完全链存在S条(λ_1)，$(\lambda_2)\cdots(\lambda_s)$，且长度分别为，$r_1$，$r_2$，…，$r_s$，此时规定$\deg(Q|p)=\max\{r_1,\cdots r_s\}$，取最大值的意思是表明抽象度是通过最精细的抽象层次的划分方式来决定的。这样，数学抽象度便从定性描述进到定量刻划。

数学学习论　见学习论。

数学语言学　科学语言学的一个分科，是数学、思维学和语言学等有关学科的边缘交叉学科。数学语言学也可以看作是普通语言学对数学教育的横向断面学科。主要研究数学语言的特点、基本形态、语言功能和其他基本理论问题。数学语言学正处在它的萌发状态，许多基本问题正值探讨中。见数学语言。

数学概念群　客观世界存在的每一个大大小小的各种系统，均由各种各样的事物、现象复杂而有机地结合成为一个整体。在思维领域，围绕一个整体概念，往往存在由不同类属的许多分部概念所组成的群体。例如，围绕整体概念三角形，存在一个三角形概念群，它所包括的分部概念有：三角形的顶点、三角形的边、三角形的底边、三角形的高、三角形的中线、三角形的内（外）角、三角形的内(外)心、三角形的中心、三角形的面积、三角形的外接（内切）圆等。又如，围绕整体概念一元二次方程所形成的一元二次方程概念群，则由一元二次方程的未知数、二次项、一次项、常数项、各项系数、解、图象以及求根公式等分部概念所组成。中学数学教材中，经常出现以整分关系为连结纽带的数学概念群。还如，多项式概念群，函数概念群，不等式概念群，平行四边形概念群，圆概念群，集合概念群，椭圆概念群等。数学教学中的所谓“概念课”，往往就是以讲解某一整体概念及其概念群中一部分分部概念为内容的课型。见整分关系和相对概念。

数学模式论　这是运用数学语言，通过建立某种学习理论的数学模型而对学习过程进行研究的数学方法。由美国的$W \cdot K \cdot$埃斯蒂斯等人创立于本世纪50年代，其代表人物就是埃斯蒂斯。数学模式论只是关于学习理论的数学模拟或数学表述，并非一种什么新的学习理论。它可以描述任何一种学习理论，任何一位心理学家也都可以使用它。不过，迄今为止，还没有一个在任何情况下都适用的数学模型，即缺乏一个全面的联结系统以控制众多类型学习理论的模式。

数学过程概念　见抽象概念。

数学关系概念　见抽象概念。

数学相对概念　见相对概念和数学相对概念的定义方式。

数学语词定义　见数学语词概念。

数学语词概念　概念同它所反映的客观对象以及表示它的语词是密切相关的：一方面，概念反映客观对象的本质属性；另一方面，它又是语词的逻辑内容。因此，欲揭示一个已有确定名称的概念的意义（内涵），既可以从揭示客观对象的本质属性方面进行，从而有“真实定义”之说，也可以从揭示表示概念的语词的逻辑意义方面进行，从而有“语词定义”之称。中学数学中的可定义概念的定义都是数学真实定义。中学数学除去原始概念和真实定义的概念用词外，还经常出现一些貌似真实定义或原始概念用词的语词或词组，例如勾、股、弦、辅助线、余弦定理、加法交换律、不等式同解原理、两个数的平方差公式、分式的基本性质、以及类似“整式的加减”“多项式除以多项式”、

"一元二次方程根与系数的关系"、"三角形一边的平行线的判定"等教材节、段的标题等，这样一些语词或词组就是数学语词概念，或称数学唯名概念。规定或说明语词概念的语言含义的表述叫做语词定义。例如，"在我国古代，…把直角三角形的两直角边分别叫做勾和股，斜边叫做弦"（初中《几何》第一册，第219页）就是关于数学语词概念"勾、股、弦"的语词定义，因为这个说明，不是揭示勾股弦所反映的客观对象的本质属性，而只是让人们明确勾股弦等三个单词的语言含义。数学语词定义可区分为两种：一种是"说明的"语词定义。它是对语义已经确定的语词的解释，当别人不了解这个语词的意义时，就用这个语词定义来说明它，例如前举勾、股、弦的解释就是一个说明的语词定义。大量数学名词，归根结蒂是从普通语言移植而来的。因此，一般说来，数学名词总是有两种意义，一是赋予它的数学专门含义，另一种是它本来的普通语言含义，而在这两种含义之间，人们总是能够发现某种意义和程度上的相近类似之处，这也正是能够形成语言移植的基本根据。容易体会，在教学中适当解释一下一个数学名词的语言含义，对于理解和记忆数学概念，常常收到良好的效果。例如在讲函数概念时，适当解释一下"函"字的语义，讲无理数时介绍一下为什么取"无理"一词等。所有这样一些解释或介绍，都是说明的语词定义。此外，在很多情况下，数学教学还需要首创或引用某个语词，并赋予它某种新的意义，由此产生的语词定义就是所谓规定的语词定义。例如，在学习了"积、商、幂、方根的对数"一节后，为了记忆、表达和应用的方便，可以把各个法则的内容暂且不管，而把"积、商、幂、方根等四种对数运算法则的总称"规定为"对数运算法则"的含义，那么"对数运算法则"就是一个规定的语词概念，它的含义就是一个规定的语词定义。规定的语词定义的制作和使用，对教师的教学具有特别重要的意义。有时候，对于某一部分知识，某一段教材、某个语词或词组，总觉得在文字上特别冗长，讲解、书写、记忆都不方便，于是便规定一个语词定义简化它、代替它。这种语言上的精缩与简化，既能加速思维进程，又非常方便于教学。

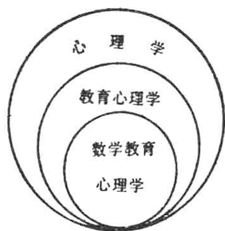
数学结构主义　现代数学思维一个学派的观点，以法国的布尔巴基为代表。布尔巴基认为，结构是联结各部分之间的环节的概念，因此就是对象之间的关系的集合。抽象，通常被理解为"本质"，具有层次性。对现实事物直接反映的抽象，如原子结构、产业结构等是感知的抽象。而把与现实没有直接联系或者包括理想化元素的形式化抽象，或由内在动力产生的更高层次的抽象，以"深奥"这个词来表示，于是有"深奥结构"这个概念。现代数学就是以这种深奥结构为主要研究对象的。布尔巴基学派把数学结构分为三大类：①代数结构：由离散对象施加一定的运算所构造的关系集合。如群、环、域等。②序结构：是一种特殊的代数结构，由序关系所定义的集合。如偏序集、全序集

等。③拓朴结构：由空间观念引出的临域、极限和连续性等观念提出的抽象的数学表述。如拓朴空间、紧致集、连通集等。由这三种母结构以及由它们经过某种组合而成的复合结构、多重结构及混合结构等，覆盖了几乎现代数学所有的分支学科。

数学真实定义　见数学语词概念。

数学学习的特点　同其他学科的学习相比较，数学学习还有自己的如下特点：①数学学习中的“再创造”比其他学科要求高。因为，现在的数学教科书是将数学的原始创造发现过程首尾颠倒的“完美形式”，所以要实行“再创造”比较难。②数学学习可以培养学生的抽象概括能力，而且也更需要学生具有较强的抽象概括能力。③数学学习过程的实质是现代思维和科学思维的学习与训练。

数学教育心理学　教育心理学的一个分支，具体的一门学科教育心理学。研究在数学教育领域内的教学心理和学习心理问题。数学是一门用特殊的



语言来刻划和模拟客观事物与现象的存在状态以及客观事物与现象从一种状态到另一种状态的变换过程的科学，它的方法的抽象性、理想化，它的语言的逻辑性、精确度，它的理论的高度概括和普适性，均在教育过程中带来了一系列的特殊心理问题。如果从普通心理学甚至教育心理学的层次上来对待所遇到的这些特殊心理问题，就不可能良好地完成数学教学任务。现在，数学教育心理研究已经发展成为一个热门课题，正在形成它自己的理论体系，并将是高等师范院校数学教育专业的一门必修课程。

数学过程概念的定义方式　一类特殊的数学抽象概念的定义模式。由于过程的属（种）概念仍然是过程概念，并且任何过程总是同某种目的相联系，通过此种目的来实现，或者说，决定于此目的，区别于此目的。所以，如果作为属概念的数学过程概念和作为种差的某种数学目的的意义都是已知的，那么，便可以利用它们来定义未知的种数学过程概念，由此而得数学过程概念的定义公式：

$$\frac{\text{被定义的}}{\text{数学过程概念}} = \text{数学目的} + \text{最临近的属（过程）概念}$$

例如，数学过程概念“合并同类项”的定义是：“把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并同类项”。其中，作为被定义概念的种差的数学目的是“把多项式中的同类项合并成一项”，而最临近的属过程概念（运算或过程）被省略。又如，乘方的定义是：“求几个相同因数的积的运算”，其中，种差“求几个相同因数的积”是被定义概念的数学目的，最临近的属概念是“运算”，它是一个数学过程概念。

数学关系概念的定义方式　一类特殊的数学抽象概念的定义模式。由于数学关系概念具有极典型的联系性、依存性，所以，中学数学中的绝大多数

关系概念，一般不取直接定义的做法，而是被作为它们所联系和依附的具体概念的某种“外部”属性而存在，其意义则随着定义相应的具体概念而得以明确。例如，数与数之间的“相反”关系，教材中并未予定义，但从相反数的定义“只有符号不同的两个数”中，完全可以明确它的意义：如果两个数“只有符号不同”，则称这两个数之间的关系为“相反”。这种明确概念的方法，是中学数学对关系概念经常使用的方法，有许多优越之处。其他如，在定义了“同类项”概念后，通过“同类项”而明确“同类”的意义，在讲解了“相似三角形”后，通过“相似三角形”而明确“相似”意义等。中学数学直接定义的关系概念也不少，例如点与直线的关系，直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的空间位置关系等。数学关系概念的直接定义方式，基本遵守了属种定义“种差＋最临近的属概念”的一般公式。应注意的是，关系概念的属（种）概念仍然是关系概念。可见，欲定义一个数学关系概念，就得把它放到另一个外延更宽的已知的数学关系概念中去，并揭示它的种差。例如，关系概念“两条直线互相垂直”的定义是：“如果两条直线相交并且所构成的四个角中有一个是直角，就叫做两条直线互相垂直。”其中，已知的被定义概念最临近的属概念是“两条直线相交”，它是一个关系概念，并且它的外延包括“互相垂直”的外延。一般说来，关系概念的名称在文字上比较冗长，且往往含有关系概念所涉及的具体概念的名称。在这种情况下，可以指导学生分解关系概念的名称和分别理解其各部分含义。例如，“两条直线互相垂直”可分解为“两条直线”和“垂直”两部分。并进而启示学生：该概念指的是“两条直线”还是讲的“垂直”？（如果是“垂直”）谁与谁“垂直”？

数学组合概念的定义方式　一类特殊的数学概念的定义模式。由于组合概念是为组合关系所连结的同一普遍概念下的几个个体单独概念的集合体，由于组合概念自身内部存在一种对称性，所以，我们可以将某一组合概念看成是“一个”绝对概念。在这种观点下，组成组合概念的每一个体单独概念就都是组成绝对概念自身的内部元素，组合关系便是存在于组成绝对概念的元素之间的某种联系。于是，通过对绝对概念套用典型属种定义公式，便得数学组合概念的定义公式：

被定义的数学组合概念＝数学组合关系＋最临近的属（组合）概念

例如，在定义“和等于90°的两个角叫做余角”中，余角是被定义的数学组合概念，种差是数学组合关系“和等于90°”，最临近的属（数学组合）概念是“两个角”（无专有名称）。在定义“只有符号不同的两个数叫做相反数”中，被定义的组合概念是“相反数”，种差是组合关系“只有符号不同”，最临近的属（组合）概念是“两个数”（无专有名称）。在定义“一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，这两个角叫做对顶角”中，被定义概念是“对顶角”，种差是组合关系“一个角的两边是另

一个角的两边的反向延长线”，最临近的属概念是“两个角”。出现在中学数学中的组合概念，其定义中的属（组合）概念，一般都不定义，也没有确定的专门名称，例如“两个角”、“两个数”、“两个含有根式的代数式”、“若干同(等)圆中的弧”等。没有专门名称，识记信息不鲜明，识别记忆效率便不高，往往不把它们作为一个整体的概念来看待，教学中应稍予点拨。

数学相对概念的定义方式 一类特殊的数学概念的定义模式。根据数学相对概念的定义可知，数学相对概念的种差（个性）并不存在于它的自身内部，欲明确数学相对概念的意义，必须从它本身出发，在它与它的对称概念之间所存在的相对关系上来揭示。也就是说，如果对称概念和连结被定义的相对概念及其对称概念的数学相对关系都是已知的，那么，唯一未知的数学相对概念的含义（主要是种差），便可从上述已知中得以确认。由此得数学相对概念的定义公式：

$$\begin{matrix}\text{被定义的}\\\text{数学相对概念}\end{matrix}=\text{数学相对关系}\left\{\begin{matrix}\text{被定义概念}\\\text{对称概念}\end{matrix}\right.+\text{（最临近的属概念）}$$

其中，半括号{表示连结的意思；最临近的属概念外面套以括号表示：被定义的数学相对概念的最临近的属概念可以在定义中省略。例如，对数是一个相对概念，它的定义可简述为“如果$a>0$，$a\neq1$，$a^b=N$，那么$b=\log_aN$。”其中，被定义概念“对数”的最临近的属概念是实数，定义未予直接揭示；种差是连结被定义的相对概念b及其对称概念a和N的数学相对关系，$a^b=N$，而a、N以及关系式$a^b=N$的意义都是已知的。又如，数学相对概念“第四比例项”的定义可概述为：“设a、b、c、d是四个不等于零的数，如果，$a:b=c:d$，那么，数d叫做数a、b、c的第四比例项。”其中，被定义概念“第四比例项”的最临近的属概念是“实数”，未直接揭示；种差是连结被定义概念（数d）及其对称概念（数a、b、c）的比例关系，$a:b=c:d$，而数a、b、c和关系式$a:b=c:d$的意义都是已知的。数学相对概念的定义方式，主要特点是突出揭示种差，而对属属性经常采取淡漠的蕴含方式，一般不做直言揭示。

詹姆斯—朗格情绪说 美国心理学家詹姆斯和丹麦生理学家C·G·朗格（1834～1900）于19世纪后期先后提出的一种情绪学说。它认为，情绪是由有机体的生理变化所引起的知觉的总和；没有生理变化，便没有情绪体验。詹姆斯说：“因为我们哭，所以愁，因为动手打，所以生气，因为发抖，所以害怕；并不是我们愁了才哭，生气了才打，怕了才发抖。”因此他认为，情绪只是对于身体状态变化的感觉，纯粹是由生理原因引起的。朗格用饮用酒精和药物为例，说明这些因素所以能够引起人的情绪变化，是因为酒精和药物影响了血管系统活动的结果。所以他认为情绪是一种内脏的反应。詹姆斯和朗格的学说在情绪理论的发展中有重要的地位和作用。但他们却忽视了中枢对情绪的作用，否认了人的态度对情绪的决定

意义。

模仿 自觉或不自觉地仿照一定的榜样做出类似动作和行为的过程。其对象可以是衣着、家具、发型、交际风度等，也可以是各种人物或集体。它是社会学习的一种重要方式或阶段。人在掌握语言和各种技能的过程中，在艺术习作的最初阶段，往往要借助于模仿。自觉地模仿先进的榜样，可以吸取别人的经验以充实自己，可以对各种社会规范取得一定的了解，以形成良好的品德，也可以在模仿的基础上进一步发挥创造性。处于社会化早期的儿童往往有意无意地模仿他人的言行举止。模仿在少年儿童乃至成人的社会学习中具有相当重要的地位，教育者应当注意提高他们辨别是非、选优去劣的能力，防止由于盲目模仿而造成不良后果。在数学教育中，许多数学知识的掌握和技能技巧的形成，往往都经历一个模仿阶段。例如仿照例题解答同类型的其他习题等。因此，数学教育应当重视数学教学中的模仿学习，研究它的规律，充分发挥它的作用。

模型论 数学逻辑的四个主要分支理论之一。研究形式语言与其解释（即模型）之间的相互关系的学科。模型（或结构）的概念，本是独立于甚至先于形式语言的概念。以模型或结构为对象，研究其同态、子模态（或子结构）、自由结构和直积等的学科叫做泛代数学。泛代数学与模型论是不易区分的。但是一般认为，在泛代数学中用来刻划模型或结构的各种性质的语言并不是形式语言，如果采用形式语言并引用数理逻辑中获得的成果和工具，则得到模型论。经典模型论是最基本的也是研究得最充分的模型论。它既是其他模型论分支的前提，又是象非标准分析这样一些应用的前提。模型论是一个年轻的学科，直到本世纪50年代才单独成为数学的一个研究领域。

模拟思维 这是一种间接思维形式。它的主要特点是：撇开思维对象而将思维对象的某种等价对象或相似对象作为思维对象，从而将对原思维对象的思考变为对它的等价对象或相似对象的思考。模拟思维的最后结果完全适用于原思维对象。客观事物之间普遍存在的相似性（含等价性）是模拟思维之所以能够存在的客观依据。但是，模拟思维决非“仿照葫芦画瓢”式的机械模仿，而是富有充分的创造余地。例如，飞机是模拟鸟飞行的，但其机翼却比鸟的翅膀上下拍打更适于飞行。中小学数学教学中的模拟思维应用极其广泛，要特别注意培养学生在模拟中的求异创造。

模糊思维 反映、研究模糊现象的一种思维形式。不管是抽象思维，还是形象思维以及灵感或其他特异思维，都存在模糊现象，都有模糊思维问题。思维对象或内容的模糊性决定了模糊思维研究的客观性。模糊思维不仅与模糊数学有关，而且由于思维与语言的不可分割性，还与模糊语言密切相关。模糊思维对不确定事物中能够加以量化的模糊事物，把“非此即彼”的精确性同“亦此亦彼”的模糊性结合起来，从“二值逻辑”的思路发展到“多值逻辑”的思路，与客观事物的不确定性、随机性紧密相连。

模糊思维的基本特征是它的普遍性、发散性、灵活性、简便性和准确性。模糊思维的“模糊化”，并不是说把本来是清晰明确的事物变得模糊不清了，而是说模糊思维具备一种专门处理模糊现象的模糊功能。这种模糊功能对于模糊现象来说，恰恰是非常精确的，而传统的精确思维的精确方法对于模糊现象来说，倒是极不精确的。

模糊逻辑　又称弗晰逻辑，是模糊数学在逻辑领域的应用。是建立在多值逻辑（可取有穷值，也可取无穷连续值）的基础上，运用弗晰（模糊）集方法，研究模糊性思维与语言，以及有关对象的形式及其规律的科学。关于模糊逻辑的研究对象，一般认为，它不仅与思维、语言有关，而且与整个“模糊世界”有联系，它的研究对象是不确定事物中能够加以定量化处理的模糊性事物。模糊逻辑的特点是：①其真值本身是模糊的，即允许一个命题取〔0，1〕闭区间的任意值；②其真值可由给定的文法生成；③所用的语言真值可由语法规则给出意义；④它是一种局部性的逻辑，其联接词与真值具有可变的意义；⑤其推理规则是似然的，不是确切的。模糊逻辑是质和量的有机统一。它运用弗晰集合论、弗晰逻辑变量、弗晰逻辑函数、似然推理等新方法，从质和量的有机联系出发，“精确”地处理模糊对象，准确地把握事物的“度”，把某类质分解为不同的量，用一定的量来描述一定的质，通过量的处理去把握质，认识质，在逻辑领域新开辟了一条通过数量化、形式化来描述质与属性的途径。模糊逻辑认为，在一定的度，即在一定的阈值内，量的变动不致引起质的改变，即使有误差，也不会带来明显的影响。但是，超过了一定的阈值，就会引起质变。它以一种特殊的方式把演绎方法与归纳方法结合起来，描述了以近似的数学模型模拟人的思维的实际过程，从而更为“精确”地反映了模糊对象的量变质变过程。模糊逻辑和传统逻辑的根本不同点在于，前者更具有普遍性和灵活性。它是根据人的模糊思维特点提出的，有助于了解大脑活动规律，是解决复杂问题的工具之一。

模糊概念　客观事物在中介过渡时呈现出概念划分上的不确定性，由此形成模糊概念。客观存在着大量的模糊性现象。模糊概念不一定就是不科学的概念。美国控制论学者$L \cdot A$扎德于1965年第一次提出了模糊集合论的思想。他指出，刻划一个模糊集合时，不必指出哪些属于哪些不属于，只须对给定范围内的各元素确定一个0到1之间的实数，用它表明这个元素对这个集合的隶属度，用它表现处于中介过渡的事物对差异一方的倾向程度。从这一新思想迅速发展起来了一门新数学——模糊数学。它在当代信息革命中占有特殊的重要地位。现有计算机对模糊事物进行识别和判决的能力相当低下，远不及人脑，因为“过分精确的结果反倒模糊，适当模糊的结果反而精确”（例如识别一个人）。信息革命的中心任务是提高计算机的智能，实现模拟人类的思维方式，这就是模糊信息的处理问题。模糊数学作为智能数学的一种雏形，它

在信息革命中所起的作用，就是试图提供这样一种手段，用一定的数学方法描述自然语言建立机器算法，让自然语言作为算法语言直接进入程序，从而使机器能仿效人脑对复杂系统进行识别和判断。

需要 在有机体与客观环境之间形成的生理或心理上的不平衡状态所导致的、而由有机体所表现出来的索求。它是有机体为延续和发展其生命而对客观条件展现的一种反应，常常以兴趣、意向或愿望的形式表现出来。被人意识到的需要就成为行为的动机，需要是人的思想与活动的基本动力，是在社会实践中得到满足和发展的，具有社会历史性。需要还以一定方式影响人的情绪体验、思维和意志。如满意、愉快、欢乐或不满、苦恼、悲痛学。按照起源来分，需要有天然与社会之别；按照需要对象的内容分，则有物质和精神之别。

精神分析学派 即心理分析学派或弗洛伊德主义，现代心理学和医学心理学中的主要流派之一。由奥地利心理等家 S·F·弗洛伊德（1856～1939）大约于1900年开始创立。它认为人的心理由三部分组成：一为本能冲动，按"快乐原则"活动，称之为"它"；二是认识过程，感受外界影响，满足本能要求，按"现实原则"活动，称"自我"；三为良心，代表社会道德标准，压制本能表现，按"至善原则"活动，称"超我"。"它"和"超我"经常处于不可调和的矛盾中。又认为，人们生而具有生和死两种基本本能。生的本能是性欲、恋爱和建设的动力，死的本能为杀伤、虐待和破坏的动力。本能的活动，特别是性欲的活动，由于良心的抑压，不得不采取种种迂回曲折的途径，以求得变相的、象征性的满足。弗洛伊德的基本思想是从本能生物学出发的，近年欧美有些精神病学者从社会学观点出发，强调家庭、社会制度和文化对精神病致病的影响，他们自称为新弗洛伊德主义。

熟练 见技巧。

熟练干扰 也叫技巧干扰或技能干扰。指已掌握的技巧和技能，在学习和掌握其他类似的新技巧技能过程中起阻碍作用的现象。例如在一些数学公式的记忆中，由于其外型或结构上的相似而发生干扰的现象。其原因主要在于对两种类似活动的不同之处，未能加以精确的认识和区分。

熟练迁移 也叫技巧迁移或技能迁移。指已掌握的技巧和技能，在以后学习和掌握其他类似的新技巧技能过程中产生影响的现象。这种影响如果是积极的，即起促进作用，叫做正迁移；如果是消极的，即起阻碍作用。叫做负迁移。显然，熟练干扰就是负迁移。对新旧两种技巧或技能的活动特点作精确的分析，严格予以区别，是导致正迁移、避免负迁移的有效措施。

毅力 意志品质之一。是使精力长期奋发，不屈不挠地克服困难使活动持续下去，从而达到既定目的的能力。又称意志的坚韧性、坚持性。毅力与意志的自觉性、果断性以及勇敢等品质紧密联系。毅力顽强的人，由于有符合客观实际的目的，深信自己的目的和为实现目的而采取的行动是符合

客观发展要求的，因而能正视各种困难，百折不回地为实现既定目的而努力，坚决果断地采取行动。毅力跟执拗、顽固、我行我素等，是根本不同的品质。后者是消极的品质，往往与其坚持错误的目的、坚持实现目的的错误手段和方式相联系，实际上是意志脆弱的翻版。

遵从动机　一种以符合他人要求或团体规定为目标的动机。具有这种动机因素的儿童的学习和其他行为，在一定程度上是为了听从父母和教师的吩咐或遵守班组等的规定。具有强烈遵从动机的人喜欢结识他们所钦慕的集体或个人，乐于接受、遵从他们的建议和意见，并学习其行为模式。对于他们所乐于遵从的集体或个人的劝告、支持、批评、安慰和引导等，都感到鼓舞和愉快。遵从动机有个别差异。不同文化教养、思想意识、心理因素，甚至性别与健康水平等，都对人的遵从动机发生影响。家庭和学校教育的内容方法，也都会影响子女和学生的遵从动机。

潜科学　又称前科学，相对于显科学而得名。是孕育中的科学，是任何一门科学在其发生发展的历史上所必需经过的胚胎发育时期或萌发时期。潜科学比较鲜明的特征是：①不确定性。即充满着下意识的灵感、直觉的猜想、模拟的语言、粗糙的模型和分歧的说法等。②反常性。潜科学思想常常向传统观念提出挑战，因而具有批判性、革命性的不同一般的认识。③创造性。一门新的科学出现即意味着一种创造性思维及其成果的发生。④艰巨性。从潜科学到显科学，这是一个极其艰苦而巨大的奋斗过程。对数学教育来说，数学思维学、数学语言学均处在它们各自的潜科学阶段。

潜意识　见无意识。

操作条件作用说　美国心理学家B·F·斯金纳提出的一种学习理论。他是一个新行为主义者，他宣称自己的学习理论是一种纯描述性的行为主义，在性质上是非理论的。斯金纳认为，一切行为都是由反射构成的，并从操作主义的立场出发，把反射定义为刺激与反应间的一种可以观察到的相互关系。他说，心理实验者的任务就是给予已知的刺激，观察学习者的反应，从而探究学习规律。斯金纳提出有机体的行为可分为应答性行为和操作性行为。应答性行为是由已知的刺激所引起的反应，操作性行为则没有已知刺激，而是由有机体本身发出的，好象是自发的反应。他又认为，条件反射也有两种类型：刺激性条件反射与反应型条件反射。前者适用于应答性行为，后者适用于操作性行为。巴甫洛夫的经典性条件反射，唾液分泌条件反射，属于刺激型条件反射；斯金纳的操作性条件反射（肌肉运动条件反射）属于反应型条件反射。反射学习是一个S—R过程，而操作学习都是一个R—S过程。斯金纳承认有两种学习，但他把重点放在结果控制下的操作学习上。他把大多数人的行为，甚至于几乎所有人类的条件作用或学习都看作是操作，认为：操作行为更能代表实际生活中人的学习情境；由于行动多半是各种各样的操作，所以行为科学最有效的研究途径就是去研究操作行为的条件

作用和消退作用。在他看来，“教育就是塑造行为，塑造在不久的将来会对个人和别人有利的行为。”成功的教学和训练的关键就是分析强化的效果以及设计精密的操作过程的技术，即建立特定的强化。斯金纳不承认人类学习具有任何特别的属性，把人的学习同动物的学习等同看待，简单地归纳为机械的操作条件反射，否认人的学习的意识特点。但是，斯金纳设计的学习程序，以及由他提倡而发展起来的机器教学等技术，对了解人的学习，提高人的学习效率，都具有一定的启示和参考意义。

整分关系　即整体与部分之间的关系。概念间的同一关系、主从关系、交叉关系、并列关系、对立关系和矛盾关系，主要是从外延大小的比较中加以区别的所谓逻辑关系。整体和部分之间的关系不是从外延上进行对比的，因而不是逻辑关系，而是一种系统关系。例如，代数式和代数式的值之间的关系，单项式和单项式的次数之间的关系，圆和圆心之间的关系，角和角的平分线之间的关系，多边形和多边形的内角之间的关系，三角形和三角形的内角和之间的关系，幂和幂底数之间的关系，三角形和三角形的外接圆之间的关系，对数和对数的底数之间的关系等。在上述各对概念之间，若把前一概念看成是对称概念，把后一概念看成是前一概念的相对概念，那么，介于两者之间并把两概念连结在一起的关系就是相对关系。从系统的观点出发，若把前一概念（对称概念）看成是一个概念系统的总称，那么，后一概念（相对概念）便是这个概念系统的一个有机组成部分，于是有整体概念和分部概念之称。这样两个概念，即整体概念（对称概念）和分部概念（相对概念）之间的关系（相对关系）就是整体和部分之间的关系，简称整分关系。可见，相对关系及其特例——组合关系，都是一种整分关系。整体概念和它的分部概念之间，是一种横向联系，不存在纵向上的主从关系，但整体概念本身和分部概念本身，都有各自纵向上的主从关系。例如，整体概念单项式的属概念是“整式”，种概念之一是“二次单项式”；分部概念“单项式的次数”的属概念是“代数和”，种概念之一是“正整数”。再如，整体概念“三角形”的属概念是平面图形，种概念之一是直角三角形。一个概念系统与其子系统之间的纵向联系，经常具体发生在整体概念的主从关系和分部概念的主从关系上，而在系统内部连结两个纵向逻辑主从关系的横向纽带，则是整分关系（或相对关系）。所谓系统关系，狭义地看，是指系统内部横向的整分关系；广义地看，也应当包括系统与其子系统之间的纵向逻辑关系。因此，一个分部概念（整体概念也一样）总是要涉及三个因素：①它的属（种）概念；②它所在系统的整体概念；③连结以上两个因素的整分关系。

整体概念　见整分关系。

整理思维　见发现思维。

赞誉动机　一种以获得他人或团体的赞誉为目标的动机。具有这种动机因素的儿童的学习或其他行为，在一定程度上是为了受到父母、教师、同辈

人，以及班、组等集体的夸奖。赞誉动机在幼儿期表现得最为突出。到了少年期和青年期，赞誉动机开始从父母、长者和教师那里转向青少年同辈人。来自同辈人的赞誉是影响动机的强有力的因素。一般认为，赞誉与认可的需要，是人的最基本的心理需要之一，它也是学生的成就动机的基础。

辩证思维　又称辩证逻辑，哲学逻辑。抽象思维（逻辑思维）的高级阶段，它是客观事物的辩证关系或运动在思维中的反映。形式逻辑是抽象思维的初级阶段，是初等逻辑，辩证逻辑是高等逻辑，两者既有区别，又有联系，是相辅相成的。形式逻辑的概念具有确定性和抽象性，辩证逻辑的概念具有灵活性和具体性。它不象形式逻辑那样，仅从既成的思维形式结构的稳定关系方面来研究思维形式，而是更深入一步，结合思维的具体内容来研究思维形式的内在矛盾及其相互转化。形式逻辑反对思维的自相矛盾，辩证逻辑则强调思维反映事物的内在矛盾。实际上，这是由事物发展运动中的相对稳定和辩证关系所决定的两种思维理论。辩证思维的根本规律是对立统一律。它所揭示的便是客观物质世界各种事物的辩证矛盾，研究各种思维形式的辩证本性，揭示它们的内部矛盾，展现它们之间的运动和转化。辩证思维把矛盾的原则、发展的原则用于研究思维形式，从而揭示各种思维形式的辩证本性，一反凝固和呆板状态而充满了活力，具有达到对立面统一的灵活性，从而能够反映千变万化的客观物质世界。恩格斯把辩证逻辑（思维）同形式逻辑（思维）的关系比喻为高等数学与初等数学的关系。按照不少数学教育学者的看法，中学数学教育中的辩证思维培养，应从变量数学开始，主要在高中三年级进行。

激情　情感的一种状态，由强烈的刺激或突如其来的变化引发产生。具有迅猛、激烈、难以抑制等特点，常常导致越轨行为。人在激情支配下，一方面是调动其身心巨大潜力的良机，另一方面，也可能使其失去理智，不能正确评价或控制自己的言行。

瞬时记忆　一种短暂的记忆，又称“感觉记忆”或“感觉登记”。是指感知停止后瞬时即逝的记忆。特点是：每次记住的关于感知对象的信息量很少，保持时间极短，容易受干扰等。瞬时记忆中的形象若受到注意，就会转入短时记忆。短时记忆在教学与学习中经常得到应用。事实上，许多知识或信息，只要保持某段并不很长的时间，就能满足需要。

第四部分
数学的教与学

一般发展 赞科夫教学论中的重要概念。赞科夫自己的解释如下：

早在1964年，他就在《小学新体系的实验》中说："一般发展不同于特殊发展，它指的是学生个性的所有方面（包括道德感、观察力、思维、记忆、言语、意志）的进步。一般发展包括整个个性。"

1970年，他总结了实验结果，写成并发表了《和教师谈话》，在其中他又进一步解释说："所谓一般发展，就是不仅发展学生的智力，而且发展情感、意志品质、性格、集体主义思想。"

1975年，他在《教学与发展》中，总结到自己的教学实验改革的不足之处的时候说，一般发展"应该包括身体发展和心理发展"，对此，他深感内疚，表示"这一任务有待于将来去完成"。

综上所述，可以清楚地看出，赞科夫说的"一般发展"是指儿童个性的发展，它的所有各方面的发展。是指儿童心理一般发展，即不仅发展学生的智力，而且发展情感、意志品质、性格和集体主义思想。

"一般发展"与"全面发展"的区别："全面发展"，首先而且主要指的是该问题的社会方面或者更广泛的社会教育学方面，而"一般发展"是指问题的心理学方面。

"一般发展"与"特殊发展"的关系在于：一般发展是指这样一些个性属性的形成和质变，这些个性属性是学生顺利地掌握任何一门学科教材的基础，而在从学校毕业以后，又是在人类活动的任何一种领域里从事创造性劳动的基础。特殊发展则是指在某一门学科或者某一组学科方面的特殊发展。这两种发展是有区别的，但也有联系，一般发展是特殊发展的基础，而特殊发展在适当的指导下又可以促进一般发展。赞科夫教学实验体系所要追求的是使教学促进儿童的一般发展。

Z检验 用正态分布的理论来推论差异发生的概率，从而比较两个平均数的差异是否显著的检验方法。Z检验主要用来解决总体平均数的问题，它适用于大样本。因为Z检验是根据标准正态分布曲线下面积来推算差异由机会发生的概率，所以要使用标准正态分布表。Z检验可分为单总体Z检验和双总体Z检验。单总体的Z检验是检验一个样本平均数$\overline{x}$与一个已知的总体平均数μ_0的差异是否显著。双总体的Z检验是检验两个样本平均数，它们各自所代表的总体的差异是否显著。单总体Z检验计算统计量Z的公式为

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 或 } Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}。$$

式中，Z是检验的样本平均数与已知总体平均数的标准离差分数，$\bar{x}$是检验的样本平均数，μ_0是已知的总体平均数，σ是已知的总体标准差，s是检验的样本标准差，n是样本的容量；$\sigma/\sqrt{n}$为样本平均数的标准误。如，某初中二年级学生的数学成绩平均分数为74.2分，标准差为8.1分，现从中随机抽出50人为一实验班，进行新教法实验。实验结束测验成绩平均分数为77分，问新教法是否起到了明显的作用？在本例中，以原教法的平均成绩74.2分为μ_0，按新教法实验的样本($\bar{x}$为77分)为来自平均数为μ_0的总体。现实验所得样本平均数$\bar{x}$与总体平均数μ_0有差异，这个差异是否真有本质不同，则需用单总体z检验。检验步骤是：①建立虚无假设与备择假设。H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$。②计算z值。将已知的$\mu_0=74.2$，$\sigma=8.1$，$\bar{x}=77$，$n=50$代入公式

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{77-74.2}{8.1/\sqrt{50}}$$

$$=2.43。$$

③决定显著性水平α为0.05，查正态分布的双侧分位数表，$Z_{0.05}=1.96$。④作出判断。本题求得Z值$2.43>1.96$，可得出差异显著的结论，否定原假设。即新教法比原教法的效果有显著差异，新教法优于原教法。双总体Z检验计算Z值的公式为

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}。$$

式中，$\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$和σ_1、σ_2分别为两个样本的平均数和总体标准差，n_1、n_2分别为两个样本容量。

二次评价　又称后续评价。在第一次评价的基础上开展的再评价。二次评价可以是对前一次评价的批评性评价，也可以是一次重新评价，即利用新的观点和不同的评价分析方法，来检验第一次评价的准确性，研究其结论的合理性。对于某些重要的项目，进行二次评价将使结论更为客观。

儿童中心论　关于教师和学生在教育过程中的地位与作用问题，一直是教育史上有重大争论的问题。总的说来，有两派截然不同的观点和学说，一派是“教师中心论”，另一派是“学生中心论”，亦称“儿童中心论”。

以儿童为中心的理论可以卢梭和杜威为代表。这一派理论首先把儿童的发展视为一种自然的过程，教师不能主宰这种自然发展的过程而只能作为“自然仆人”。同时，他们还认为儿童的发展是一种主动的过程，教师的作用只在于引导儿童的兴趣，满足他们的需要，不要对儿童多加干涉。他们还认为儿童只能在个体经验中获得发展，取得他们所需要的知识。因此，教育就不应当由教师直接来进行，而只在于使学生亲身去获得某种生活的训练。杜威要求教师放弃向导和指挥官的任务，而只充任一名看守者和助理者。他提出教师不要站在学

生面前的讲台上，教师应该站到学生背后去。

持“学生中心论”的人，一般说来都是把学生看作是能够完全决定整个教育过程和整个教育结果的主体。从哲学理论上看，他们较多强调学生内因的作用，否定或贬低学习过程中外因的作用。从心理学理论上看，这一派观点大多渊源于人本主义心理学流派，他们认为学生具有一种内在的能力，不凭借外力帮助，就能达到和谐的社会行为。他们十分强调学生的态度、期望、情感和需要等等的动机系统、内部机制，认为以上这些力量组成了与外部力量相互作用的内部力量。正是由于这些内部力量的变化引起了行为的变化。为此，这一派极力要在教育过程中寻找排除外部控制的条件，谋求一种最大限度允许学生作出个人选择的教育环境。

t检验 用t分布的理论来推论差异发生的概率，从而比较两个平均数的差异是否显著的检验方法。t检验是适用于小样本（$N<30$）的差异显著性的检验。t检验分为单总体t检验和双总体t检验。单总体t检验是检验一个样本平均数与一个已知总体平均数的差异是否显著。双总体t检验是检验两个样本平均数与其各自所代表的总体的差异是否显著。单总体t检验计算t值的公式为

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 或 } t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}。$$

其中

$$S'=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}}。$$

式中，t是检验的样本平均数与已知总体平均数的标准离差分数，$\overline{x}$是检验的样本的平均数，μ_0是已知的总体平均数，σ是已知总体的标准差，n是样本容量。如，某校初中二年级上学期期终数学考试成绩平均分为85分，本学期从中随机抽取6个学生进行测验，其数学成绩分别为87.8，83，88.8，78.5，90.2，84。试问本学期的数学学习成绩与上学期是否有显著差异？检验步骤为：①建立虚无假设与备择假设。H_0：$\mu_0=85$；H_1：$\mu\neq85$。②计算t值。因为$\overline{x}=85.4$，$s=4.37$，代入公式$t=0.225$。③确定$\alpha=0.05$，$df=6-1=5$。查t值表，得$t_{(5,\ 0.05)}=2.571$。④作出判断。$0.225<2.571$。接受虚无假设，即认为本学期数学学习成绩与上学期总平均成绩无显著差异。双总体t检验的公式又可分为独立样本与相关样本两种。独立样本的t检验计算t值的公式为

$$t=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_1^2+\sum x_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad (n_1\neq n_2)$$

或

$$t=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sum x_1^2+\sum x_2^2}{n(n-1)}}} \quad (n_1=n_2)。$$

式中，n_1、n_2和$\overline{x}_1$、$\overline{x}_2$分别为两个独立样本的容量和平均数，$\Sigma x_1{}^2$、$\Sigma x_2{}^2$为两个样本的离差平方和。相关样本的t检验公式为

$$t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{SE_1{}^2+SE_2{}^2-2r_{12}SE_1SE_2}}$$

或

$$t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\Sigma D^2-\dfrac{1}{n}(\Sigma D)^2}{n(n-1)}}}。$$

式中，$\overline{x}_1$、$\overline{x}_2$和SE_1、SE_2分别为两相关样本的平均数和标准误，r_{12}为相关系数，D为两相对应样本的数值之差，n为两样本所包含的对数。

三种学习评价　美国教育心理学家布鲁姆（Bloom）认为，学习评价可分为三种，即诊断性评价、终结性评价和形成性评价。诊断性评价，不论是用在某种学习之前，还是之后，其目的都是为了寻求排除学习障碍的方案，而不是为了评定。终结性评价，是对一系列的教育活动总结或学科结束时进行的评价，是用来了解学生达到的程度，确定学生的成绩等级。形成性评价，是在教学过程中实施，主要是用于了解每个学生对各章节的教学目标达到了何种程度，以及未达到目标的原因，及时进行反馈，从而调整教学工作。

上课评价标准　上课是教学工作的中心环节，是教师思想、业务水平和教学能力的集中反映。如何评价上课质量，对提高[illegible]至关重要。评价一堂课的标准主要是：

（1）教学目的明确　首先制订教学目的要准确、明确、适当。其次，整节课的教学活动紧紧围绕教学目的，不旁逸斜出，无“离题万里”的现象。

（2）内容正确　教师所传授的知识技能要符合教学大纲和教材要求。观点正确，材料有据准确；讲授内容有内在逻辑性，既系统全面，又重点突出；能恰当的联系学生、生产和生活实际；注意教学内容的更新。

（3）教法得当　能从实际出发选取教学方法，运用恰当，符合要求，有创造性。运用教学方法得当的集中反映，是学生学习积极性高。

（4）组织得好　课前对整节课有周密设计，讲授、练习、演示、提问及板书等连接紧凑，过渡自然，环环相扣。特别是教师和学生的活动搭配适当。组织得好的标志是课堂教学效率高，充分利用课堂时间。

（5）教学效果好　这是一堂课最根本的评价标准。一堂课的质量不能仅以教学过程进行的情况来衡量，更重要更根本的是要看进行完时学生的受益情况，即在知识、能力、思想品德方面有哪些变化和长进。

口试　学生根据教师所提出的问题，

当面进行口头回答，由此检查学生的学习成绩的一种考试方法。口试不受文字的限制，能比较准确而深入地检查学生掌握知识的广度、深度以及运用知识的能力水平。如果教师通过听取学生的回答还不能准确地了解学生掌握知识的程度和运用知识的能力，教师在口试中，还可以提出补充问题，做进一步地了解。口试有助于培养学生思维的敏捷性及口头表达能力。口试前，教师应根据教学大纲的要求编制大量的试题，根据试题的性质，难易程度适当搭配，做成很多考签。考试时，学生根据抽签中的考题，进行短时间的准备（一般是10—15分钟），然后进行回答。教师根据回答，对学生的学习成绩做简要的小结。

个别考试 一次只测试一个考生的考试。应用这种考试，主考教师能够仔细观察考生的反应，了解其情绪状态，从中可发现其学习能力及有关知识、技能的掌握情况。高校招生考试中的艺术、体育专业的加试均属于个别考试。但这种考试费时，效率较低。

个别教学制 教师分别对个别学生进行教学的制度。我国过去的私塾就是这种教学制。教师面对一个，两个或若干个学生，他们的年龄，程度和学习的内容、进度各不相同。当教师在教某一个学生时，其余的各自进行自己的学习。这种教学制有利于因材施教，不利于大批造就人材，是古代通常采用的教学制度。近代各国学校以班级授课制为基本形式，但由于班级授课制不能充分适应学生个性差异，二十世纪二十年代前后，有些教育家重新提出了个别教学制，如道尔顿制，文纳特卡制。

个体内差异评价方法 把被评价集合中的各元素的过去和现在相比较，或者把一个元素的若干侧面相互比较。如把某学生过去的学习成绩与现在的学习成绩相比较，说明该学生的学习是进步了，还是退步了。再如把一个学生的数学学习情况区分为运算能力、空间想象能力和逻辑推理能力等来考察，考察之后可发现该生在哪一方面较好一些，在哪一方面较差一些。这些都是个体内差异评价。但这种评价方法缺乏客观标准，又不能与其他被评价者相比较。一般来说，个体内差异法常与相对评价结合起来运用。

F检验 一种综合检验，主要是检验各种平均数之间是否有显著差异。利用公式

$$F=\frac{MS_B}{MS_W}$$

求得F值，就可以通过查F分布表对各组平均数之间的差异是否显著作出机率的说明。上式中，MS_B为组间均方，MS_W为组内均方。其中

$$MS_B=\frac{SS_B}{df_B},$$

$$MS_W=\frac{SS_W}{df_W}。$$

SS_B为组间离均差的平方和，SS_W为组内离均差的平方和，df_B为组间自由度，df_W为组内自由度。

χ^2检验 适用于计数资料的检验。所谓计数资料，是指我们在教育和教

学中常常遇到的不宜用数量分类，只能按品质分类的资料。如按性别分为男和女，能力评定分为优、良、中、可、差五种等。然后再按类别计算人数或次数。对计数资料的检验，就要用x^2检验。x^2检验是实得次数（观察次数）与理论次数（期望次数）偏离程度的差异显著性检验。其计算公式为

$$x^2=\frac{(f_0-f_e)^2}{f_e} \quad 或$$

$$x^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_0-f_e)^2}{f_e}。$$

式中f_0是观测实得的次数，f_e是在某种假设中期待的次数（在x^2的运算中，实得次数的平均数就是期待的次数），k为组数。若观测次数与理论次数完全相同，则x^2为零。若观测次数与理论次数相差越大，即观测次数与理论次数相吻合的程度越低，则x^2值越大。反之，观测次数与理论次数越接近，即观测次数与理论次数吻合的程度越高，则x^2值越小。所以，x^2值可以用来度量观察次数与理论次数的差异程度，它是表示其差异相对大小的统计量。如，某城镇小学，有男生5200人，女生4800人，问男女学生人数的差异是否显著？检验步骤：①建立虚无假设。实测数据与男女学生各应占$\frac{1}{2}$的理论没有差别。②计算x^2值。男学生数：实测数$f_0=5200$，理论数$f_e=5000$；女学生数：实测数$f_0=4800$，理论数$f_e=5000$。

$$x^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_0-f_e)^2}{f_e}=\frac{(5200-5000)^2}{5000}+\frac{(4800-5000)^2}{5000}=16。$$

③选定显著水平为0.01，查x^2值表，当自由度$df=2-1=1$时，$x^2=16>x^2(1，0.01)=6.63$。④作出判断。因为$x^2=16>x^2(1，0.01)=6.63$，差异极显著。说明该城镇男女学生人数的差异极为显著，否定虚无假设。

开卷考试　将考试题目公开，由学生看书，查阅资料，研究讨论，然后做出答案的一种考试形式。开卷考试的试题应该是综合性强，富于创造性，从书本上找不到现成答案的题目。开卷考试不一定当场交卷。

开放性数学问题　一个题系统通常包括四个要素：已知条件、解题依据、解题方法、结论。根据这四个要素是否完备以及要素缺少情况，可将题目分为四类：

（1）标准性题　即题目的条件、结论是明确，其解法与解题根据也是学生（解题者）知道的。教学中一些复习性质的题属于此类。

（2）训练性题　即题目的四个要素中，有一个对于学生来说是不知道的（或不明确的）。通常是解题依据或解题方法不明确。

（3）探索性题　即题目有两个要素是学生所不知道的。例如，已知数列$\{a_n\}$中各项都是正数，且前n项

和 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，①通过 $n=1,2,3\cdots\cdots$等情况的观察，猜想出通项公式；②用数学归纳法证明你的猜想是正确的。题目给出了已知条件，解题方法，而结论、解题依据不明确，属探索性题。

（4）问题性题 即题目有三个要素对学生是不明确的。最常见的情形是仅仅给出已知条件，在结论部分中指出一个探索方向或范围，而结论本身需要判断与猜想。例如：$\underbrace{44\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9$ 是不是某个自然数的完全平方，证明你的结论。

训练性题、探索性题、问题性题统称非标准性题。也有的称标准性题为封闭性题，称训练性题为半封闭性题，称探索性题与问题性题为开放性题。

五“让”教学法 五“让”教学法是山西省太原十中初中数学教师韩柔总结出来的。他从1981年起，参加中央教科所的教改实验，取得较好效果，其经验概括为五“让”教法。

（1）书本让学生读 即指导学生认真阅读、领会教材。

（2）见解让学生讲 即在学生阅读后，启发学生发表见解，提出解决问题的办法。

（3）“三点”让学生议 即针对教材的重点、难点、疑点，有顺序地提出点拨性例子，组织学生议论、交流，充分发挥学生的主体作用。

（4）规律让学生找 即巧设方案，让学生自己动脑动手去观察、分析、概括教学内容的规律。

（5）总结让学生写 即每章、每节的小结让学生自己写出，通过重新整理、系统归纳，逐步养成科学的学习方法。

五级记分法 用5、4、3、2、1作符号表示学生成绩优秀、良好、及格、不及格、劣等的一种等级记分法。五级记分法是苏联在1944年规定全国普遍采用的记分法。我国建国初期，在全面学习苏联时，学校也曾普遍采用五级记分法。1956年以后，逐步放弃使用，以百分记分法取代。

区分度 考试题对不同水平的考生加以区分的能力指标。也就是试题的辨别力的大小。区分度高的考试题，对考生的特性、能力和学业水平就有较高的鉴别力，好学生得分高，差学生得分低。区分度低的考试题，好学生与差学生的得分无规律或差不多。国外标准化考试的优秀题目的区分度一般在0.4以上。若区分度在0.29以下就要改进或淘汰。计算区分度有多种方法，其中最简单的一个是 $D=P_H-P_e$。其中D为P_H与P_e的差异，D值越大，则区分度越高，P_H为高分组（总分得高分的考生组）在某题的通过率，P_e为低分组（总分得低分的考生组）在某题的通过率。此外，还常采用计算所得总分(y)与某题得分(x)之间的相关系数的方法，用积差相关作为计算公式

$$r_{x\cdot y}=\frac{\sum xy}{N\cdot S_x\cdot S_y}。$$

其中N为考生总人数，S_x为某题得分的标准差，S_y为整个试卷总分的标准

差。对于选择题，还可以用题目得分与总分间的点二列相关r_b来作为区分度的指标，其计算公式为

$$r_b=\frac{\overline{x_p}-\overline{x_q}}{SD}\cdot\sqrt{pq}。$$

式中，$\overline{x_p}$为通过题目的考生总分的平均数，$\overline{x_q}$为未通过的考生总分的平均数，SD为所有考生总分的标准差，p为通过题目考生所占总人数的比例，$q=1-p$。如，10名考生考试的总分及在第一题上的选择答案登记如下：

考生号码	总　分	第一题的选择答案（B为正确答案）
1	70	B
2	70	C
3	60	D
4	30	A
5	55	B
6	40	C
7	60	D
8	75	B
9	90	C
10	100	B

$p=4\div10=0.40$，$q=1-0.40=0.60$，$\overline{x_p}=(70+55+75+100)\div4=75$，$\overline{x_q}=58.33$，$SD=20$，$r_b=\frac{75-58.33}{20}\sqrt{0.40\times0.60}=0.41$。符合要求，即第一题具有较好的区分度。

区间估计　用概率表示参数可能落在某数值区间之内的推算方法。例如，某一样本$\overline{x}=50$，很可能μ的值是在46到54这个区间内，$s^2=100$，很可能σ^2的值落在94到119这个区间内，这种估计称为区间估计，即参数可能落在这个给定的区间之内。为了更清楚地说明，还必须用概率表示μ或σ^2的值，有多大可能在某一区间之内。因此，要与区间值同时计算出置信系数或置信度的数值。估计的区间，称为置信区间。常用的置信区间是$\overline{x}\pm1.96SE_{\overline{x}}$。这表示如果用样本的平均数$\pm1.96$样本平均数的标准差来代表总体平均数的话，其正确的可能性为95%。换言之，即错误的可能性只有5%。

比率变量　既有相等单位，又有绝对零点的变量。如身高、体重等就属于比率变量。比率变量可以做倍数比较，可以进行代数运算。如哥哥的身

高是170厘米，弟弟的身高85厘米，我们可以说，哥哥的身高为弟弟身高的2倍。

比较选择题　选择题的一种题型。这类试题主要考查学生对两种类似情况或数量作比较、鉴别的能力。试题的形式与匹配题类似。也是先列出一组用字母标明的备选答案，后列出一组由不完全陈述句构成的问题（也有左侧列写问题，右侧列写备选答案的），要求考生给每一个问题选择一个最合适的答案。由于这类试题只对两种情况进行比较，因此只存在四种可能的选择，一般以A、B代表需要比较的两项实质性的内容（即两个对立的答案），C代表二者都正确（或有关、均有等），D代表二者都不正确（或无关、均无等）。例如，"比较下列各题中甲、乙的大小：(A)甲>乙；(B)甲<乙；(C)甲＝乙；(D)大小不能确定。①甲：$\sin\alpha$，乙：$\mathrm{tg}\alpha$（α是锐角）；（　　）②甲：$\sin\alpha$，乙：$\cos\alpha$（$45°<\alpha<90°$）；（　　）③甲：$\sin\alpha+\sin\beta$，乙：$\sin(\alpha+\beta)$（α、β都是锐角）；（　　）④甲：$\sin\frac{\alpha}{2}$，乙：0（α是第一象限角）；（　　）⑤甲：$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$，乙：$\mathrm{tg}|\alpha-\beta|$（$\alpha$、$\beta$都是锐角）。（　　）"

中位数　简称中数。在按大小顺序排列起来的数列中，与中间点相对应的数值，叫做中位数。它是描述集中趋势的量数之一。用符号Mdn表示。中位数是把次数分布区分为两部分的一个点，在这一点的两边各有相同个

组别	f	向上累积次数	向下累积次数	算法
65——69	1	157	1	$\frac{N}{2}=78.5$
60——64	4	156	5	$F_b=64$
55——59	6	152	11	$f=34$
50——54	8	146	19	$i=5$
54——49	16	138	35	$L_b=34.5$
40——44	24	122	59	$Mdn=34.5$
35——39	34	98	93	$+\frac{78.5-64}{34}\times5$
30——34	21	64	114	$=36.63$
25——29	16	43	130	
20——24	11	27	141	
15——19	9	16	150	
10——14	7	7	157	

数的观测数据。中位数的确定，取决于分布中的观测数据的个数是奇数还是偶数，也取决于在靠近分布的中点有无重复的数据。其计算方法可区分为：①当观测数据的个数是奇数，而靠近中数又没有重复数据时，这个中数就是居中的量数。如分布（3，5，6，7，10），6就是中数。②当分布中观测数据的个数是偶数，而靠近中数又没有重复数值时，按习惯，是把居中的两个数的平均数当作中数。如分布（3，5，6，7，10，14），其中数是6.5。③当一个数值多次出现在中数附近的时候，中数的确定，方法比较复杂，但不论观测数据的个数是奇数或偶数，进行的步骤基本是一致的。如果把这些步骤通式化，其计算公式为

$$Mdn = L_b + \frac{\frac{N}{2} - F_b}{f} \times i。$$

式中，Mdn为中数，L_b为中数所在组的精确下限，N为数据的总个数，F_b为中数所在组精确下限以下的观测数据的个数（次数），f为中数所在组内的观测数据的个数（次数），i为组距。如下表为依据次数分布表求中数的例子。

中小学数学　中学数学和小学数学的简称。中小学数学是中小学教育中的主要课程之一，是中小学学生必须掌握的一种最基本最基础的知识。

1977年原教育部颁布的小学数学教学大纲规定，数学内容除了算术知识外，增加代数、几何及现代数学的一些内容。因此，原用的“算术”这一名称已难于概括，故改称“数学”，与中学数学的名称统一起来了。

关于小学数学教学目的和要求，根据国家教委1988年颁发的九年制义务教育《全日制小学数学教学大纲（初审稿）》规定：

教学目的：①使学生理解、掌握数量关系和几何图形的最基础的知识。②使学生具有进行整数、小数、分数四则计算的能力，培养初步的逻辑思维能力和空间观念，能够运用所学的知识解决简单的实际问题。③使学生受到思想品德教育。

教学要求：使学生获得有关整数、小数、分数、百分数和比例的基础知识；常见的一些数量关系和解答应用问题的方法；用字母表示数和简易方程、量与计量、简单几何图形、珠算、统计的一些初步知识。使学生能够正确地进行整数、小数、分数的四则运算，对于其中一些基本的计算，要达到一定的熟练程度。逐步做到计算方法合理、灵活。

培养学生对所学的内容进行初步的比较、分析、综合、抽象、概括，对简单问题进行判断、推理。同时注意思维的敏捷和灵活。使学生逐步形成简单几何形体的形状、大小和相互位置关系的表象，能够识别所学的几何形体，并能根据几何形体的名称再现它们的表象。培养初步的空间观念。要引导学生注意观察和认识周围事物中的简单图形和数量关系，初步学会运用所学的数学知识和方法去解决一些简单的实际问题。要根据数学的学科特点，对学生进行学习目的的教育，爱祖国、爱社会主义的教育，

辩证唯物主义观点的启蒙教育。培养学生良好的学习习惯和独立思考、克服困难的精神。

关于中学数学教学目的，根据国家教委1988年颁布的九年制义务教育《全日制初级中学数学教学大纲（初审稿)》规定：使学生切实掌握现代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数。几何的基础知识与基本技能，包括直观的空间图形和统计的初步知识，进一步培养运算能力，发展逻辑思维能力和空间观念，并能运用所学知识解决简单的实际问题。培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义观点。

初中数学的基础知识包括初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理等，以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

初中数学教学中要培养的基本技能是：能够按照一定的程序与步骤来进行运算、作图或画图、简单的推理。

初中数学教学中发展学生的逻辑思维技能主要是：逐步培养学生会观察、分析、综合、比较、抽象和概括；能够运用归纳、演绎和类比方法进行推理；逐步做到简明地阐述自己的思想和观点；注意培养良好的思维品质。

运算能力是指逻辑思维能力与运算技能的结合，即不仅会根据法则正确地进行运算，而且要理解运算的算理；能够根据题目条件寻求简捷、合理的运算途径。

空间概念主要是能够由形状简单的实物想象出空间图形，由空间图形想象出实物，由较复杂的图形分解出简单的基本的图形，在基本图形中找出基本元素及其关系，能够根据条件作出或画出图形。

数学教学中，发展逻辑思维能力是培养能力的核心。

良好的个性品质主要指的是：正确的学习目的，浓厚的学习性趣，顽强的学习毅力，实事求是的科学态度，独立思考、勇于创新的精神和良好的学习习惯。

初中数学中的辩证唯物主义教育因素主要是：数学来源于实践又反过来作用于实践的观点；以及数学内容中普遍存在的运动变化、相互联系、相互转化的观点，如具体与抽象、已知与未知、特殊与一般、简单与复杂、数与形、正与负、常量与变量等。

关于高中数学，一直执行着国家教委颁布的全日制中学《数学教学大纲》进行教学(简称过渡大纲)。大纲规定的教学目的是：使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力，逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。要培养学生对数学的兴趣，鼓励学生为实现四个现代化学好数学的积极性，培养学生的科学态度和辩证唯物主义观点。

根据国家教委（89）教基字111号文件《关于对〈现行高中教学计划调整意见（征求意见稿）〉征求意见的通知》精神，于1989年11月进行了

对全日制中学《数学教学大纲》高中部分的教学内容的调整，以利于降低难度，减少学生过重的作业负担，使文理科课时和内容的结构比例趋于合理，有利于普通高中的整体改革，注意与九年制义务教育教学计划和新的高中教学计划的衔接，推动高中会考制度的实施。

随着生产和科学技术的发展，国内外中小学数学教学的实验，促进了中小学数学教学的改革，大面积的提高了数学教学质量。但在实验、改革中也提出了许多有待研究的新课题。例如，第一，强调中小学生学好必要的数学基础知识和基本技能，那么中学数学中的代数、几何知识、下放到小学哪些更为合适？中学数学的教材结构体系，怎样组合更为科学？第二，坚持数学现代化方向，渗透现代数学思想方法，但渗透哪些为宜，如何渗透才能有助于学生对数学基础知识的理解，扩大学生的知识面？第三，强调在学习过程中发展学生的能力，培养他们的探究和创造精神，但如何培养仍须继续探索？第四，怎样安排计算工具的使用，才能有利于运算能力的提高？等等。

中程教学目标　一般指年级的教学目标及各学科的教学目标，它是对终极教学目标的初步分化。这种教学目标指出在一定的学习阶段里，和从不同的知识领域里，去完成终极目标时所应做的事情。

中学数学的运算能力　逻辑思维能力、运算能力与运算技能的结合，即不仅会根据法则正确地进行运算，而且要理解运算的算理，能够根据题目条件寻求简捷、合理的运算途径。具体地说，就是使学生在掌握基础知识的基础上，能够根据算理、算法进行数与式的运算、初等超越运算、极限运算、概率运算、统计运算及微积分运算的能力；运算过程简捷、合理、速度快及结果正确的能力以及能对运算结果进行判断、验算、检查、估计的能力。运算能力的高低不仅依赖于运算技能，而且依赖对算理的理解和精通程度，依赖于逻辑思维能力的强弱。运算方法是以算理为依据的，算理清楚、方法才能简洁、合理；算理精通，运算才能迅速、准确。因此，培养学生的运算能力，不仅要教会运算方法，而要使学生掌握算理。培养学生的运算能力，还要注意两个方面，一是教会学生对运算结果进行判断、检验；另是要不断地提高学生的估计能力。估计，不仅能为判断计算结果的正误提供有价值的信息，而且还是进行正确计算的重要步骤。例如，数学、物理、化学等学科，都有涉及预定准确度的计算题，对这些题一般都必须先行估算，找得结果的约值，然后确定参与计算诸值的取值精确度。为了提高学生估算能力，在九年制义务教育小学数学教学大纲中明确提出了估算的教学要求，同样，在中学数学教学中也应加重视。

中学数学的基础知识　中学代数、几何及分析中的概念、法则、性质、公式、公理、定理，以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。例如，转化的思想，换元法，待定系数法，反证法，三角诱导公式等，都属于中学数学基础知识的范畴。

中学数学基础知识是一个历史范畴的概念，它随着生产及科技的发展，教育的培养目标而确定的。例如，50年代中学不开设解析几何学，而80年代中学开设解析几何学，因此，在中学数学基础知识中对解析几何的要求就截然不同了。又如，现在中学数学中学点微积分初步，因而现在中学数学基础知识中就应对微积分初步有所要求，而这是在50～60年代中学数学基础知识中所没有的。

中学数学的空间想象能力　对客观事物的空间形式进行观察、分析和抽象思考的能力。即根据几何体或用语言、式子表达的几何体正确地画出图形，以表示几何体的形状和基本元素之间的相互位置关系的能力；根据图形想象出几何体以及用语言、式子表达几何体基本元素之间相互位置关系的能力；把复杂图形分解成基本图形以及把基本图形组合成复杂图形的能力。

心理学常把空间想象能力分为三级水平：一是空间知觉，二是空间观念，三是空间想象能力。要求培养学生对形状较简单的几何体的个别属性或对整体有直观的了解。空间想象能力的这种水平就是空间知觉水平。不仅要求学生能由形状简单的几何体反映出空间图形，而且能由空间图形想象出几何体；由较复杂的图形分解出基本图形；在基本图形中找出基本元素及其关系；根据条件画出或作出图形，这就是空间想象能力的空间观念（或空间表象）水平。要求学生在具有空间观念水平基础上，能用图形来反映并思考用语言或式子所表达的空间形状及位置关系，这就是空间想象能力的第三级水平。空间想象是人在空间形状的影响下，经过思维，在语言或式子的调节下，对已有的表象经过结合和改造而产生新表象的心理过程。由此可见，对实物形状的认识由具体到抽象，由感觉到思维，是空间观念和空间想象力在水平上的重要差异。从学生空间想象能力形成过程来看，三种水平之间并没有明显的界线，而是彼此联系，部分重叠，相互作用的。由于不同年级的学生，生理和心理的发展差异，以及学习内容的不同，在培养空间想象能力方面，不同阶段应有不同的要求和侧重点。培养学生空间想象能力不仅是几何教学的任务，也是代数、三角和微积分教学的任务。培养学生空间想象能力的材料不仅在几何学科中大量存在，在数学的其他学科中也是十分丰富的。如根据图象研究有关函数性质，数列和函数极限概念的几何解释等。

学生空间想象能力的提高和画图、作图能力的提高是相辅相成的，因此应当根据教材内容、有计划、有目的培养学生的画图和作图能力。平面几何中的视图和立体几何中的直观图画法，既是培养学生空间想象能力、提高学生画图技巧的好材料，也是生产和生活中的有用的知识。

中学数学的逻辑思维能力　正确、合理地进行思考的能力。即对事物进行观察、类比、归纳、演绎、分析、综合、抽象和概括的能力；采用分类、类推和系统化等思维方法，运用正确的推理方法、推理格式，准确而有条理地表述自己思维过程的能力。

由于数学本身具有严密的逻辑性，中学数学绝大部分定义和定理都是采用逻辑方法进行叙述和证明的，因此，在培养学生逻辑思维能力方面，数学教学具有更为优越的条件和负有更大的责任。逻辑思维能力不仅是学好数学必须具备的能力，也是学好其他学科、处理日常生活问题所必须的能力。由于运算能力涉及到对算理的理解和算法的选择，空间想象能力涉及到对事物空间形象的思考，因此，逻辑思维能力实际是运算能力和空间想象能力的基础。“发展逻辑思维能力是培养数学能力的核心”。

培养学生的逻辑能力，必须重视数学概念、公式、定理、法则的提出过程，知识的形成，发展过程、解题思路的探究过程的教学。这些过程中学数学教材中不可能也不必要完全反映出来，但教师在教学中应当而且必需把这些思维活动过程反映出来，这种反映正是培养学生逻辑思维能力的过程，是教师思维的产物。

九年制义务教育数学教学大纲在提出逻辑思维能力中指出“注意培养良好的思维品质。”这是因为培养学生的逻辑思维能力和提高思维品质是相互关联的，所以应当把提高学生思维的敏捷性、灵活性、深刻性、独创性和批判性作为培养逻辑思维能力的内容来要求。

学生的思维能力随着年龄的增长、学习内容的增多、深化及教师的培养而不断提高。不同年龄的学生，甚至同年龄的学生之间的思维能力总是有差异的，因此，教学要求、教学方法必须适应大多数学生的思维水平，不能要求过高过急，或过低过慢，否则难以调动起学生的积极性。

中学数学教材结构最优化　任何一门学科的教材，都必须具备科学性、系统性，中学数学教材也不例外。加强教材内部各章节的联系，恰当地安排知识间的次序，对提高教学质量有直接地帮助，这就是教材结构最优化的问题。

现在国外已开始研究这个问题，象苏联的B•M莫纳霍夫（MOHAX-OB），B•Ю古列维奇（ГуЛЕВ-ЫЛ）应用电子计算机对苏联六年级几何教材作了研究，得出了改革后的内容和结构，苏联教育科学院教学内容和教学方法科研所和白俄罗斯加盟共和国教育部科研所曾对中学几何课内容的最优化进行研究，并获初步成果。

（1）基本术语及符号

①概念：数学中的基本概念和重要规律如定义、公理、定理、性质、法则、公式等统称为概念，在网络图中用圆圈表示，如概念A_1用Ⓐ$_1$表示。

②关系：数学中有个概念间的联系称为关系，在网络图中用圆圈和箭头表示，如概念A_1和A_2有关系，用Ⓐ$_1$→Ⓐ$_2$表示。

③始概念（紧前概念）：网络图中两个有关系的概念中，处于箭尾的概念，称为关系的始概念。

④终概念（紧后概念）：网络图中，两个有关系的概念中，处于箭头的概念，称为关系的终概念。如Ⓐ$_1$→Ⓐ$_2$中，Ⓐ$_1$为始概念，Ⓐ$_2$为终概念。又

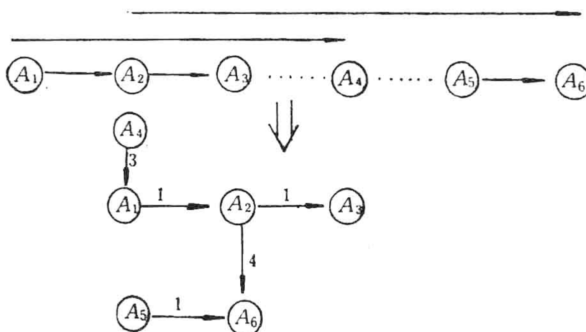
如$\textcircled{A_1}\rightarrow\textcircled{A_2}\rightarrow\textcircled{A_3}\rightarrow\textcircled{A_4}$中，其中$\textcircled{A_2}$和$\textcircled{A_3}$是相对概念。

⑤邻近度：两个有关系的概念中，终概念A_j和始概念A_i的编号差$j-i$称为始、终概念的邻近度（或称距离），用$R(A_i, A_j)$表示邻近度，记作$R(A_i, A_j)=j-i$。

⑥高效果：若学完概念$\textcircled{A_i}$，紧接着学概念$\textcircled{A_j}$，即两个概念的邻近度小，称关系$\textcircled{A_i}\rightarrow\textcircled{A_j}$为高效果。

⑦低效果：若学完概念$\textcircled{A_i}$，隔较长时间才能学习概念$\textcircled{A_j}$，即两个概念的邻近度大，称关系$\textcircled{A_i}\rightarrow\textcircled{A_j}$为低效果。

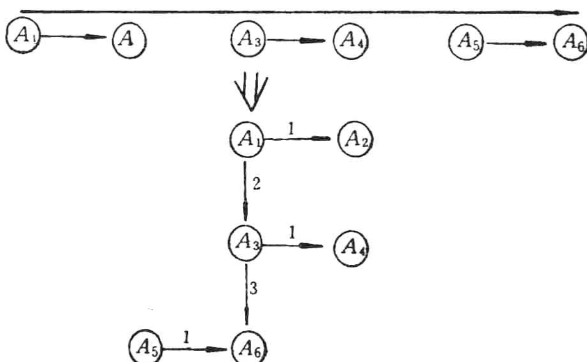
例1



则有$R(A_1, A_2)=1$；$R(A_1, A_4)=3$；$R(A_2, A_3)=1$；$R(A_2, A_6)=4$；$R(A_5, A_6)=1$。

$$\therefore S=R(A_1,A_2)+R(A_1,A_4)+R(A_2, A_3)+R(A_2, A_6)+R(A_5, A_6)=1+3+1+4+1=10。$$

例2



则有 $R(A_1, A_2)=1$；$R(A_1, A_3)=2$；$R(A_3, A_4)=1$；$R(A_3, A_6)=3$；$R(A_5, A_6)=1$。

$$\therefore S=R(A_1, A_2)+R(A_1, A_3)+R(A_3, A_4)+R(A_3, A_6)+R(A_5, A_6)=1+2+1+3+1=8。$$

由上两例可以看出，同样六个概念，只要将概念的位置加以改变（允许的改变），就可得到另一种结构，其邻近度的总和也就发生了变化。我们的任务就是改变概念的位置，使其邻近度的总和最小。

（2）满足下列两个条件的教材结构称为最优结构

①有序性：就学科内容的联系，任意有关系的两个概念之间，始概念必在终概念之前。

②最小性：就其概念安排的顺序，所有有关系的概念间的邻近度总和最小。

（3）怎样将给定的教材结构化为最优结构

假设给定的教材结构中有几个概念 A_1，A_2……，A_n，为满足最优结构的第一个条件（有序性），必须改变概念的编号。

令 x_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）表示概念 A_i 在最优结构中的编号，若 A_i，A_k 有关系，且表示为 Ⓐ→Ⓐ（$1\leqslant i\leqslant n-1$，$2\leqslant k\leqslant n$），则必须 $x_i<x_k$。再令其邻近度为 $R(A_i, A_k)=x_k-x_i$，为满足最优结构的第二个条件，则必有 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}$、$\sum\limits_{k=2}^{n}(x_k-x_i)$ 最小。由此，可以归结出教材结构最优化的数学模型为：求一组自然数 x_i，满足约束条件：

$$x_i<x_k\ (1\leqslant i\leqslant n-1, 2\leqslant k\leqslant n),$$
$$\{x_i, x_k\}\subset(1, 2, \cdots n)。$$

使目标函数 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{k=2}^{n}(x_k-x_i)$ 最小。

（4）实施教材结构最优化的步骤

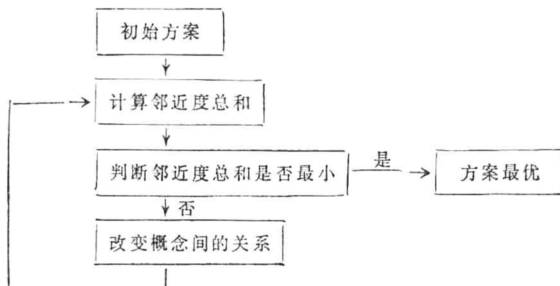
①做初始方案，把某一章中的概念找出来进行编号，画出初始网络图。

②计算邻近度的总和。

③改变低效果的概念间的关系。

④计算邻近度的总和。

⑤重复（3）、（4）直至达到要求，其框图如下：



中学数学的数学思想和方法 九年制义务教育《全日制初级中学数学教学大纲（初审稿）》指出："……它的内容、思想和方法在自然科学和社会科学的学习、研究与应用中都有重大作用"，"基础知识包括初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理等，以及由其内容所反映出来的数学思想和方法"，"在教学中，应当引导学生在学好概念的基础上掌握数学的规律（包括法则、性质、公式、定理、数学思想和方法）"，在"过渡大纲"中也有类似要求，由此可见，数学思想和方法作为中学数学教学内容已经被突出的提出，既是提高学生数学素质的需要，也是数学教学发展的必然结果。

关于中学数学的数学思想和方法的内涵和外延，虽然目前还没有公认一致的提法，但这不会影响对它的教学。从教学需要，我们暂把"数学思想和方法"作为一个整体概念，并将"由基础知识所反映出来的数学思想和方法"大致分为易于在教学中掌握的三类：①解题技巧方面的数学思想和方法；②逻辑方面的数学思想和方法；③一般性的数学思想和方法。

关于解题技巧方面的数学思想和方法，包括有：消元法、换元法、配方法、降次法，待定系数法、裂项法、添项法、递推法，关系与映射法、集合与对应用法等。关于逻辑方面的数学思想和方法，包括有：分析法、综合法、归纳法、演绎法、类比法、抽象法、直接证法和间接证法等。关于一般性的数学思想和方法包括有：字母代数法、坐标法、公理法、极限法、数学模型法，关系映射反演法等。这三种数学思想和方法中，有些是既有区别又有联系的。在解决具体的数学问题时又常有交错、综合的运用。

方法是解决问题的门路、程序，思想是对事物的理性认识。运用数学方法解决问题的过程就是积累感性认识的过程。当感性认识积累到一定程度，人的认识就会产生飞跃，从而上升为理性认识，即形成为数学思想。反过来，数学思想又指导数学方法，一般的数学思想和方法，实际上是理性认识的结果。用一般的数学思想和方法处理、解决问题、在认识层次上比用特殊的数学思想和方法处理和解决问题显然要高一些。

"方法"和"思想"之间联系是紧密的。数学自身又具有严密的逻辑性，所以中学数学教材内容按数学各部分内容的内在规律、及它们间的相互联系进行编排、数学思想和方法只能从相关的内容中体现出来。因此，教师在教学中必须把和数学内容相关的数学思想和方法发掘出来，按不同阶段不同的要求，有计划、有目的传授给学生，对提高学生素质是十分重要的。

中学数学教学内容安排最优化 苏联著名教育家巴班斯基指出："能使学生的注意和思维集中所学专题的最关键的观点和观念上，或者是教学进行的结果同时能激发和提高认识兴趣，这样的课堂教学才是认为最有成效的。"为了取得卓有成效的教学效果，首先，在课堂教学内容的安排上

应当做到最优化，最优化的课堂教学内容的安排应满足三个方面的要求：①目的明确；②重点突出；③练习适当。

课堂教学内容的安排，要建立在充分了解学生思维水平，对旧知识的掌握，对新知识的渴求，教师熟悉本堂课所教的内容在本章中所处地位以及前后知识之间的联系的基础上。提出明确的，切实可行的教学方向和目的，使之成为贯穿全课堂的中心。在教学过程中，随时注意采取的方法和教授的内容，检查学生接受知识的情况是否有助于教学内容的完成，确定预定的教学目的是否能够达到。教学目的确定也就是一堂课的教学主导思想的确定、每一位教师都应当重视这个问题。当然，目的明确也包括了目的要求的适当，过高或过低的要求、都会破坏整堂课的教学结构和教学效果。不切实际的过高要求、势必难以达到，会出现教师急于达到予定教学目的而快讲、多讲，结果学生听不懂，无法消化，起码的要求也难以达到。事后还要再补课，事倍功半。过低的要求也会造成进度过缓，脱离学生思维，削弱学生的积极性、压抑思维的发展。

在教学内容的按排上、重点突出是至关重要的。一般地，一堂课一个重点，即一个主攻方向。要削枝强干、重点过多就无所谓重点。对于主要问题必须用较多时间、从不同角度和侧面向学生阐明、引导学生从多方面理解它，在理解的基础上尽快地记住它。

“练习要适应”，这是教学要求，对这个要求要作具体分析。这里不单是数量的适当，其主要目的是紧扣当堂课的教学目的和教学重点、要为突出重点、为教学目的服务。因此，布置作业、不要只从课本的习题中按顺序布置，要精心选择。要有一定的习题储备、尽量使每题都能起到巩固所学知识、启迪学生思维的作用。同时，难易要适当，一般在刚授完新课的习题不宜过难，实现逐步积累和加深。我们的目的，不仅教给学生大量的正确的严谨的知识，而且还要保证知识巩固性。知识的巩固性不单是靠大量练习，而是靠知识的广度来达到。知识的广度不单纯意味着知识面很宽，最主要的是知识之间的联系。如能在教学过程中恰当地揭示这种联系，那么概念就会形成一个严密的体系，而在这个体系内进行着个别概念的划分。学生在有机的联系中获得越来越多的新知识，效果比单调的复习要好得多。因此，每堂课要依靠揭示本质、开拓视野来激发学生的学习兴趣，使学生在不断地探求中学习新知识、巩固旧知识。

中学数学教材改革的历史状况　自古以来、对于数学教学就有两种不同倾向的认识。一种是把数学作为锻炼思维的课程，以论证几何为主，其代表教材就是欧几里德的《几何原本》，另一种是把数学作为解决实际问题的课程，以算术、代数和实用几何为主，其代表教材是《九章算术》。

长期以来，中学数学教学内容经历过千百次改革，但近代的改革是从18世纪的“百科全书派”开始的。在历史上人们曾认为过《几何原本》是最

好的几何教材。但是，法国杰出的数学家，“百科全书派”的主要成员之一达朗贝尔，对《几何原本》提出了批评意见，他指出：“《原本》绝不是为我们时代的儿童而写的。为了适应社会发展的需要、应当另编几何教材，而新教材应使平面几何和立体几何适当结合，使解析法与微积分的思想在新教材中占有地位。”

19世纪以来，中学数学教材内容大体由平面几何、立体几何、平面解析几何、代数、平面三角组成，在较长时间内没有变化。20世纪以来，特别是在50年代末，由于微积分的普遍应用，世界许多国家都把微积分列为中学高年级数学课的内容。1978年，我国也把微积分作为中学数学课程中的内容。1983年通过调整教学内容，在高中阶段提出两种教学要求，微积分作为较高教学要求的数学课的内容。

中学数学教学改革的发展趋势　60年代的改革是受数学本身的发展所指导的，所以基本上是在数学范围内谈改革。70年代的改革是在总结过去正反两方面的经验的基础上，较多的从社会的需要去考虑改革，即越来越强调数学的应用。80年代改革的趋势大致是：

（1）强调提高所有学生的数学能力和对数学的态度。1980年4月，以美国全国数学教师联合会理事会的名义，公布了一份《关于行动的议程》，对80年代学校数学教育提出了一个带规划性的建议，即“解决问题应是80年代中小学数学的核心”、“设计80年代的数学教学大纲必须以能帮助解决各种实际问题的数学方法来武装学生。”

（2）强调从应用出发，精选传统的教学内容，增加新内容，以适应发展的需要。改革过去重理论轻应用的弱点，教学内容要从应用出发，能解决实际问题。但不能将数学教成应用的附属品。

（3）强调把现代数学思想和数学方法作为中学数学课的重要部分。线性代数和概率统计这两部分内容为人们普遍关注、有的认为它们迟早会成为90年代或21世纪一个有文化的公民所必备的文化修养。

（4）强调充分发挥计算机在数学中的作用。用它来辅导教学，指导技能训练，管理教学，分析教学效果，追踪学生进度等。

（5）几何的改革为重点研究项目之一。在欧美各国，从60年代“新数运动”开始，就对欧氏几何着手删减，废除了代数、三角、几何的分科、将几何代数化，欧氏几何的体系被向量代数、解析几何、变换几何的观点和方法所代替。

在美国的《统一的现代数学》教科书中，用集合论的语言给出了三角形的定义。说A、B、C为不共线的三点，那么$\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CA}$称为一个三角形。之后用解析法证明了三角形的三条中线交于一点。用实验方法教学勾股定理。

法国用集合论、群、环的语言和数学结构的观点，实现了数学教材现代化的处理。对几何的处理，他们广泛地采用了实验、变化、向量和画法几何等多种方法。如法国的8年级

（相当我国初二）利用射影、平移、以及向量来处理平面几何中的有关中心、重心、垂心、内心、最短距、多边形等概念。

日本是将几何代数化，把几何问题大量用代数方法来解决。

苏联的几何教学分为三个阶段。第一阶段（4至5年级）是预备性的，主要是建立在实验、直观的基础上进行的，不强调逻辑因素。第二阶段（6至8年级）有专门的几何课本，重点是重复过去的内容，但更多的是引进证明。完成系统的平面几何、并给出立体几何的一些基础知识。第三阶段（9至10年级）是向量和坐标来处理立体几何，并给出几何的公理化方法。

上述几个国家对几何教材的改革情况，有的是以传统的几何为主，有的则趋向于用变换作为基本方法来处理。

中学数学教学改革的近代化运动　中学数学教学改革的近代化运动是由德国数学家克莱茵（1849—1925），英国数学教育家贝利（1850—1920），美国的慕尔（1862—1933）所发起和领导的。他们主张中学数学要近代化，主要进行中学数学课的目的与任务的改革、侧重于用近代数学的观点改造传统的数学内容，强调数学教材的实践性、应用性。当时改革的设想是脱离欧几里德的系统，强调几何的实用性；提倡用数学方法观察生活；把代数、几何、物理变成有机地统一体；教材内容以函数概念和直观几何作为数学骨架主干，但由于第一、二次世界大战，中断了一些有价值的改革实验，再加上实用主义哲学和教育思想的冲击，使数学的近代化运动没有取得理想的结果，但对以后现代化运动的影响极为深刻。

中学数学教学改革的现代化运动　中学数学教学改革的现代化运动是从1958开始的。1957年11月苏联第一颗人造卫星上天，对美国刺激很大。美国认为美国的基础教育水平低于苏联，因而促使美国政府着重研究数学教育的改革，即数学教学现代化运动（国外叫做新数运动），这是直接原因。实际上，促使其改革的原因很多，一是当时政治、经济、科学的发展、需要大批科技人才，第二次世界大战后，欧洲大批科技人才流入美国，美国高等学校教育已赶上并超过了欧洲，但是大、中、小学脱节现象非常严重、中学落后于大学，为加速培养科技人才，必须改革中学教育。二是传统数学教材存在过分强调运算技巧，忽视概念教学，忽视能力培养，必须改造中学数学教材内容。三是20世纪的数学有了革命性的变革，计算机的出现，大大增加了“有限”数学和“离散”数学的比重。四是高等教育的发展，高等数学的基础有所改变，促使中学教学内容的改革。

数学教学的现代化运动大体经历了三个阶段。第一阶段是1958年到1961年，称为发动阶段。1958年春天，在美国数学协会和美国数学教师全国协会的支持下，由美国政府资助、成立了美国最大的研究改革数学教学的机构“学校数学研究组”，简称“SMSG”（School Methematics Study Graup），着手进行

改革实验，欧洲其它各国也随而进行改革，其中影响最大的是英国的“学校数学设计”，简称SMP（School—Methematics Project），另外还有法国和西德，亚洲有日本，这时苏联也着手从事于改革。第二阶段，是从1962年至1970年，称为实验阶段。世界各国都相继开展了试验改革工作，例如，1962年SMSG组编写了7至12年级的教科书在中学试用，1962年美国召开了专门讨论会，讨论今后十年美国普通数学教育的改革。1967年12月苏联公布了“新数学教学大纲”。第三阶段，从1971年至1979年，称为总结阶段。经过十余年的数学教育现代化运动的实验改革，暴露了许多问题，如计算能力差，学生负担过重，需要进行调整。改革的设想是对传统的数学课程进行改革，使之现代化（增加近、现代数学内容、使用近、现代数学符号，尽量利用模型，使其直观，以帮助学生理解），结构化（以现代数学的基本概念如集合、映射建立起有关数系、代数和几何的基本结构，如群、环、体、向量空间，从而把中学内容统一起来），代数化（打破欧氏体系，减少传统几何内容，以代数结构来统一整个课程），公理化（把集合论的初步知识和几何公理纳入中学数学教材）。改革的内容是增加代数结构的比重，减少几何内容，重视概率及数理统计的概念及应用；纳入新发展起来的数学分支（如运筹学、图论等）充分考虑电子计算机的需要。增加的内容有七个部分：微积分初步；概率论和数理统计；线性规划；计算机应用；初等集合论（它是现代数学各分支的基础）；近世代数基础（如群、环、体、向量空间、矩阵等）；数理逻辑（又称符号逻辑），它是运用数学方法研究关于推理证明等问题的一门科学，它是数学的基础，并且对计算机的原理有较大的影响。

从上面增加的七部分内容来看，前四部分是从应用出发的、体现了数学应用的广泛性。增加这四部分内容，认识一致。增加的后三部分内容是从加强基础出发，体现了数学高度抽象性。对这三部分的增加，认识不一致。

改革的方案，大体分三种类型：

第一种类型是以美国为代表的《统一的现代数学》为教材的改革，另有英、法国家的。美国编的《统一的现代数学》共六册(12分册)，其特点是公理化、结构化、代数化，打破了传统的分科界线，几乎去掉了全部的欧氏几何，以集合、关系、映射为基本概念，以群、环、体、向量空间为基本结构，加进了线性代数、微积分、概率统计、算法语言、线性规划等现代数学内容、侧重代数方法解几何问题。其结果，教材内容过于抽象化、严格化、形式化，脱离了学生的原有水平、忽视了基本能力的培养。同时，教师水平不适应，家长不理解、试验受挫，必须进行总结。

英国的《新数学》教材，其特点类似美国的教材，但不过分强调数学结构的作用。在初中不强调严格化和系统化，将纯数学和应用数学混在一起，突出实用性、但计算能力差，忽视手算和心算，改革阻力也较大。

法国的改革比较成功。有85%的

中学教师赞成改革。因为法国的大学早已进行了改革，培训了教师，他们对现代数学比较熟悉。另外、给家长编写了读物、使家长了解了现代数学内容和改革的要求，教材编写系统，没有削弱计算能力。

第二种类型是以苏联的试验教材为代表，其特点是基本保留了传统体系、削减了传统的内容，增加了现代数学，把数学分为代数和几何两科、齐头并进，改革比较稳妥，强调逻辑系统、加强理论、主张严密。

第三种类型是以日本和西德的实验教材为代表。它打破了代数和几何分科的界限，成为一种统一的数学，没有用结构思想，使传统数学与现代数学概念并存，保留大部分传统内容增加了现代数学。日本的数学改革总精神是精简传统的增加现代的，主张科学化。西德的数学教学改革较为谨慎、重视了师资培养和数学的普及，争取了社会的支持，效果是比较好的。

内容效度　指一个考试所测试的内容与予定要测的内容的一致性的程度。也就是说，一个考试是否考了应考的内容，或者是所考的内容是否反映了考试的要求。“钻牛角尖”的试题，其代表性有限，因而其效度也低。内容效度主要适用于成绩考试，因为这种考试的结果，通常是对考试内容或教学内容的掌握程度进行解释。鉴定考试的内容效度，没有数量化的指标，主要靠试题的测试内容是否有足够的覆盖率，以及各部分内容应分配的试题数量、分数的搭配（权重）是否适宜做经验性的判断。内容效度高低的判断，主要靠任课教师做出评价，若能与有关专家配合，判断会更加准确。

水平考试　用来测量考生现在所达到的某种实际水平的考试。它是考学生的现在，它不管考生过去学的什么教材内容，学了些什么，只是考查考生现在所达到的实际水平。一般地说，它更注重考生能力的测试。如我国的英语水平考试EPT，其目的就是测量考生的英语水平能否适应到英语国家学习和生活的需要。一些选拔性的考试，往往是水平考试。

反馈　系统的输出转变为系统的输入。具体地说就是系统的施控部分作用于被控对象后，产生的结果，再送回系统的施控部分，并影响控制部分对被控对象的支配作用的过程。美国学者艾什比给反馈作了更一般的解释，他指出“每一部件对另一部件都有影响，而这种关系可表为 $\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{R}$。当一能动系统各部件间的作用有这种循环关系时，我们便说这系统有反馈”。

在教学过程中，通常研究的反馈路线有两条，一是由学生的输出信息直接向教师提供的反馈，用以改进教学的部署与方法；二是教师对学生的学习情况作出评价，及时向学生提供，用以纠正学生学习中的偏差与失误。除此以外，还存在着另一种反馈，即教师和学生这两个子系统的“超短反馈”，亦称“自我反馈”。教师子系统的超短反馈表现在教师在教学进程中通过对所讲内容的自我检查和教学方法的自我检查和反省，得

出认可、否定、修正、改进等结论，及时纠正或调节教学进程。学生子系统的超短反馈，主要表现在回答问题或解决问题过程中，对定向、步骤、正误作出自我判断，或调整方向，或纠正错误，或强化思维活动。实际上是个自我意识、自我评价、自我调控的问题。

反馈在教学中的作用国外曾用实验说明：把一班学生分为三组，每天学习后测验、主试对第一组每日告知其学习结果，对第二组每周告知其学习结果，而对第三组则无此报告，如此进行八周，学习成绩十分明显，第一组最好，第二组中等，第三组最差。八周以后，改变办法，第一组不告之结果，第二组仍每周告之学习结果，第三组改为每日告知学习结果，再进行八周。这后八周学习成绩大为转变，第一组从最好下降为最差，第二组保持中等，第三组上升为最好，反馈在学习上效果之显著，尤以每日之反馈较之每周之反馈更高。

反馈原则 反馈原则是信息原则之一。反馈，就是把系统输送出去的信息作用于被控制对象所产生的结果再输送回来、并对信息的再输出发生影响。反馈原则是指在数学过程中、教师与学生从教与学的反应活动中获得反馈信息，以便及时调控教学活动，提高教学效果。根据系统论、控制论、信息论的观点、可以把教学过程看成一个可控的信息流通过程。教学过程是信息双向传递过程。如果只有输出信息而无反馈信息，就无法对教学过程进行有效地控制和调节，教学将趋于盲流状态。有效地利用反馈信息，可以顺利地进行交流和连结，及时判断教学和预测教学发展的趋势、从而使教学始终保持最佳动态，按着预定方向进行，以达到最佳教学效果。

教学的可控程度主要取决于信息流畅程度，特别是取决于反馈作用，教师要充分利用反馈的方法、随时注意来自学生中的各种反馈信息，及时调整和控制教学过程，以使教师、学生、知识等处于动态平衡之中。

贯彻反馈原则，必须要求做到：

（1）教师及时评定学生的学习活动，促进学生的自我调节，反馈信息越及时，学生获得学习成果的正确度越高，反馈信息的转换频率越高、教学效果就越好。学生在教师指导下，通过回答问题、板演、练习、观察与实验操作等反应，显示出对教材理解的程度，反映出对方法、技能掌握的水平与熟练程度，以及综合运用知识解决问题的能力。教师在教学中对学生活动的肯定或否定的评价，能促使学生作出自我调节。教学中如果不及时肯定学生好的做法，不否定错误做法，是不利于调动学习积极性，不利学生自我调节能力的提高的。因此，教学中及时对学生进行评定工作是不容忽视的。

（2）根据来自学生的反馈信息，教师要及时调节教学部署，改进后继教学。为此应做到：①教师要善于体察学生在课堂上的反应，根据学生对教材的理解和对技能掌握的程度，进一步调整教学方法和教学进程，以求符合学生水平，提高教学质量。②教师要及时发出矫正信息，纠

正学生错误的反应活动，以缩短学生学习情况与目标之间的差距。如教师根据课堂上学生质疑问题和解答问题的情况，判断教学安排是否得当。根据学生反应速度、调节教学密度和节奏。

（3）重视培养学生自我调节能力，提高学习的积极性主动性。学生自身就是一个自控系统能够对自我学习活动进行自我调节。教学中、使学生明确学习目的；引导学生积极自觉地验证所学过的知识、自我检查学习效果。改进学习方法，敏捷地接受学习的反馈信息、进行自我调节。学生自我调节能力的提高、将使学习可从被动变为主动，取得好的学习效果。

反馈原理　我国学者查有梁认为，一个控制系统，无论是物理系统、生物系统，还是社会系统，其信息通道必然是一个闭合回路。控制部分既有控制信息输入到受控制部分，受控部分也有反馈信息回送到控制部分，形成一个闭合回路，没有反馈信息的非闭合回路不可能实现控制。控制部分正是根据反馈信息的量才能比较、纠正和调整它发出的控制信息的量，从而实现控制。查有梁认为，可以把它总结成一条对自然、社会、思维普遍起作用的基本原理。表述为：任何系统只有通过反馈信息，才能实现控制。并称其为反馈原理。近年来，这条原理对数学教学有较大影响，有许多数学教学工作者引用它。

反馈控制　系统的输出量对系统的控制作用能产生直接影响的一种控制方式。具体地说，就是因干扰的影响，会使系统的输出量相对于目标的要求，产生偏差，根据这一偏差，产生一个控制信号，以纠正因干扰所引起的误差，抵消扰动的作用，这种控制方式实质上是以反馈调节为基础的。由于控制作用使用了输出信息，使控制部分与被控部分构成一闭环回路，所以这种控制方式也称为闭环控制。

分半信度　把一份试卷分成对等的两半，如按题号的单、双数分成奇数题、偶数题两部分。分别计算奇数题总分与偶数题总分，再求两个总分的相关，计算所得的相关系数，叫做分半信度系数。分半信度系数的计算步骤如下：①把试卷分成奇数题、偶数题两部分，分别登记分数。②累加奇数题得分，偶数题得分。③按下列表格填写、计算有关数据。

学　生	奇数题总分	偶数题总分	x^2	y^2	xy
	x	y			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N=$	$\Sigma x=$	$\Sigma y=$	$\Sigma x^2=$	$\Sigma y^2=$	$\Sigma xy=$

④利用下列公式求相关系数：

$$r_{xy}=\frac{N\Sigma xy-\Sigma x\Sigma y}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\cdot\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}。$$

⑤用斯皮尔曼——布朗公式矫正r值，所得结果即为分半信度系数。矫正公式为

$$r_{tt}=\frac{2r_{x_1x_2}}{1+r_{x_1x_2}}$$

式中，r_{tt}为经矫正的分半信度系数，$r_{x_1x_2}$为测验试卷缩短一半后的相关系数，即④中计算所得的r_{xy}。为什么要对r值进行矫正？因为信度与试卷的长度有关，用分半法计算相关，实际是将原测验试卷的长度缩短了一半，必须加以矫正，使其恢复到原来长度的相关系数。利用分半信度不需要进行两次测验，比较简便易行，所以在分析测验信度时被广泛使用。

分组教学 中小学数学教学中采用的教学组织形式之一。它是班级授课制教学的辅助形式。这种形式就是按照学生的能力或学习成绩分成不同的组进行教学，它可以克服班级教学的缺点、适应学生的个别差异。目前，在美国和英国等国家采用外部分组和内部分组两类。外部分组是按照学生的学习成绩或能力编组，打破传统的按年令编班的办法。外部分组主要的形式有两种：一是跨学科能力分组，把某一年级的学生按智力高低或成绩好坏分成不同的组，分别授以不同的教学内容；二是依学科能力分组，按学生某门学科的学习成绩或能力分成不同的组、其它学科仍回原班级授课。内部分组是在按年令编成的班内部、按照学生学习能力或成绩分组。内部分组的主要形式也有两种：一是分组后学习内容程度的不同、不要求统一。如有的学生自学补充教材；有的学生由教师讲授增加的教材；有的只复习基础教材；二是采用不同的方式学习相同的内容。如优等生可以自学或作业、差生可以由优等生或教师直接指导。结束一个单元的学习任务、进行测验、达到标准，再进行下一个单元的学习。

实践证明、分组教学的形式很有利于因材施教、发挥个人特长。但是，这种教学组织形式，极易给学生心理带来消极影响。这是应加以注意的。

分析评价法 预先根据评价的目标，把评价内容分解为几个项目，分别进行评定。

分类选择题 选择题的一种题型。这种试题多用于学能考试，主要测量考生的分析综合能力。其模式一般是要求考生指出所列各选择支中与众不同的选择支。也就是要求考生寻找能将某一选择支与其它各项选择支分离出来的划分标准，然后利用这一标准，选出与众不同的选择支。答案是唯一的。例如，“下列各式中与其它三式不同的是（　　）。A．$(\cos\theta,\sin\theta)$；B．$(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$；$C$．$(\frac{5}{7},\frac{3}{7})$；$D$．$(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$。”答案应选

C。

六课型单元教学法　六课型单元教学法也叫做“最优中学教学方式实验法”或“最优课堂教学方式”。这种教学法是武汉师范学院黎世法于1979年到1980年间，对武汉地区300多名优秀中学生的学习方法进行了调查研究，总结出“中学生的最优学习方法”，并在这个基础上提出“最优中学教学方式实验法。”它的基本做法是把教材划分为若干单元，依次通过以下六种课型进行教学。

（1）自学课　学生根据教师的指示在课堂上自学新教材。

（2）启发课　教师重点讲解。

（3）复习课　教师指导学生在课堂上进行独立复习。

（4）作业课　教师指导学生在课堂上独立做作业。

（5）改错课　在课堂上师生结合，共同批改作业。

（6）小结课　将知识、技能概括化、综合化。

方差　各观测值与其平均数之差，叫做离差，通常以$x=X-\overline{X}$（原始数据－平均数）来表示。离差平方的平均数叫做方差，或称均方差。用符号s^2或V表示（通常以s^2或V代表样本方差，而以σ^2代表总体方差），即

$$s^2=\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n}=\frac{\Sigma x^2}{n}。$$

方差是用来衡量样本或总体波动情况（或数据离散程度）的特征量。方差越小说明数据越集中。

计算机辅助测验　计算机辅助测验简称CAT。它是指利用计算机辅助对学生的学习效果进行测验和学习能力估量。一般有脱机测验和联机测验两种方法。脱机测验是由计算机从题库中按教师规定的要求，挑选出一组适当的题目，打印成试卷，学生作答，学生答完后，答案纸卡可通过“光电阅读机”进入计算机，进行评卷和评分。标准答案已早入计算机存储，以作对照之用。联机测验是从计算机的题库中逐个地选出题目，通过显示器和输出打印机等交互手段向学生提问，他们将自己的回答通过键盘等输入设备，进入计算机，经计算批阅并评出分数。

计算机辅助教学　计算机辅助教学现已广泛应用于数学教学之中。计算机辅助教学简称CAI。它是模拟教师的教学行为，协助或代替教师进行教学活动。教学活动本质上是教师和学生之间的信息交流过程。在这个过程中，属于教师的功能是：处理信息；呈现信息；判别学生的反应；评价教学效果；反馈信息。利用计算机教学就是试图利用电子计算机来实现教师的上述功能。因为计算机具有信息输入、输出、存储和逻辑判断等功能，所以计算机可以模拟教师的教学行为。

利用计算机教学，始终是围绕着计算机与学生的一系列“对话”而展开的，其对话过程是：

（1）选择课目　在计算机辅助教学系统中储存着许多课目的课件，学生可以根据个人兴趣爱好或教师指定课目，计算机就会立即从课件库中将所需课目的教学程序调入内存储器中运行，并在屏幕上显示出来。

（2）计算机呈现材料　计算机所呈现的一小段教学材料，可用文字、图形及声音等信息形式表现其内容。

（3）计算机提供教学信息　学生开动脑筋，力图记忆和理解教学内容。

（4）计算机提问　提问形式多种多样，目的是为了测定学生对所学内容的掌握程度。

（5）学生反应　就是学生通过思考、判断，对计算机所提问题作出反应，通常是学生在键盘上输入个人的回答。

（6）计算机评价与反馈　计算机接受学生应答，判断正误，提出反馈信息。反馈信息包括问题的结果，对学生的赞尝、批评和鼓励等。

（7）学生注意反馈信息　学生对自己回答问题的结果非常关注，计算机提供的反馈信息可以帮助学生弄清什么是正确的，什么是错误的，以及错误的原因。

（8）计算机作教学决策　计算机完成上述教学步骤后，它根据某种教学策略决定下一步的教学行动。一般有下列选择：第一，继续呈现新材料；第二，呈现同样或类似的材料进行复习；第三，提供更详细的材料进行补习；第四，提供一个小测验，检查是否达到目标；第五，为学生开列一些有关的学习材料。如图书、幻灯、录像片等。

利用计算机辅助教学，在小学和初中阶段常用以下几种方法：第一，操作与练习。目的是使学生通过大量练习，达到巩固知识，形成解决问题的技能，不是向学生传授新知识。进行模式是由计算机呈现一系列难度渐增的习题，要求学生在计算机上即时答出，计算机立即给出反馈信息，告诉学生他的回答是否正确，或给予适当评价，或给予正确答案。第二，个别指导。进行模式是模拟个别化教学情景。即用计算机扮演教师的角色，通过计算机与个别学生一系列“对话”而展开的教学活动。教学过程被划分为一系列循序渐进的小步子，每一个步骤上计算机向学生呈现一小段新的教学信息，包括课文阐述、图形及图表以及例子。然后，计算机向学生提问，学生在计算机上立即作答，若回答正确，计算机便呈现下一步学习材料，否则，计算机将提供适当的帮助，包括提供暗示、解说、正确回答和补习材料。第三，教学游戏。这是利用计算机产生一种富有竞争性的学习环境，把科学性、趣味性和教益性溶于一体。多数游戏是为了锻炼学生的决策能力而设计的。因为一个游戏过程涉及到多个步骤，每个步骤又有多种选择，这就迫使学生尽可能运用所学知识，寻找战胜对方的策略。游戏的另一方是计算机扮演，有些游戏被设计成有多人参加，还有些游戏被设计成与操作有关，以使学生快速回想知识，巩固记忆。

认知能力　顺利地完成认识活动的必要条件，是影响学习的另一重要的内部因素。认知能力是在学习过程中发展起来的，反过来它又影响着知识的学习。由于学科的性质不同，影响各门学科的学习的认知能力也各有其特点。数学认知能力是指影响数学学习

的认知能力，它主要包括观察能力、抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力、记忆能力、语言能力等。

引导发现法　这种教学方法是上海师范学院附属中学等校在实验基础上总结出来的。它是教师根据教材的结构特点及学生的思想、知识、能力水平，将教材划分为一个一个的发现过程，然后遵循学生的认识规律和文化知识的固有特点，引导学生阅读、观察、实验、思考、讨论、听讲等各种途径主动地研究问题，总结规律，以达到获得知识、发展能力、促进全面发展的目的。运用引导发现法的全过程，是引导与发现两个矛盾着的双方不断相互作用，直到达到统一的过程。教师引导，学生发现，教师引导的深，学生发现的深。

引导发现法的一般运用过程是：首先划分发现过程，确定教学要求；其次严密组织教学、积极引导学生的发现活动；最后努力创设一个有利于学生进行发现学习的情境。

运用引导发现法教学能够实现教师主导作用与学生自觉性、积极性的统一，理论与实践的统一，教学与发展的统一。

巴班斯基教学原则体系　巴班斯基教学过程最优化理论的重要组成部分。整个体系由十条原则组成：①教学旨在综合解决教养、共产主义教育和发展任务的目的性原则；②教学的科学性、教学与生活、与共产主义建设实际联系的原则；③教学的系统性和连贯性原则；④可接受性原则；⑤激发学生积极的学习态度，形成他们的认识兴趣和对知识的需要原则；⑥在教师领导作用下，学生在教学中的自觉性、积极性和独立性原则；⑦口述法、直观法和实践法、复现法和探究法，以及其他教学方法方式最优结合的原则；⑧为教学创造必要条件的原则；⑨教养成果、教育成果以及其他教学成果的巩固性和效用性原则。这个体系是巴班斯基根据自己对教学规律的研究提出的。见教学规律。他认为遵循这些原则可以保证全面提高教学过程的效率和质量。

巴班斯基教学方法最优化　巴班斯基教学过程最优化理论的组成部分。包括巴班斯基教学方法分类体系；该体系内各类方法效果的比较分析；包括优选标准，优选程序在内的教学方法的优选。主要内容见下列的四个表：

表1 教学方法体系

第一类				第二类		第三类		
组织和实施学习认识活动的方法				刺激和形成学习动机的方法		教学中的检查事自我检查的方法		
第一小类	第二小类	第三小类	第四小类	第一小类	第二小类	第一小类	第二小类	第三小类
知觉方法（按照传递和接受知识信息的方式）	逻辑方法（按照传递和接受知识信息的逻辑）	认识方法（按照学生掌握知识时思维独立性的程度）	控制学习的方法（按照控制学习活动的程度）	刺激学习兴趣的方法	刺激学习责任感的方法	口述检查法	书面检查法	实际操作检查法
口述法： 讲述法 谈话法 讲演法 直观法： 图示法 演示法 实际操作法： 试验 练习 教学生产劳动	归纳法 和 演绎法 分析法和综合法等	复现法 探索法 局部探索法 研究法	教师指导（包括使用教学机器）下的学习方法 学生独立工作的方法： 使用书本 书面作业 实验室作业 完成劳动任务	认识性游戏学习讨论 设置道德情感体验的情景 设置引人入胜的情景 设置统觉情景（依靠生活经验） 设置认识新颖性情景	认识学习的重要性 提出要求 布置完成要求的练习 教学中的表扬与批评	个别提问 面向全班的提问 口头测验 口试 程序性提问	书面检查性作业 书面测验 书面考试 程序性书面作业	实验室检查作业 机器检查作业

表 2 各类教学方法的职能

方法类别	组织和实施学习认识活动的方法	刺激和形成学习认识活动动机的方法	对学习认识活动进行检查和自我检查的方法
基本职能	对学生的感知、合乎逻辑地领会学习信息、独立探索及获得新知识的认识活动进行组织。（即：知觉、逻辑、认识和控制职能）	刺激和形成动机的职能；调节的职能；交际职能（建立良好的交往、正面榜样的影响）。	检查—评价职能（在教学过程中进行检查与自我检查）。
兼顾职能	刺激和形成动机的职能；检查—调节织能。	组织—认识职能；检查—调节职能。	组织—认识职能；刺激和形成动机的职能；调节职能。
共同职能	教养、教育、发展职能		

表 3 各种教学方法的适用条件

教学方法的利用条件	口述法	直观法	实际操作法	复现法	探索法	归纳法	演绎法	独立工作的方法
1.最适宜解决的任务	形成理论的和实际的知识。	发展观察力，提高学生对所学问题的注意。	发展实际操作技能和技巧。	形成知识、技能和技巧。	发展思维的独立性，形成研究性的技能和创造性态度。	发展概括能力和进行归纳推理的能力（从特殊到一般）。	发展进行演绎推理的能力（从一般到特殊）和分析现象的能力。	发展学习活动中的独立性，形成学习技巧。

（续表）

教学方法的利用条件	口述法	直观法	实际操作法	复现法	探索法	归纳法	演绎法	独立工作的方法
2.最适宜解决的教材内容	教材以理论性为主。	教材内容可以直观形式表达。	课题的内容包括实际练习、进行试验及完成劳动任务。	内容过于复杂或过分简单。	教材内容具有中等程度的复杂性。	在教科书中，课题内容按归纳形式叙述。	在教科书中，课题内容按演绎形式叙述。	教材适合于独立研究。
3.相应的学生特点	学生具有掌握文字形式的知识信息和准备。	学生能够接受直观教具。	学生具有完成实际操作方面的作业的准备。	学生不具有以问题性方式学习该课题的准备。	学生能够以问题性方式学习该课题。	学生能够进行归纳推理，而进行演绎推理则有困难。	学生具有进行演绎推理的准备。	学生已做好独立学习课题的准备。
4.利用该方法时，教师应该具备的可能性	教师掌握这一方法胜于其他方法。	教师具备必要的直观教具或能够独立制作直观教具。	教师具备组织实际操作练习的物质材料和教学资料。	教师没有时间以问题性方式组织该课题的学习。	教师有时间以问题方式组织该课题的学习，而且很好地掌握探索性教学方法。	教师能较好地掌握归纳教学法。	教师能较好地掌握演绎教学法。	具备在课堂上组织学生独立工作的教学材料和时间。

表4　　教学方法优选程序

问　题	回答		教师的选择
	能，如果	不能，如果	
1.能否以学生独立工作法组织课题学习？	内容相当简单；学生已作好独立学习课题的准备；课上有时间让学生独立学习教材。	材料复杂；学生没有充分作好钻研教科书的准备；为课题学习所规定的时间不够用来进行独立学习。	选择教师指导下的工作法或学生独立学习工作法（这里指的是对新教材完全独立的研究，而不是课的进程中局部的独立工作）。
2.能否以探索法组织该课题的学习？	教材具有中等难度；学生作好准备，在解决问题情景的过程中独立地增长知识；在学习该题时，有用于问题性推理的时间。	教材很复杂；教材很简单；学生不具备解决问题性情景的足够知识；该课进程没有足够的时间用于问题性推理。	选择探索法或复现法学习该课题。
3.能否以演绎法组织该课题的学习？	课本中教材内容是以演绎方式陈述的；学生作好用演绎法学习课题的准备；教材叙述逻辑的变化不会造成学生实质困难，不会在家庭作业上化费过多的时间。	课本中教材内容是以归纳方式提供的，若加以改变会给学生造成实质困难；学生没有作好以演绎法掌握该课题的准备。	选择演绎法或归纳法学习该课题。
4.能否在课上口述法、直观法和实际操作法结合起来（这种结合是有利于教学的）？	课题的内容特点许可这样做；教师拥有教学物质手段或能够自己制作；教师有时间应用直观性、实验、实际作业等。	课题内容不许可这样做；没有直观教具或实际练习，也不能自己制作、收集；教师没有足够的时间应用直观性、演示实验等。	选择口述法、直观法和实际操作法的可能结合形式。

（续表）

问题	回答		教师的选择
	能，如果	不能，如果	
5.课上将应用哪些刺激学生积极性的方法（认识游戏、学习讨论等）？			教师的选择取决于教材内容和班级学生学习态度的特点。
6.在巩固教材时，为检查新教材的掌握程度，将应用哪些检查和自我检查的方法？			选择那些能充分考虑所学内容的特点、学生的可能性及教师所具备的时间的那些教学方法。

巴班斯基教学过程最优化方法系统 巴班斯基教学过程最优化的基本方法，也就是既能提高教学效果，又能节省时间和精力的那些做法，这里说的不是最优化的个别办法，而是整套办法。这套办法涉及教学过程的所有基本成分：任务、内容、方法、手段、组织形式和对教学效果的分析。有教师活动方面的，也包括学生活动方面的。所有这些办法相互联系起来，就

教学过程最优化

教学过程的成份	教授最优化的办法	学习最优化的办法
1.教学任务	1.（1）综合拟定教养、教育和发展的最重要任务。 （2）在研究学生实际学习可能性基础上把教学任务具体化。	1.（1）接受任务并力争在自己的活动中实现这些任务。 （2）考虑自己的可能，拟定《自己的任务》作为补充。
2.教学内容	2.分出教学内容中主要的、本质的东西，努力保证学生掌握这些东西。	2.把注意力集中到主要的东西上去，努力掌握最本质的东西。
3.教学方法和手段	3.选择能最有效地解决相应任务的组织学习、刺激学习和检查学习的方法和手段。	3.在学习中合理地自我组织、自我砥砺、自我检查。
4.教学形式	4.选择全班的、全组的和个别的教学形式的最合理结合，进行有区别的教学。	4.尽量发挥自己的长处，力求克服自己的短处。
5.教学速度	5.选择最合理的教学速度，利用节省校内外和家里学习时间的专门措施	5.合理使用学习时间，力求加快自己的学习速度。
6.分析教学结果	6.判明教学效果同学生的实际可能性和师生的时间消费标准是否相适应。力求提高最优化水平。	6.对学习效果进行自我分析，把学习效果和自己的可能性作一番比较，评价使用时间的合理性，力求提高学习效率和消费时间的合理性。

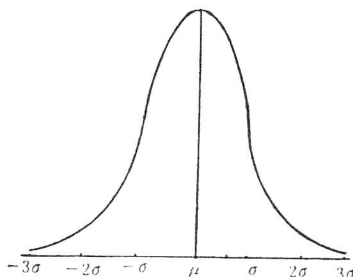
可以做到教学过程最优化。概括起来，可以用下面的表来说明。该表是巴班斯基给出的。

以高速度进行教学的原则　赞科夫实验教学论原则之一。赞科夫认为这一原则对高难度原则来说是在完成一种辅助的职能，但是同时它也起着重要的独立作用，它要求不断地向前运动。不断地以各个方面的内容丰富学生的智慧，能为学生越来越深入地理解所学的知识创造有利条件，因为这些知识被纳入到一个广泛展开的体系中。以高速度前进，绝不意味着在课堂上匆匆忙忙，赶快把尽量多的知识教给学生。匆忙从事和多次单调的重复同样都是不能接受的。以高速度进行教学，就有可能揭示所学知识的各个方面，加深这些知识并能把它们联系起来。因为某一学科的每一片段都作为一个附属成分，跟其他成分发生有机的联系。真正认知每个部分，总是随着对课程的其他后续部分的掌握，随着对相应的整体部分的理解，而在不断进行之中。因此，这一原则与其说是具有量的特征，毋宁说主要是具有质的特征。

以高难度进行教学的原则　赞科夫教学原则体系中起决定作用的一条。赞科夫指出，"难度"这个概念，在教学论中使用于各种不同的场合，具有各种不同的含义。这个概念的涵义之一，是指克服障碍。这个概念的另一个涵义，是指学生的努力。以高难度进行教学的原则的特征，并不在于提高某种抽象的"平均难度标准"，而是首先在于展开儿童的精神力量，使这种力量有活动的余地，并给予引导。如果教材和教学方法使得学生面前没有出现应当克服的障碍，那么儿童的发展就会萎靡无力。以高难度进行教学，能引起学生在掌握教材时产生一些特殊的心理活动过程。这里所发生的就不仅仅是对现有知识的增加和它们的联合，重要的是知识的系统化，这种系统化的结构是复杂的。困难的程度要靠掌握难度的分寸来调节。难度的分寸绝不是要降低难度，而是合理地运用这一原则的必要因素。具体地说，这就是提供的教材必须是学生能够理解的。否则，儿童由于不能理解所提供的教材，就会不由自主地走上机械记忆的道路。高难度反而从一种正面的因素变成反面的因素。难度的分寸具体体现在教学大纲、教科书、教学法指示和教学方式里，它在日常教学工作中还取决于教师留意儿童掌握知识和技巧的过程和结果。检查掌握的结果，主要的并不在于用分数对知识和技巧给以数量的评定，而是要有区别地尽可能准确地判定该班学生掌握的质量和特点，使难度分寸的具体化能针对全班学生的情况，以及针对个别学生的情况，能按照掌握教材的个人特点，以高难度进行教学的原则也决定着教学内容的结构，因此教材不仅应当更加广泛和深入，而且要具有质的特点。由于这条原则与另一条要求理论知识在教学中起主导作用的原则有不可分割的联系，难度性质的轮廓就更清楚了，这里指的不是任意的一种难度，而是要能认识现象的相互依赖性及其内在的本质联系的那种难度。

正态分布　数据次数分布的主要形态

之一，又称常态分布。它是一种连续分布，是建立在无限数目的事物总体基础上的假设的"理想化"的分布。正态分布曲线的图形如下：



正态分布有如下特点：①由曲线的最高点作底边的垂线，将图形分成左右完全对称的两部分。②平均数（μ）把曲线分为两部分，两侧面积相等，各相当距离上曲线的高度也相等，各相当距离间面积也相等。③曲线呈钟形，大量数据集中于中心，越向左右两端次数分布越少，即形成中央最高，两端逐渐下降的情况，曲线向左右两端无限延伸，但并不与底线相交。④正态分布有多种形式，随其平均数（μ）与标准差（σ）的不同而变化。平均数不同，表明曲线在横轴上所处的位置不同；标准差不同，表明曲线在横轴上的差度不同。标准差大，曲线宽而低；标准差小，曲线窄而高。在数学上描述正态分布曲线的一般方程是

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}。$$

式中，y为次数，N为观测的数目，σ为分布的标准差，x为测量对平均数之差（$x-\mu$）。

布尔巴基学派　又称结构主义学派，它是本世纪三十年代以后开始形成的一个数学学派。布尔巴基并无其人，只是一个假名。实际上它是这一派人物著书立说时共同采用的一笔名。这一学派的主张所以称为结构主义，是因为他们认为数学各分支应按结构性质来划分，应用公理方法按结构观点来重新整理各个数学分支。他们希望全部数学或大部分数学都能纳入各种结构系统中去。结构的概念可作如下理解：一个抽象的集合不过是一组元素而已，无所谓结构。但引进了运算或变换，就形成了结构。结构中必须包含着元素间的关系，这些关系通常是由运算或变换联系的。

布尔巴基学派将数学结构分为三大类：

（1）代数结构　由离散性对象加运算构成的结构系统，如群、环、域、代数系统、范畴、线性空间等。

（2）序结构　如半序集、全序集、良序集等。

（3）拓朴结构　如拓朴空间、紧致集、列紧空间、连通集、连续性及完备性空间等。

上述三种结构叫做母结构，由此可导出各种子结构，还可有各种交叉，形成"分支结构"。

确实，数学的各分支可以按照它们的结构性质加以区别和归类，所以布尔巴基学派的基本观点是正确的，他们试图把大部分数学都纳入各种结构系统中去，并通过比较使得各分支的内在联系与区别展示出一幅清晰的

图景，这对于全面整理数学来说，无疑是十分合理的作法。但是这一派的方法论，专注重于数学形式结构特征的分析与比较，可以说是一种关于已经形成了的数学部门的回顾性的逻辑分析，而不是展望和探索新领域的方法。因此，结构主义的基本思想方法看来并不是一种发明创造的方法。

结构主义的观点反映在数学教学领域，曾经导致六十年代的新数运动。按照新数的教学观点，就是要给学生一开始就讲授最一般的数学结构系统，于是象集合论与抽象代数乃至数理逻辑就成为必要的基础工具。但毕竟由于缺乏生动的直观背景，违反一般人的正常的认识过程，所以新数在数学教学中的失败，乃是理所当然之事！当然也有极少数的早熟儿童或非常杰出的青少年能从新数中得到好处，但那只是极个别的例外。

布鲁纳发现法　这种教学方法也叫做“发现学习”（Discovery, learning），是美国心理学家布鲁纳和其他一些学者在60年代积极提倡的种启发式的教学法，引起世界各国的重视。这种教学方法不是把知识（或结论）由教师直接了当地传授给学生，而是借助教师和教科书向学生提出一系列精心设计的问题或作业，使学生阅读、观察、实验、解题等过程中，亲自去“发现”数学的概念、定理和解题方法等，使学生成为知识结构的“构造主义者”。英国的“中学数学设计”（简称S·M·P）和美国的“学校数学研究小组”（简称S·M·S·G），还根据发现法的精神编写了数学课本，这种课本中没有正式的数学结论，而是由一系列的问题。故事等材料组成的。

这种教学方法在我国中学数学教育界也极为重视，各省市也均进行了规模不同实验。1982年9月山东省在烟台市召开了“发现法教学研讨会”，举行了观摩教学，受到与会代表的好评。之后，发现法教学在山东省中学数学教学中又进一步得到实验、推广。

布鲁纳课程论　又称以知识结构为中心的课程论。是五十年代末以美国布鲁纳为代表提出的。主要内容有三个方面：

（1）注重学习各门学科的基本结构　学科中的基本结构就是这门学科的基本概念和原理。布鲁纳论证说，无论哪一门学科，也无论它有多么难，总是可以通过把它归结成一系列基本概念的途径，找出压缩它的范围的方法来的。只要找到了这样的结构，就能使学生比较容易地弄清楚这个领域的情况，并且弄懂他们所学的零星知识在哪里、怎样及为什么构成一个所要求的整体。知识的结构、知识的联系和结果构成教育的主要内容。从这些原理出发，布鲁纳提出了下面的四条原则，并认为这些原则在按照学科的基本结构而组织的教学中是可以实现的：①掌握基本概念能使所学的整个学科更容易接受；②某一个别的事实在没有与结构发生联系之前会很快被遗忘；③掌握基本概念能保证训练的充分迁移；④必须通过经常地反复地学习中小学里所学的基本材料，帮助学生缩小“基础”知识与“高级”知识之间的脱节。

（2）强调基础学科的早期学习 布鲁纳从这样一个原理出发：如果把一门学科的基本思想和基本原则转化成儿童能够利用的“看见现象的方法”，那么对任何一个儿童在任何发展阶段上都可以以足够完满的形式讲述任何一门学科。提出这样一个思想：一些基本概念和基本原则应放在教育的低级阶段来学习。而要实现学生在以后各阶段的发展，就不必再引进对学生是新的概念和原则，而是把这些出发性的原则运用到更复杂的材料上去就可以了。这样一来，就有必要采用“螺旋式”：学校在早期就向学生讲授科学的基本概念，以后再一次又一次地在更高更复杂的水平上重新回顾这些基本概念。

（3）提倡广泛使用“发现法” 在掌握学科的基本结构的同时，也要掌握研习这一学科的基本态度或方法。这里，一个重要的因素在布鲁纳看来是关于发现的态度或方法。布鲁纳认为，发现方法就是一种学习的方法，通常称做发现学习，并无高深莫测之意。发现不限于寻求人类尚未知晓的事物，确切地说，它包括用自己的头脑亲自获得知识的一切方法。布鲁纳认为发现法的效果是：能较好地培养学生提出问题、解决问题的能力，提高智慧的潜力。由于是学生亲自参与了发现事物关系和规律的过程，因而有助于提高学生内部动机的作用。能使学生学会发现的试探法，形成迁移能力。可以有助于对知识的理解和记忆。

布鲁纳教学原则体系 美国心理学家布鲁纳认为教学论至少包含下述四个课题。第一，教学论必须探明唤起学习积极性的最佳经验与情境。第二，教学论必须探明达到最优理解的知识结构化的问题。第三，教学论必须探明显示教材的最优程序的问题。第四，教学论必须探明教学过程中采用的赏罚的性质及过渡的问题。据此，他引申出相应的四条教学原则：

（1）动机原则 布鲁纳指出，学习或是问题解决是从多样的可能性中选取最好的一种的探究活动，教学必须对活动的激发、活动的维持和活动的方向性等方面起促进和调节作用。激发探究活动的主要条件须安排好问题情境，使课题具有最适度的不确定性，便于引起学生的好奇心、求知欲。千篇一律、陈旧呆板的教学，必将抑制学生的探究意愿。探究活动维持下去的条件，在于“取得的好处应胜过所招致的危险”。即在教学过程的控制下，正确选择的探究活动所取得的好处大于错误选择所造成的后果。为使探究活动有正确的方向，必须使人明了工作目标，并提供一定的知识。

（2）结构原则 知识结构是指概念、原理、法则等基本规律性的知识。掌握学科的基本结构有助于领会知识的整体，容易记忆，有助于广泛的迁移，缩小“基础”知识与“高级”知识之间的差距，提高学习效率。布鲁纳认为，任何知识结构都可以按照学习者最易于掌握的简单形式表出来。这里他又分为三个原则：①知识结构呈现的适当原则，指选择再现表象的形式。或用适于达到某种结果的一组行动表示（表演式再现表象）

或用一组简略的意象或图解表示（肖象式再现表现）或用一组符号表示（象征式再现表象）。采用何种方式要根据学生发展阶段学科特点。②教材组织的经济原则。用简化概括的方法，如把知识作出摘要或列出一览表。③结构的有效力量。知识组织的方式，其效力与它具有的创造价值有关。

（3）程序原则　教学中的程序是指学生学习某种知识时，所遇到的材料的序列。它影响着学生熟练掌握知识时会碰到的困难。教师应引导学生通过一系列的学习活动，有效地提高他们对所学事物的掌握、转换和迁移的能力。最理想的序列是与学生原有基础、智力发展阶段材料性质和个性差异等因素有关。对理想序列的评定要以最后的学习效果为准则。这一准则包括学习速度、抵制遗忘的作用、已有知识迁移到新情境的可能性、按习得知识而即将显示出来的再现表象的形式、要求知识经济、有效等。教师要全面考虑认真分析。确定材料程序无论从具体问题开始，还是从理论概念开始，都应根据学生发展阶段和知识水平。

（4）强化原则　使学生在学习和解决问题的过程中，知道自己的学习结果。只有经常进行检查，及时发现问题予以矫正，才能加深理解，使其不断强化和巩固。教学要给反馈矫正规定出更适当的时间、步调。因为强化效应取决于在什么时间、什么场合、以什么方式进行学生才能接受、利用矫正性的信息、起到应有的作用。所以教师要机敏地抓住学生将其实验结果与他谋求获得的结果进行比较的这个时刻。布鲁纳指出，在结束某一部分的学习时，对于学习的成果有两种不同的对应方式。一种是通过赏罚加以外部强化的方式。另一种是内部省察成败与否的方式，即从对于现实的不充分的知识状态进展为令人期望的知识状态上，是成功了还是失败了？在计算、推理、构成等等的学习中，缩短了多大的未知与已知之间的差距？——尽量使学习者自身去领悟这种成功的程度，回顾自己的成败得失，获得如何改进的信息。内部省察远比外部强化优越。随着学习者的成长，逐渐降低外部报偿具有的作用，调节内外报偿的适当的时间配置，是必要的。为了实现外部报偿的递减，使学习者不断省察自己的学习结果，使之具有正确的认识是必须的。

布卢姆认知领域教学目标分类体系

在使教学目标明确化和系统化方面，著名美国心理学家和教育学家布卢姆提出的认知领域里可划分为“知识”、“领会”、“运用”、“分析”、“综合”、“评价”六级学习水平及十五个亚级水平的分类体系，为观察、分析教学过程并进而进行教学测量、评价提供了有价值的理论框架。布卢姆认知领域教学目标分类体系的总的思路是：把过去在描述上过于抽象，笼统的心智方面的教学目标，具体化为学生外显的行为，这些行为是能够观察的，并且是可以用行为动词进行描述的，而行为又可按由简单到复杂、由低层次到高层次加以编排。也就是说，把教学目标分类必须涉及的

能力问题，归结到学生可见、可测、可操纵的学习活动中去解决。由这个总思路决定布卢姆教学目标分类体系具有以下三个特点：①科学性。体现在把认知领域分解为知识、能力两个范畴，并以能力因素参与的多少，把学生学习行为由低到高地进行纵向分类，从而为能力的培养和考察提供一个较明确的层次和标准，而且有明显的递增性和包容性，达到系列化和相当精细的程度。②可行性。体现在各级分类是以学生的学习行为，即以学生的学习活动和结果来界定，是行为目标，便于理解和落实。③可测性。体现在制定的目标都是可测量的，并且目标分类的精细程度与目前教育测量的可测程度是相匹配的。正是由于上述的总思路和特点，吸引许多教研及教学人员进行编制学科教学目标的尝试。

布卢姆把认知领域的教学目标分为六级水平，从低到高的顺序依次为：

（1）知识（识记） 这里所讲的知识是指：对具体事物和普遍原理的回忆，对方法和过程的回忆，或者对一种模式，结构或框架的回忆。这种回忆仅仅是将原来的材料再现，尽管允许再现时对材料有一些变动，但必须是相对来说是无关紧要的部分，知识的目标十分强调记忆的心理过程，因而知识层次的学习水平也是一种能力——记忆能力，不过这是最低水平的学习能力。国内许多研究人员把这一层次的学习目标称着“记忆”或“识记”。这一层次的学习又可细分为三个亚级层次。

①具体的知识。

②处理具体事物的方法的知识。

③学科领域中普遍原理和抽象概念的知识。

该层次描述学习目标的行为动词有：

描述、回忆、定义、复述、识别、命名、列表、标记、写出、说出、认出、测量、复制等。

（2）领会（理解） 领会是最低层次的理解。它指这样一种理解或领悟：个人不必把某种材料与其它材料联系起来，也不必弄清它的充分含义，便知道这某种材料说的是什么意思，并能在交流中应用它。这一层次的学习又可分为三个亚级层次：

①转化 把一种语言形式转化成另一种语言形式。

②解释 解释或阐明意义。

③推断 将材料的意义延伸至材料之外。

该层次描述学习目标的行为动词有：

了解、理解、领悟、说明、制订、画出、解释、翻译、判断、推论等。

（3）应用 应用是指在某些特定和具体的环境里使用抽象概念。这些抽象概念可以是一般的观念。程序的规则或一般化的方法，也可以是那些必须记住的和能够运用的原理，现象和理论。知识和理解这两个较低水平的学习是应用的先决条件。在某种意义上说，应用还应包含创造的因素，因为应用往往涉及到如何才能把特定的知识运用于无特定解决方案的新情境里。因此应用知识的能力（技能）

构成学校学习的大部分基础，并与教育的某些基本目标密切相关。

该层次描述学习目标的行为动词有：

应用、演示、使用、操作、计算、制作、编制、推断（证）等。

（4）分析　分析是把整体分解成各个组成要素或组成部分，以便弄清各种观念的有关层次、或者弄清所表达的各种观念之间的关系。这是一种推理和思维的过程。这些分析旨在澄清交流的内容，说明交流的内容是怎样组织的，指出设法传递交流内容的效果、根据和排列的方法。这一层次的学习又可细分为三个亚级层次：

①要素分析　简单地列出某种交流所包括的各种条件要素。

②关系分析　确定交流内容中各种要素之间及联系的性质。

③组织原理的分析　识别有关现象或材料的组织结构、排列方式和构成原理。

该层次描述学习目标的行为动词有：

分析、识别、解析、分解、辨别、区别、探测、分类等。

（5）综合　综合是分析的对应物。它是指把各种要素或组成部分综合成一个整体。它是对各种片断、要素和组成部分等进行加工的过程，也是一个用这种方式对它们进行排列和组合以构成一种原先不那么清楚的模式或结构的过程。这一层次的学习又可分为三个亚层次：

①进行独特的交流　提供一种交流条件，使他人明白自己的意见。

②制定计划或操作步骤　制定一项工作计划或操作程序，以满足某项任务的要求。

③推导出一套抽象关系　确定一套抽象关系，用以对特定的材料或现象进行分类或解释，或者从一系列基本命题或符号表达中推导出新的命题和关系。

该层次描述学习目标的行为动词有：

组合、总结、摘要、概括、设计、派生、验证、实验、推导等。

（6）评价　评价是对材料和方法的价值作出判断，这种判断可以是定量的，也可以是定性的。为了进行这样的评价，需要某种尺度或准则作标准，这些标准可以是学生自己制定的，也可以是别人为他们制定的。这一层次的学习又可细分为二个亚级层次：

①依据内在的证据来判断，从逻辑性，一致性等内在证据评价一个材料的准确性。

②依据外部准则来判断　根据选定或回忆起来的准则，对某一材料进行评价。

该层次描述学习目标的行为动词有：

评价、估价、比较、评议、挑选、决定、证实等。

平均差　全部数据与其平均数离差的绝对值的平均数。用符号 $A\cdot D$ 或 $M\cdot D$ 表示。它反映了全部数据的变动情况，是较完善的一种差异量数。其计算公式区分为两种形式，对未归类数据计算平均差的公式为

$$A\cdot D=\frac{\Sigma|x|}{N}.$$

式中，$|x|$为各数据对平均数离差的绝对值，N为数据总个数。对已归类数据计算平均差的公式为

$$A\cdot D=\frac{\Sigma f|x|}{N}。$$

式中，f为各组的次数，$|x|$为各组中点值对平均数离差的绝对值，$N=\Sigma f$。由于平均差是采用差数的绝对值，不适用代数方法的运算，在应用上有其局限性。

平均数 又称算术平均数或均值。一种应用最广泛的集中量数。它是各观测值的总和除以观测值的个数所得的商。在统计学中常用μ表示总体的平均数，用$\overline{x}$表示样本的平均数。如果用变量x_1，x_2，…，x_n表示观测值，n代表观测值的个数，则有

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

$$=\frac{\Sigma x}{n}。$$

具体计算平均数时，可根据数据的不同特征，采用不同的简化计算方法。若一组数据的数目不多，并且又未归类，可直接利用上式计算平均数。若一组数据的数目很多，数据较大或位数较多，且未归类，用上式计算常感冗繁。可采用下列假设平均数的计算方法进行计算

$$\overline{x}=A+\frac{\Sigma x'}{N}。$$

这里A为假设平均数，$x'=x_i-A$，即各原始数据与假设平均数的离差，N为数据的总个数。这种计算方法，实质是一种"多退少补"的方法。如果数据已经归类，编制成次数分布表，则各组的数据均以各组的组中值（用x_c表示）为代表，其计算公式为

$$\overline{x}=\frac{\Sigma f x_c}{N}。$$

式中，f为各组的次数，$N=\Sigma f$为总次数。对归类数据计算平均数，如遇到相乘的数据位数多，数值大，会极感不便，并易出差错。可采用下列简化公式

$$\overline{x}=A+\frac{\Sigma f d}{N}\times i。$$

式中，A是假设平均数，f为各组次数，$d=\frac{x_c-A}{i}$，其中x_c为组中值，i为组距，N为总次数，$N=\Sigma f$。

归属学习 把新知识归属于原有认知结构的某一适当部位，并使之相互联系的过程。当原有知识结构中的有关观念在包摄和概括的水平上高于新学习的概念时，常进行这种学习。这种学习有两种不同的归属过程。

（1）派生归属。当新概念是已知概念的特例时，新概念可以从认识结构中原有的具有较高包摄性和概括性的概念中推出来的，使产生了派生归属学习，几何概念的掌握大多属于此类学习情形。派生归属的学习，由于原概念概括性高于新概念、派生意义容易接受、学习时省力省时。

（2）相关归属。新材料类属于原有的具有较高概括性的概念、但新材料意义的补充使原有概念得到扩展、精确和限制。在这种情况下，产

生相关归属学习。例如，在掌握正整数指数幂的概念的基础上学习有理数指数幂，便是一种相关归属学习。在中学代数中，凡是随着知识的拓广，认识不断深化的概念学习，多属于相关归属学习。比如，绝对值的概念，随着有理数系到实数系、实数系扩充到复数系而不断深化。

以上两种归属性学习的区别，是在原有概念的本质属性是否发生变化。在派生归属学习中，新知识纳入原有概念之中，原有概念得到充实。在相关归属学习中，每次新概念的学习都使原有概念得到拓广和深化。

目标参考性考试　参照某一个事先规定好的目标进行评分的考试。这种考试所评的分数不是相对的，它不考虑其他考生的情况，只把考试分数与规定的标准作比较。这种考试也可以说是一种资格考试。如汽车驾驶员领取驾驶执照的考试就是目标参照性考试。这种考试的得分不要求分布很广，它希望达标的人数越多越好。所以理想的成绩不呈正态分布，应是偏态分布，即绝大多数考生的成绩都集中在曲线的右侧——分数高的一侧。目标参考性考试的试题应能正确反映教学目标的要求，其数量性质应和所要测定的内容和范围一致，不应追求试题的难度和鉴别力。

四分差　用四分位数与中数的平均差距来表示数据离中趋势的一种差异量数，又叫四分位差，用符号Q表示。若用百分位数来说，四分差就是从P_{25}到P_{75}之间距离的一半，也就是指在次数分布中，中间50%的次数的一半。四分位数是指可以将整个次数分布划分为四个相等部分的三个点（即三个数值）。第一个点是在P_{25}的位置上，在其下有总次数的$\frac{1}{4}$，称为第一四分位数，用符号Q_1表示；第二个点是P_{50}，在其下占总次数的$\frac{2}{4}$，称为第二四分位数，亦即中数，用符号Q_2表示；第三个点是P_{75}，在其下占有总次数的$\frac{3}{4}$，称为第三四分位数，用符号Q_3表示。四分差的计算公式为

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}。$$

其中

$$Q_1=L_b+\frac{\frac{1}{4}N-F_b}{f_{Q1}}\cdot i。$$

$$Q_3=L_b+\frac{\frac{3}{4}N-F_b}{f_{Q3}}\cdot i。$$

式中，L_b为四分位数Q_1与Q_3所在组的精确下限，F_b为L_b以下各组次数的累加数，f_{Q1}、f_{Q3}分别为Q_1与Q_3所在组的次数。如下表说明计算四分位差的具体步骤。

组别	f	cf	计算方法
65—69	1	157	Q_1的位置：$\frac{N}{4}=\frac{157}{4}=39.25$
60—64	4	156	Q_3的位置：$\frac{3}{4}N=\frac{3\times 157}{4}=117.75$
55—59	6	152	$Q_1=24.5+\frac{39.25-27}{16}\times 5=28.32$
50—54	8	146	$Q_3=39.5+\frac{117.75-98}{24}\times 5=43.61$
45—49	16	138	$Q=\frac{43.61-28.32}{2}=7.64$
Q_3位置→40—44	24	122	
35—39	34	98	
30—34	21	64	
Q_1位置→25—29	16	43	
20—24	11	27	
15—19	9	16	
10—14	7	7	

$N=157$

他人评价法 指自我评价以外的任何个人或团体的评价，简称他评。中小学教育中的他人评价，主要有教育行政部门的评价、同行评价、社会评价三种方式。对办学水平的他人评价，主要是教育行政部门组织的视导评价。在一所学校里，学校领导对教师的评价，教师对教师的评价，社会舆论对学校的评价，学校之间的评价，教师对学生的评价等等，都是他人评价。他人评价比自我评价客观，要求比较严格。进行他人评价对于提高评价的结论的权威性有重要的作用。但进行他人评价的组织实施工作比较复杂，花费的人力财力较多。

主观性试题 可分为自由反应型试题和限制反应型试题两种。自由反应型试题，指考生在回答试题时，有相当的自由，如作文、论文式试题等。限制反应型试题，指考生在回答试题时，需受限制，在内容选择，回答问题的方式、方法上有某些限制，如问答题、计算题、论证题、联想题、操作题等。主观性试题能测量较高层次的认知目标，能鼓励考生组织所学过的材料，表述自己的观点。便于测试者了解考生的解题思路、观点、态度和文字表达能力等。试题编制比客观性试题容易。这类试题均凭经验命题，缺少予测环节，因而其难度、区分度、信度及效度很难把握标准。而且这类试题评分困难，多采用人工评分，在评分时无法排除主观因素的影响。因为评卷人员的水平、偏好、态度不一，都能造成评分误差。在一份试卷中，主观性试题的数量少，

在限定时间内，测量的内容不多，知识的覆盖率小，无法保证内容效度。

记忆　人们认识的事物或做过的事情在头脑中遗留的印迹的保持和再现。记忆一般分为三个过程：识记、保持、再现（或再认识）。识记是“记住”某些事物的过程，它是暂时联系痕迹的形成。“保持”是把识记的事物之间的关系或联系持久保存于脑中的过程，也就是暂时联系痕迹的巩固和加强。“再现”是对过去所识记、保持的事物重现的过程，也就是暂时联系痕迹的复活（再认也属暂时联系的复活，不过是过去所识记的事物的本身出现在眼前时所引起的暂时痕迹的复活。

记忆在学习过程中具有重要意义。学生的各种学习活动都是以记忆为基础的，如果一个学生边学边忘，那就什么也学不会，不能获得知识和技能。在教学过程中，要充分运用记忆规律，提高记忆效率。记忆的规律一般是：有识记要求比没有识记要求效果好；意义识记比机械识记效果好；形象识记比逻辑识记效果好；对照比较识记比单独识记效果好；系统识记比零碎识记效果好；识记与再现相结合比单独识记效果好；直接操作效果好；引导有趣比枯燥乏味的材料学习识记效果好。

记分法　通常指以文字或数字符号表示学习成绩的方法。我国常用的记分法有五级记分法和百分记分法。我国古代学校采用等级记分。汉代太学只分两个等级：及格和不及格。唐代中央各学及宋代太学三舍，都以“上”“中”“下”三个等级来评定成绩。后来，又有甲、乙、丙、丁四个等级记分法。建国后采用了“五分制记分法”，现多用“百分记分法”。在我国最早规定百分记分法的是1902年颁布的《钦定学堂章程》。记分容易产生分数观点，在学生中会出现争分数，为分数而学习的现象。当然，这主要是教育问题。同时，也要改进记分方法，提高分数的可靠性和有效性，全面反映学生在德、智、体、美诸方面的实际水平。

记忆型教学　又称记忆水平的教学。仅要求学生记住教学大纲，即要求机械识记所有材料。长期处在这种教学水平下的学生，只能是知识靠记忆，解题靠模仿，知识学习呈现表面化和形式化，心理定势在问题解决中起主要影响，难以超脱固有的习惯思维模式。

记忆学习和意义学习　记忆学习和意义学习是学习过程中的两种学习方法。

我国清代有位教育家陆桴亭说：“凡人有记性和悟性。自十五以前，物欲未染，知识未开，则多记性，少悟性，自十五以后，知识既开，物欲渐染，则多悟性，少记性。”用现代心理学的观点来说，这里的‘悟性’指的是思维，这里说的‘记性’指的就是‘记忆’。但是，他以15岁为年令界线，在这以前，认识活动主要是记忆，在这以后则主要是思维，这种划分显然是不科学的，是把思维和记忆对立起来的。

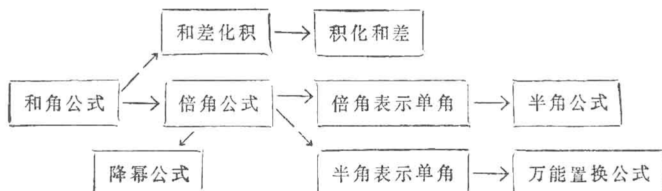
在学习过程中的记忆学习和意义学习是：如果识记的材料本身没有什

么意义，或者学习者不了解它的意义，那么只能依靠机械背诵来记住它，这就是记忆学习。如果在学习者理解材料的意义，运用有关的经验进行识记。这里所指材料的意义，是指的各种联系：如和客观现实的联系；和已有经验的联系；材料各部分之间的联系，等等。联系越多，意义内容就越丰富。对材料的意义理解越深刻，联系也就越多。在这样的学习过程中，思维活动就始终处于积极状态，这样的学习效果就会很好。这就是意义学习。据实验指出，意义学习比记忆学习效果能高8倍，也有的说高出20倍（这些数据的差异主要是各人所用的实验材料，实验情景不同的缘故所致）。

在学习过程中，要倡导意义学习，不能追求记忆学习。如果一味追求记忆学习，那么只能成为书呆子。我国宋代叶梦得讲过一个故事，他说：饶州这个地方，自从元丰末年一个名叫朱天赐的孩子，因“神童”闻名于世而得官以后，于是那里就流传了一个“饶州出神童”的俗话。众人都很羡慕，特别是那些“望子成龙”的家长，不管自己孩子情况如何，从五六岁起，就教他们挨次地背诵《五经》，并和教师约定，教会孩子背一经，尝钱多少。为了早日凑效，有些家长就让孩子坐进竹篮里，把孩子放进树枝堆里，使孩子除了看见经书，听见自己读经书的声音之外，接触不到其它刺激，只管死记硬背，孩子比坐牢还难受。这样培养出来的人，只会死背些经书外，什么也不懂，什么也不会，是个地道的背书匠。这种残苦的教育方法，今天当然不会多见，但指导学生死背硬背的学习方法，今天仍是屡见不鲜的。

俗话说：“欲要记得，先要懂得”。这句俗语，充分说明了在意义学习中进行积极的思维活动的重要性。这在心理学中已有无数实验证明了这一点。

在数学的学习中，意义学习更具有特殊地位，这是由数学学科特点决定的。因为数学公式、法则、定理等，都是根据一定的逻辑关系推导出来的，只有掌握了它们的来龙去脉，才能更好地理解它，牢固地掌握它。如果一旦忘记了也能再根据逻辑关系把它推导出来。例如，三角函数中的和、差、倍、半角公式及和差化积，积化和差等，公式繁多，但它们之间存在严密的逻辑关系，只要掌握了这种逻辑关系，便很容易记忆。它们之间的逻辑关系可用下表表示出来。



加权算术平均数　根据各观测数据所具有的相对重要程度，分别给予相应的权重，计算出的算术平均数。权重一般以百分比表示。每个观测数据应给予多大的权重，应尽可能按照客观标准来确定。加权算术平均数的计算公式为

$$\overline{X_W}=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}。$$

式中，$\overline{X_W}$为加权算术平均数，f为权重，x为观测数据。如，某学生的数学平时考试成绩为85分，期中考试成绩为75分，期末考试成绩为90分。依照平时成绩占30%，期中考试成绩占30%，期末考试成绩占40%分配权重，其加权平均成绩为

$$\frac{85\times0.30+75\times0.30+90\times0.40}{0.30+0.30+0.40}$$

$$=84（分）。$$

皮格马利翁效应　也称罗森塔尔效应。皮格马利翁是古希腊神话中的塞浦路斯国王的名字。这位国王爱上了自己的一座少女雕像，他热烈执着的恋情竟使这座少女雕像获得了生命。皮格马利翁效应得名于1968年出版的《教室里的皮格马利翁》一书。书中报告了罗伯特·罗森塔尔和勒诺·雅各布森的著名实验研究。1968年，这两位心理学家来到美国的一所小学，从1至6年级中各选三个班级，对18个班的学生“煞有介事”地作发展预测，然后以赞赏的口吻将“有优异发展可能”的学生名单通知有关教师。名单中的学生，有的在老师的意料之中，但有的却不然。对此，罗森塔尔也作过相应的解释：讲的是他们的发展，而不是现在的基础。并叮咛不要把名单外传。八个月后，他俩又来对这18个班进行复试。结果是：他们提供的名单里的学生成绩增长比其他同学快，并且在感情上显得活泼、开朗、求知欲旺盛，与老师的感情也特别深厚。原来，这是一项心理学实验。所提供的名单纯粹是随机的。他俩通过自己“权威性的谎言”，影响了教师对学生智力的期望。他们的实验表明，教师对学生智力的期望，在某些情况下会对学生的智力测验分数产生影响。期待成为现实。皮格马利翁效应一方面说明教师应该对学生要期待，并且应该让学生自己期待自己。另一方面在教育实验中，应使实验工作者尽量减少或避免对被试的期望暗示。

发展智力、培养能力六法　加强基础、发展智力，培养能力，是数学教学改革的方向。而发展智力，培养能力，一般归结为六法。

（1）教会学生分析、综合、抽象和概括　例如，椭圆的两轴把椭圆四等分，把每一份称作$\frac{1}{4}$椭圆。在一个长轴、短轴分别为$2a_0$、$2b_0$的$\frac{1}{4}$椭圆〔简记为（a_0，b_0），下同〕旁连结第二个$\frac{1}{4}$椭圆（a_1，b_1），使其长半轴与前者的短半轴重合，然后再连结第三个$\frac{1}{4}$椭圆（a_2，b_2），使其长半径与第二个$\frac{1}{4}$椭圆的短半径重

合，如此无限继续下去。设所有这些椭圆的长、短半轴之比都相同。求这样所得的图形当$n\to\infty$时的面积。

解此题看上去很难，但经分析可知，它是要求一个无穷数列的和，它可分析为如下几个基本题目：①写出每个$\frac{1}{4}$椭圆的面积；②把各个$\frac{1}{4}$椭圆的长、短半轴用a_0和比例常数k表示出来；③把面积和表示为一个无穷递缩等比数列和的形式；④求这个无穷递缩等比数列的和。显然，这四个题目是易解决的，再将四个题目的解答，进行综合、概括，原题便得到了解答。

（2）帮助学生克服思维定势，展开想象，广开思路　如学生常出现的$\sin(A+B)=\sin A+\sin B$，$\operatorname{tg}(A+B)=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$等，都是乘法分配律定势的负迁移造成的，需从加强数学概念教学，给予克服。

（3）引导学生广泛涉猎知识，激发学生学习兴趣。

（4）鼓励学生大胆质疑，质疑有误时，也不要责备。

（5）多指导学生做些有创造性的习题，培养学生勤于思考的习惯，如计算$1+2+\cdots+100=$？有的学生逐项相加，有的学生运用等差数列前n项公式计算，还有的学生则用101×50得到正确结果。显然，最后这种解法是具有创造性的。

（6）提倡学生解答问题“别出心裁”，不要一律模仿，要敢于创新。

对几何图形的认识与想象　学生学习几何首要的问题是，对几何图形的认识及想象，否则就无法进行几何的学习。为使学生对几何图形有正确的认识与想象，需要向学生提供典型而又多样的感性材料，使学生通过观察和实际操作（比、量、折、剪、拼、摆、测、画等）活动，获得丰富完整的感性材料知识，形成鲜明、深刻的印象。由于客观事物总是以一定的“形”作为表现形式，学生在系统学习几何学以前，就已通过途径积累了一定的有关几何图形的知识经验，这就为系统学习几何知识创造了有利条件。但学生经验的有限性，易受日常生活用语的干扰往往把握不住图形中的各个几何要素，所以在运用直观材料教学时，既要有标准图形、又要有各种变式图形、不断变化其非本质属性，使其本质属性恒在，以帮助学生概括出图形的基本特征。若完全采用标准图形，则难以使学生把握图形的本质属性，想象其所占有的空间形式。学生对几何图形的认识与想象，是结合量的关系进行的，这样就可以使数、形概念发生相互促进作用。

考试　学校考核学生学业成绩的制度。是检查学生学习情况和教学效果的重要方法之一。一般具有评价、诊断、反馈、选才的功能。根据学科特点和各年级的不同情况，一般采用口试、笔试、开卷考试、闭卷考试等形式。根据学校教学阶段，可分期中考期、期末考试、学年考试和毕业考试等。考试的安排、方式的选择和内容的设计，要遵循教育教学的客观规律，有利于促进学生的学习，有利于学生的身心

发展，有利于人才的培养和选拔。考试命题是考试的核心环节，教学大纲和教材是考试的依据，考试命题必须遵循教学大纲的目的要求。考试可以根据不同的标准进行分类。从用途上区分，考试可以有成绩考试、水平考试、学能考试、诊断性考试、形成性考试和终结性考试等；按其反映分数的方法来分，考试可以分为常模参考性考试和标准参考性考试；按考试的编制来源划分，考试可分为标准化考试和教师自编考试等。

考查 在教学过程中，为了随时了解学生的学习状况及教师的教学效果而采用的一种测量方法。考查能及时了解教学效果，发现教学上的漏洞，及时补救。考查能够全面地反映学生的学习效果，避免偶然性和片面性，能督促学生及时复习，养成认真学习的态度和习惯。考查的方法主要有：课堂提问，书面考试，检查家庭作业，日常观察等。一般要求，考查要进行评定，及时指出优缺点，要有具体分析。但对平时的提问、日常观察等，也不要求每次都给予评定。

考核课 以学生独立解答考题为主要内容的课称为考核课。其目的是检查学生掌握知识的情况，同时发现教学中存在的问题。考核课的结构较简单、上课开始，教师分发试题，必要时做些简要说明、然后由学生独立解答考题。

巩固性原则 巩固性原则是指在教学中，教师要引导学生在理解知识的基础上，牢固地持久地掌握所学的知识和技能的程度，以及在解决实际问题时及时、准确、无误地再现和应用程度。这是深化学习的重要基础。

学习知识、注意巩固，是古今中外宝贵的学习经验。教学中贯彻巩固性原则，主要是学生学习书本知识的特点决定的。书本知识是间接知识、学生在较短时间内集中学习大量的间接知识，难以学习新知识和运用知识，因而，必须使学生将学过的知识牢固的贮存在大脑中待用。

贯彻巩固性原则，必须做到：

（1）注意抓好教学过程中各个环节的高质量是学生对已学知识能够牢固掌握的前提。要抓好这个前提，一是教师要科学地组织课堂教学，使学生鲜明地感知材料；二是教师要讲清讲透教学内容，使学生学懂学会；三是及时地组织巩固新知识的教学、使学生能够进行充分的练习，等等。

（2）教师要善于发展和培养学生良好的记忆力，是促进学生牢固地掌握知识和顺利地运用知识的重要条件。对此，教师不仅要布置记忆的任务，而且要教给学生记忆的方法。良好的记忆方法是很多的。如明确记忆的目的；在理解基础上的记忆；了解自己记忆的特点，扬长避短，加强记忆；反复复习，不断强化；反复应用，多种感官协同活动；经常自我检查，感知与重现相结合；图表记忆和对比记忆，等等。

（3）科学地组织，指导学生的复习。巩固知识与技能，主要的是通过复习、练习实现的。在复习、练习中，教师要依据记忆的规律、及时将经常性的复习、练习和阶段性的总结性复习、练习结合起来。防止简单重

复和机械练习。实践证明，复习时每次都从新的角度使旧知识重现或掺入一些新成份，比简单的复习旧材料要有效得多。检查也是巩固知识、技能不可缺少的环节。要把全面系统的检查和重点检查，课内检查和课外检查，教师检查和学生自我检查，检查与评定结合起来，以检查促巩固。

过度学习 指学生的学习，在“记住”和“学会”的基础上，继续反复练习，以达牢固熟记的阶段的学习。关于过度学习的必要性，是教学实践所证明了的。任何一门学科的一些基本概念，基本原理或基础知识的学习，仅仅达到可能回忆的程度是不够的，必须反复练习，提高熟记的程度，熟记程度愈高，则保持愈好，遗忘愈少。学生对某些内容生疏，往往是教学中缺乏过度学习所致。但是，过度学习并不是要集中在一个时间进行简单的重复。研究表明，集中在一个时间内的较高重复次数其熟记数量并不总是递增，而是递减的。所以，过度学习应避免集中复习而采用分布复习为好。在方式方法上也应尽量避免机械重复而采用变式。在分布复习的次数分配上，要注意“先密后疏”的原则，即初次熟记后的复习间隔要短一些，时间多一些，以后可以把间隔时间逐渐加长，复习时间可以逐渐减少。

有序原理 系统由低级的结构转变为较高级的结构称之为有序，反之，称之为无序。例如，学习、记忆的过程是有序，而遗忘、生疏的过程是无序。我国学者查有梁认为任何非开放的系统，都不可能自发地从无序转变为有序，对物理系统是如此，对生物系统、社会系统也是如此，可以把它总结为一条基本原理，称为有序原理。表述为：任何系统只有开放，与外界有信息交换，才可能有序。查有梁认为这条原理对教育、教学有着重要的意义，例如，教学中，师生之间，学生之间开展交流，使每个学生的学习成为开放系统；鼓励学生独立思考，使大脑成为开放系统；教师和学生广泛阅读，参加各种学习活动，关心国内外教学动态，使教学系统成为开放系统。否则，难于有序、难于进步，难于创造。近年来，这条原理对数学教学有一定的影响，有许多数学教学工作者引用它。

百分位差 用百分位数之间的差距来描述离中趋势的差异量数。把数据按大小依次排列，再分成100等份，各份所在点（百分点）相对应的数值，就是百分位数。如，第15百分位数，就是在此点或此数以下，包括分布中全部数据的百分之15，其符号为P_{15}。用百分位数的差距作为差异量数，通常有两种：①从P_{10}到P_{90}或从P_7到P_{93}间的差距，前者包括中间80%的观测数据，后者包括86%的观测数据。②四分位差。即从P_{25}到$P75$间的差距的半数。百分位数的计算公式如下：

$$P_p = L_b + \frac{\frac{P}{100}N - F_b}{f} \times i。$$

式中，P_p为所求的第p个百分位数，L_b为百分位数所在组的精确下限，

f为百分位数所在组的次数，F_b为小于L_b的各组次数之和，N为总次数，i为组距。如下表为应用上述公式计算百分位数的具体步骤。

组别	f	累积次数	计算方法
65—69	1	157	求百分位数：P_7，P_{10}，P_{90}，P_{93}。
60—64	4	156	$157\times 7\% = 10.99$
55—59	6	152	$157\times 10\% = 15.70$
50—54	8	146	$157\times 90\% = 141.30$
45—49	16	138	$157\times 93\% = 146.01$
40—44	24	122	$P_7 = 14.5+\frac{10.99-7}{9}\times 5 = 16.72$
35—39	34	98	
30—34	21	64	$P_{10} = 14.5+\frac{15.70-7}{9}\times 5 = 19.33$
25—29	16	43	$P_{90} = 49.5+\frac{141.30-138}{8}\times 5 = 51.56$
20—24	11	27	
15—19	9	16	$P_{93} = 54.5+\frac{146.01-146}{9}\times 5 = 54.51$
10—14	7	7	
	$N = 157$		

确定了百分位数，就可以计算百分位差了。仍以上表为例。

$$P_{93}-P_7 = 54.51-16.72 = 37.79,$$

$$P_{90}-P_{10} = 51.56-19.33 = 32.23。$$

百分等级　一个已知数值在全部数据中所占的百分位置，即与百分位数相对应的百分点，以符号PR表示。如，一个学生的数学成绩是80分，在全年级学生的分数中的百分等级是95，即表示80分以下的有95%的学生，只有5%的学生分数在80分以上，也就是说，80分是第95百分位数。百分等级属于顺序变量，是一个相对地位量数。在按分数高低顺序排列的情况下，它可以表示任何一个分数在该团体中的相对地位。对任何一个给定的分数，要转化为百分等级，其计算公式为

$$PR=\left[\frac{f(X-L_b)}{i}+F_b\right]\cdot\frac{100}{N}。$$

式中，X为已知数值，f为x所在组的次数，L_b为x值所在组的精确下限，i为组距，F_b为小于L_b的各组次数的和，N为数据的总个数。如计算下表中72分、95分的百分等级：

组限	f	累加次数
90——100	7	100
80——90	25	93
70——80	32	68
60——70	20	36
50——60	11	16
40——50	3	5
30——40	2	2

计算步骤：①编制次数分布表，登记次数及累加次数。②确定x值所在值。72分在70——80组内；95分在90——100组内。③确定f、L_b、F_b的值。72分、95分的f值分别为32、7；L_b的值分别为69.5、89.5；F_b的值分别为36、93。④代入公式计算。

$$P_{72}=\left[\frac{32\times(72-69.5)}{10}+36\right]\times\frac{100}{100}=44.$$

$$P_{95}=\left[\frac{7\times(95-89.5)}{10}+93\right]\times\frac{100}{100}=96.85.$$

百分记分法 用0——100的数字为符号表示学生学业成绩的方法。通常以60分为及格，不满60分为不及格。百分记分法是目前我国各类学校各学科考试或竞赛，以及各级各类招生、招工考试所普遍采用的记分方法。

成绩考试 也称成就考试。用来测量学生在一段时间内，对所学知识掌握情况的考试。是一种检查学习结果的考试，其中包括以某一学科为对象的学科成绩考试，如数学考试，物理考试、语文考试……，也有综合性的成绩考试，如理科成绩考试。这类考试必须呼应过去的教学，命题不能离开教学内容。学校中的期中、期末考试，学年考试，毕业考试等都属于成绩考试。

因果选择题 选择题的一种题型。这类题目中每个问题都由结果（或判断）、原因（或条件）两部分组成，结果句在前，原因句在后。回答问题是要求从五个有固定含义的字母A、B、C、D、E中选择一个字母。各字母的含义是：A. 结果和原因的叙述都正确，并且能用原因正确地解释结果（或两者密切相关）；B. 结果和原因的叙述都正确，但不能用原因正确地解释结果（或两者无关）；C. 结果的叙述正确，但对原因的叙述不正确；D. 结果的叙述不正确，但对原因的叙述是正确的；E. 结果

和原因的叙述都不正确。例如，“函数 $y=3\sin^2x+4\cos^2x$ 不是周期函数。因为这个函数的周期求不出来”。答案应选E。

先行组织者 美国心理学家奥苏伯尔使用的一个概念。是指在学习新的教材之前，用学生能懂的语言介绍的引导性材料。它比正式的学习材料更具有一般性和概括性。它对正式教材的学习具有稳定、保持或明晰同类概念之间的差异的职能。

先行组织者大体分为两种。其一，“说明组织者”。是学习内容对学生来说是生疏的、新异的时候使用的。“说明组织者”必须赋予有效的概念结构——这种概念结构可以全面的洞察它同新的学习内容之间的关联作用。其二，“比较组织者”——把新的概念同处在认知结构中的类似概念综合起来；或者相反，两者在本质上不同时，明确它们之间的差异以不致混淆。

传统教育与现代教育 关于现代教育和传统教育的界说，尚无统一的意见。一般认为，它们是在西方近现代教学论中，形成的两个主要派别。“传统教育”，不是指封建的传统教育而言，而是指从夸美纽斯以来以赫尔巴特为代表的资产阶级的传统教育思想。当代的要素主义、永恒主义等都属于“传统教育”派，亦称“新传统教育”。“现代教育”也不是指当前讲的现代化教育，而是指以杜威为代表的所谓“进步教育”或实用主义教育流派而言。当代的改造主义也属于这一派。“传统教育”和“现代教育”在一些主要问题上，有着不同的主张。首先，在教学论的指导思想上，就存在着不同的主张。赫尔巴特把教学过程分为明瞭、联想、系统、方法四个阶段。而后由他的后继者齐勒尔和赖因扩充为五个教学步骤，即：①预备：唤起有关的旧概念，以引起对新知识的兴趣；②提示：讲授新教材；③联想：对新旧知识进行分析比较，使之建立联系；④总括：得出结论、定或法则；⑤应用：运用所学的知识解答问题，进行练习。赫尔巴特“传统教育”派所规定的教学过程的阶段，显然是根据传授知识的需要而提出的。而以杜威为代表的现代教育”派把教学过程分为情境（或暗示）、问题、假设、推理、验证五个步骤。即首先给学生提供一个困难的情境、也就是进行暗示；进一步通过观察分析，研究困难的性质和问题所在，提出解决困难和问题的设想、建议，或暂时作一些尝试性的解答；根据这些假设进行推理，以求得解决问题的方法、最后进行验证，以检查全过程达到的结果是否符合预期的目的。杜威的五步法显然是从发挥学生的主动性和探索精神为出发点的，但不利于学生学习系统的知识。在课程、教材的问题上，一般的说，“传统教育”派主张分科教学，“现代教育”派主张综合课程。也就是说，“传统教育”派主张根据各科的逻辑系统编写教材，实行分科教学；而“现代教育”派则主张从心理系统出发，根据儿童的兴趣组织活动。前者以教材为中心，后者以活动为中心。前者重视人类的间接经验，后者则重视个人的直接经验。在教学组织形式

上，“传统教育”派主张集体教学，以课堂为中心，采用以教师的系统讲授为主的方法，实行强制性的纪律。而“现代教育”派则主张自由活动，从经验中学习，反对外部纪律。反对从上面的灌输。在师生的作用和地位问题上，“传统教育”派主张，教学必须以教师为主，甚至否定学生在教学过程中的主动性和独立性，强调教师的“权威”作用，使学生处于顺从的地位。“现代教育”派则主张教学必须以儿童为中心，教学应从儿童的兴趣、要求出发，教师要围着学生转，以表现个性、培养个性。在我国，虽然接受近代教育思想较晚，但从废科举，兴学校起，用的就是赫尔巴特的主张。在旧中国虽然实用主义教育思想也曾发生过一些影响，但基本上还是“传统教育”。解放后，凯洛夫《教育学》对我国影响很深。凯洛夫的教育学，把马列主义认识论引进教学论，这是它的一大贡献。它从马列主义认识论出发，肯定了学生掌握知识的过程是一个认识过程，指出“学生掌握知识和人类在其历史发展中认识世界的过程具有共同之点”，因而教学过程必须以科学的认识论为指导，进行组织和安排，从而将教学过程中学习的认识划分为感知教材、理解教材、巩固知识、运用知识等阶段。并进一步强调指出：“教学不是，也不可能是与科学的认识过程完全一致的过程”。因为学生在教学过程中是在教师的领导下，掌握书本知识、也就是掌握前人所已发现，并根据教学原则进行系统整理出来的书本知识。学生、特别是中小学生，主要的任务是学习和掌握这些已发现的真理，“并不负有发现新的真理的任务”。因此，它严格区分了学生学习知识的认识过程与科学家发现这些知识的认识过程的不同点。这些主张是符合马克思所说的关于知识再生产的理论的，其中有合理的因素。但是，它对于教学过程中阶段的划分存有简单化的问题，没有体现出学生学习间接经验的特点，更反映不出理论思维起指导作用的特点，它对教学任务的规定，表面上看来似乎很全面，但从其思想实质来说，对智力发展的问题，并未放在一个突出的地位上，有自然发展的思想倾向。在师生关系上，它强调教师在教学中的主导作用，甚至不恰当的夸大。在对教学方法和教学组织形式的安排上，虽然提出了一整套理论体系，但其理论根据都是如何学好书本知识，因此，凯洛夫的教学论仍然属于“传统教育”的范畴。

传授知识与发展能力 数学教学过程，既是向学生传授系统科学知识的过程，又是发展学生能力的过程。知识和能力是辩证统一的，既有联系，又有区别，二者是相互依存，互相影响的。

数学能力是众说纷云，看法不一的。根据我国颁发的全日制中学《数学教学大纲》规定，数学能力是指“运算能力”、“逻辑思维能力”和“空间想象力”三种能力。1988年国家教育委员会颁发的九年制义务教育全日制初级中学《数学教学大纲（初审稿）》规定，数学能力是指“进一步培养运算能力，发展逻辑思维能力

和空间观念”，这三种能力只是有程度的限制。

发展能力，就数学学科来说，就是发展数学能力。“发展”是通过数学教学来实现的。

知识和能力是相辅相成的，二者之间具有如下关系。

（1）掌握知识是发展能力的基础　学生对知识的积累是发展能力的基本条件。如要发展学生的逻辑思维能力，就要使学生具有一定的数学知识。知识对于发展学生的能力有着潜在价值。知识一经学生掌握，就会对能力的发展起相应的作用。学生对知识理解越深刻，掌握越牢固，越有利于能力的发展。“无知则无能”是有道理的。可见，能力的发展水平与知识储存的多少、深浅、完善程度有密切的关系。

（2）能力发展是获得知识的重要条件　学生认识能力的发展水平，制约着对知识的掌握，学生掌握数学概念的水平，与其数学抽象思维能力的发展水平密切相关。学生自学能力的强弱直接影响着学生猎取知识的效率和效果。知识和能力是不同的，知识是头脑中的经验系统，能力是获取经验的心理发展水平。掌握数学知识和发展数学能力并不是完全同步的，可能会出现“剪刀差”。例如学生学习了某一数学定理等，但不一定能马上会运用这个定理解决有关问题，就是知识和发展能力一种不同步的表现。

在数学教学中，传授知识与发展能力是具有辩证关系的。因此，教师的教学应注意以下几点：①要使学生的能力得以发展，教师要以丰富的系统科学知识武装学生，引导学生在实践中善于观察分析，获取丰富的感性知识，扩大知识视野，帮助学生深刻理解和掌握规律性知识。②要改革教学内容、教学方法以及教学结构等。因为能力的发展，是学好知识的重要条件，所以，教师应充分挖掘和利用学生的潜在力。为此，教师要能勇于冲破陈腐的传统教学思想的束缚，舍弃那些有碍学生能力发展的做法，大胆改革，勇于创新。③学生的能力不是在获取知识的同时，自发地发展起来的。学生能力的发展，是教师在抓好“双基”教学的同时，有意识地、有计划地培养发展起来的。教学中要克服“剪刀差”现象，真正达到使学生既长知识，又长智慧，增才干。

传授知识与发展智力相统一原则　教学中，既认真抓好基础知识、基本技能的教学，又要切实使学生智力得到良好发展，使两者统一起来。

传授知识与发展智力相统一原则，一是根据教学过程中，传授知识与发展智力的辩证关系提出来的。学生掌握知识与发展智力，虽有相互促进作用，但又不是同步的。因此，这一原则是在既要发挥学习知识对智力发展的积极作用，又要克服二者之间的“剪刀差”。二是为适应现代科学技术迅速发展的客观需要制订的。因为发展人的智力，培养能力，是当今科学技术日新月异时代的一项重要任务，所以对这原则不可忽视。三是在中外教育史上，一些教育家对学习知识和发展智力的关系问题，提出了许

多有益的见解，也积累了丰富的经验，这一原则也是对这些理论见解和经验的吸取，总结。

要在教学中贯彻好这一原则，必须做到以下几点。

（1）教师要自觉地、积极地传授知识与发展智力统一起来，要做到这一点，教师首先解决思想认识问题：一要克服传统教学思想的影响从“仓库”理论，教学就是单纯注入知识的束缚下解放出来；二是克服“自发论”。学生掌握了知识未必然发展了智力，二者不一定同时增长。要使学生在掌握知识的基础上，发展智力，需要教师有意识、有目的，有计划地训练和培养学生。实验表明，教师是否有意识、有计划、有目的的通过教学发展学生智力，对学生智力发展速度、水平有着重大影响。因此，教师应树立教学传授科学知识既是目的，也是手段的思想。有人说：“眼睛盯在能力上，功夫下在双基上”是很好的经验概括。

（2）认真搞好科学知识的教学、这是智力发展的基础。不同结构的知识对学生智力发展的作用也是不同的。俄国大教育家乌申斯基曾说过：智慧不是别的，而是组织得很好的知识体系。因此，要促进学生智力的发展，不仅要向学生传授一定数量的科学知识，而且确保知识的质量，科学性和系统性，提高理论知识在教学内容中的主导地位、寻求知识的最佳结构。

（3）抓好各个教学环节，顺利完成各阶段的教学任务。要使教学促进学生智力的发展，需赖于整个教学过程的高质量和教学各个环节对学生智力发展的不同影响。虽然，教学各个环节对学生智力发展的侧重点不同，但它是整个教学过程高质量不可分割的部分。例如，感知教材阶段，有利于发展学生的观察力；理解教材阶段、突出的促进学生思维能力的发展。等等。要实现教学过程的高质量、关键是实现教学过程的积极化。如果没有学生自身的积极性没有经过自我头脑的紧张的智力活动、掌握知识与发展智力是不可能同步增长的。

（4）充分发挥教学方法对发展学生智力的作用。教学方法对发展学生智力是有影响的，不同的教学方法，对学生智力的发展有不同的作用。因此，灵活选择和运用教学方法，发挥它的整体功能，才能对学生智力的发展产生积极的有力的促进作用。

自我评价 指评价对象根据评价指标系统，对自己所作的价值判断的过程，简称自评。自我评价是评价中不可缺少的重要环节。对一个教师来说，对于教育和教学上作的自我检查，就是自我评价的过程。对于一个学校来说，领导班子对学校工作做的总结，或领导班子组织教师和学生对学校工作进行总结，都是自我评价。自我评价是一个自我教育的过程，它有利于自己发现问题，主动改进，自我完善，能调动自身的积极性。自我评价是他人评价的基础。自评主要有两种方式：一是自我总结汇报（口头的或书面的）。被评价者根据考核要求，对照自己的工作成绩、业务能力

和工作态度等各方面进行实事求是的总结汇报。二是填写考核调查登记表。考核调查登记表有空端式和问卷式两种。空端式，自己按栏目逐项回答问题；问卷式，即对予定的几组调查条款，选择一项与自己相符的条目，打上“✓”的肯定记号，或与自己情况不相符的条目，打上“×”的否定记号。

自学辅导教导法 这种教学法是中国科学院心理研究所在总结“程序教学法”的基础上提出来的，它教学的全过程是：第一步，通过思想动员，使学生肯自学；第二步，教会阅读，使学生能自学；第三步，加强指导，培养学生会自学；第四步，着重启发，促使学生爱自学。在自学过程方面，采取适当步子，先小后大，逐步促进自学能力的提高。在做练习的过程中，使学生按计划对答案，知道正误，及时“反馈”，起到强化或纠正作用。与这种教学方法配套的中学数学教材是中国科学院心理研究所卢仲衡主编的《自学辅导中学数学》课本，这套教材的每一册均分为三个本子，即自学课本、练习本和测验本，所以这种教学法也曾被称为过“三个本子教学法”。这种教学法自1980年起，先在7个省市23个班进行实验，1982年扩展到22个省市100多个班实验，至1989年在全国发展到5000多个实验班。与这种教学法相配套的《自学辅导中学数学》教材，于1985年获中国科学院科技成果二等奖。

自学辅导教学实验的教学原则 自学辅导教学实验的教材，是中国科学院心理研究所卢仲衡等人从1965年开始根据人民教育出版社课本，并贯彻九条有效的学习心理学原则和吸取了我国优秀教师的教学经验首次编写出来的。利用这种教材进行学习的形式，由著名心理学家潘菽定名为自学辅导教学，即是说这种教学形式是在教师的指导、辅导下以学生自学为主来进行的。作为一种新教学形式的自学辅导教学实验所遵循的教学原则，卢仲衡等人提出了七条，分述如下。

（1）寓有效学习心理学原则于教材之中的原则 即指编写教材的九条心理学原则：适当步子的原则，当时知道结果的原则，铺垫原则，直接揭露本质特征原则，从展开到压缩原则，变式复习原则，按步思维原则，可逆性联想原则，步步有根据原则。

（2）教师指导下学生自学为主的原则 教师的指导、辅导下学生以自学为主的教学方式，是把“教”与“学”统一起来的可行的途径。在教学中，学是主体，教是为了学。中学生以自学为主进行学习是可能的，也符合中学时期学生的心理特点。但自学辅导教学必须要有教师的积极正确的指导，绝不是无师自通。这正是自学辅导教学区别于程序教学、个别化教学、成人自学的主要特点之一。

（3）强动机原则 学习动机是直接推动学生学习活动的内部动力，是任何学习活动不可缺少的东西，特是对于自学更为重要。因为没有它，学生可以坐着既不看也不做，这样就可能比传统教学还要差些，传统教学干坐着有时还会听到老师所讲的某些部分。所以在自学中，老师要先激发

学生的学习动机，培养他们的兴趣，也包含有长期的学习目的性教育。

（4）班集体与个别化相结合的原则　班集体与个别化是一对矛盾，要做到二者的结合，只有采用自学辅导教学的形式。自学辅导教学保存了班集体，刚上课时或快下课前由老师进行集体的指导，课时中间让学生进行自学、老师进行个别辅导，即可做到班定步调和自定步调相结合。在强调统一进度、统一要求、统一措施来保证学生的共性发展，体现人格上的平等的同时，也要充分注意优中差各类学生和不同思维类型的学生在学习能力上的个别差异。用不同的要求、不同的措施做到快者快学，慢者慢学，不同类型的学生都得到相应的发展。在强调自学中的独立阅读，独立思考，独立钻研，独立解决问题的同时，也不要忽视在此基础上的善于求师、互帮互学。

（5）启、读、练、知相结合的原则　这条原则的目的是以启、读、练、知来把以“授”为主变为以“学”为主。启，就是启发引导；读，就是阅读课文；练，就是做练习；知，就是当时知道结果，即及时反馈，及时强化。每堂课在启读练知相结合的情况下，以视觉为主，听觉次之，手脑并用，主动学习，学生不觉得疲倦，注意力始终比较集中，感到时间过的很快，学习效率是较高的。启读练知相结合的教学不仅打破了传统的满堂灌、注入式的教学方式方法，而且从单纯灌输知识技能转变为着重培养独立审题能力，独立思维能力和独立操作能力，即着重培养自学能力。在贯彻启读练知相结合的原则时，教师的启导要有利于学生自学，在一般情况下，开始上课或下课前约有10分钟左右由教师统一的提示、提问、答疑、小结等。在课时中间让学生专心自学，尽量做到不打断他们。

（6）自检和他检相结合的原则　这条原则指的是对学习效果的检查，不要只是由教师进行，学生对自己的学习好坏靠教师的检查（即他人的检查）才知道。应该培养学生自我检查的能力。开始，教师的检查比重大一些，要有意识地培养学生自检的能力和自检的习惯，随着学生自检能力的增加，他检的比重要变小。

（7）变式复习原则　这条原则是说，对于所学知识、技能的巩固，尽量少用机械重复，而多用变式复习。这不仅是编写教材的原则、教学的原则，也是检查的原则。学生做练习、自检，教师的提问、答疑等各个环节上都要认真贯彻，这样可以加速培养学生的自学能力，创造性思维能力，激发求知兴趣，调动学习积极性。

行为目标　用学生通过教学后应该表现出来的可见的行为来描述的教学目标。现代教学技术认为，教学的效能只有通过教学结果与教学目标的比较才能说明。因此，教学目标应该用学生学习成果的方式来描述，并且这种学习成果的方式必须是可以测量的。在教学效能鉴定中，笼统的目标是没有意义的。一般认为好的行为目标应包括三方面的内容：①确定可以作为

成绩的证据的行为；②确定行为的必要条件；③确定合格的标准。例如，"给受训者一个投影仪，一张透明片和一套彩笔，受训者应在十分钟之内根据指定的图表复制一张投影片。"就是符合上述三个条件的行为目标。

全面发展　马克思关于人的全面发展的本质涵义是，人的全面发展，从人的劳动能力来说是指的脑力劳动与体力劳动相结合，个人的体力和智力的充分统一的发展，把人们作为一定社会关系中的完整的社会人来考察，还包括人的思想品德和精神状态的发展。在一定意义上讲，人的全面发展是包括德智体几个方面的发展。对我国的中小学生来说，全面发展通常是指在德、智、体、美、劳诸方面的合谐发展。

合作教育学　苏联近几年兴起的一个教育学派的主张，其倡导者，主要是一些革新教师，代表人物有雷先科娃、沙塔洛夫、沃尔科夫、谢季宁、伊利英、阿莫纳什维利等人，他们根据多年的教学实验和革新经验，对现行教育学的弊端提出尖锐的批评，强烈要求进行改革。他们的教育思想及其丰硕的实验成果，在苏联同时也在世界上引起了广泛的、强烈的反响。所谓的"合作教育学"就是强调把教学、教育过程建立在师生合作这种新型关系上，合作是这一教育思想的总纲。"强调诱发孩子去学习，强调教师和学生的协同劳动"，"从教学方法中排除强制"，而是"把孩子吸引到经常的学习活动中去，激发他们因成功、进步、发展而享受到应有的乐趣"。"使儿童获得成功，并使其学会学习，不让他落伍或他发现自己正在落伍"。"从根本上改变学生观"。"合作教育学"主张的核心是社会主义人道主义和个性民主化。教育的社会主义人道主义，一般是指教师要热爱、尊重和信任儿童，把儿童当作具有不同个性的人对待，并使儿童彼此相爱、互相尊重，建立一个团结友爱的、温暖的集体。正如阿莫纳什维利所指出的：真正人道主义的教育学——就是能够把儿童吸引到造就他们的教育过程中去的教育学。这一精辟论断指明了教育的社会主义人道主义原则的本质。所谓个性民主化，包含许多具体的内涵，但核心是指个人的一切才能和精神力量的解放和发展。"合作教育学"强调个性的发展，但并不意味着放任自流和培养个人主义，而是使教育的社会主义人道主义与集体主义结合，统一起来，相辅相成，并认为只有在一个坚强的，团结友爱的、温暖的集体中，才能使每一个儿童的个性获得充分的自由发展的最大可能性。合作教育学派的革新家们在长期的实践中证明，只要师生之间实行了真正的合作，只要在合作中创造了目标明确，和衷共济的"智力背景"，高质量地完成教学、教育任务是完全行得通的。尽管他们不赞成用分数吓唬学生，从不向家长抱怨孩子，从不在课堂上谴责一个孩子，然而却收到了通过任何强制手段也无法取得的成果。合作教育学，把从前杰出的人道主义教育家们所设想的远景变成了现实。它以"合作"为总纲，改写了"教师中心"的教育理论；它以社会主义的

人道主义为指导思想，在没有压力，没有恐惧的条件下引导儿童实现自我要求，补充了“儿童中心论”者的不足。

合理的课堂教学结构 合理的课堂教学结构，是当前数学教育中普遍重视的问题之一。苏联学者认为，合理的课堂教学结构应包括以下内容:

（1）备课要同时备出一个选题（章节）所有的教案 否则无法判定每节课对于达到预定目标的地位和作用，以及这几节课的类型、相互联系与教学负荷。

（2）由教师确定讲授的主要内容，向学生通报这些内容及其综合动机，包括当堂掌握的主要的内容这一要求。

（3）科学地、形象地、富于感情的讲述新教材，使主要内容为学生所掌握，包括: ①利用所有的认知方式；②运用全部记忆形式；③一切都要经过周密的思考和体验。④检查学生掌握主要内容的情况。

众数 在数据中出现次数最多的数值，或在次数分布表中出现次数最多的那个组中值。以符号M_0表示。众数的求法有两种: ①用观察法求众数。若数据已归类，而组距为一单位时，则次数出现最多的数值，就是众数；若数据已归组，而组距为一个单位以上时，则以次数最多的一组的组中点值为众数。②用公式求众数。金氏（W•I•King）的插补法，其计算公式为

$$M_0 = L + \frac{f_b}{f_a + f_b} \times i。$$

式中，M_0为众数，L为众数组的精确下限，f_a为众数组下限相邻一组的次数，f_b为众数组上限相邻一组的次数，i为组距。皮尔逊(K•Pearson)的经验法，其计算公式为

$$M_0 = \overline{X} - 3(\overline{X} - Md_n)。$$

式中，M_0为众数，$\overline{X}$为平均数，Md_n为中数。

创造性教学 同发展和培养学生的创造性个性品质相适应的一种教学方式。它一般是以问题——探究——解决——评价等步骤作为自身的序列，强调使学生在对问题的独立解决过程中获得发展。创造性教学的提法并非标新立异。著名的美国教育心理学托伦斯早在60年代就提倡研究创造性教学。他把创造性教学看作是教师和学生卷入创造性学习过程，而创造性学习过程则具体表现为“敏锐地察觉到问题的存在、事物的缺陷、知识的空白、成分的残缺、关系的不协调；搜集有关的信息，查明难点所在，或验明残缺的成分，寻求解决问题的方法，做出猜测，或对缺陷提出假设，对这些假设进行检验、修改和复检，使其变得更加完善，最后将结果告之他人”。苏联的马赫穆托夫、列尔涅尔等人倡导问题教学，实际上和创造性教学的提法是名异质同。它的要点是“教师在学生的面前提出问题和认识的课题，而学生在教师直接参加的场合下或独立地探究着解决它的道路和方法。学生提出假设，拟定和讨论检验它们的正确性的方法，进行论证、观察，分析它们的结果，进行推论和证明。”

创造性教学符合教学规律并以一

定的教学规律为基础。主要表现为三个方面：

（1）创造性教学的重要特征，是在获得直接经验的过程中，培养学生的创造性心理素质，巩固和掌握间接经验。

（2）创造性教学以教学的发展性规律为依据　教学的发展性规律表明：教学能够促进学生的发展，教学与发展的统一是在一定的条件下实现的。根据维果茨基和赞科夫的理论和实践，对学生的发展产生积极影响的条件是：教学在略高于学生现有心理发展的水平上进行，不断设置认识矛盾，激发学生的内部动机，促使学生运用自己的智力、意志和情感去解决问题。创造性教学使这些条件得到进一步的具体化，并把它们整合在自己的序列中，形成了着眼于学生发展的创造性教学过程。

（3）创造性教学是以教师对学生的学习起主导作用的规律为依据的　创造性教学的实质，就是学生在教师的引导和帮助下经历创造性问题解决的过程。因此，它是较好体现教为主导，学为主体的一种教学方式。

多解选择题　选择题的一种题型。这种试题的特点是，在题干后面列出的用字母标明的备选答案中，正确答案不止一个。考生应将符合题意的答案全部指出。它不要求按一定方式组合再选字母回答。这类选择题与最佳选择题的差别仅在于正确答案的个数上。最佳选择题有且仅有一个备选答案是正确的，而多解选择题的正确备选答案可以不止一个。例如，“设 $M=\{x|x\leqslant 0\}$，则下列关系中正确的是（A）$0\subset M$；（B）$\{0\}\subset M$；（C）$\{0\}\subseteq M$；（D）$\phi\in M$。”答案是（B）、（C）。

次级资料　在原始资料的基础上，经过系统整理形成的资料，包括发表过或未发表过的现成资料。如学校中经过整理的各科考试成绩则属于次级资料。

次数分布　又叫次数分配。一般指一群数据经过分组或归类，每组（类）中含数据个数多少的分布情况。次数分布可以用次数分布表和次数分布图表现出来。次数分布可表明数据的结构情况，是统计资料整理的一种重要形式，也是一种统计分析方法。

次认知技能　亦称原认知技能。指的是对认识活动的自我调节和管理的技能，主要包括集中注意于外来信息，监控并评价自己的操作，计谋并计划攻破问题等方面的技能。这些技能对智力作业来说被证明是非常重要的，并且有证据说明这些技能是可以教给学生的，也是可以学会的。为了培养学生的次认知技能，专家建议：

（1）有效的运用策略和制定计划行家在解决问题时的特点不仅在于他的操作导致成功，而且还在于他的操作方法有效地运用了策略而且在操作之前就有了计划。

（2）对自己的知识和作业进行监控和评价　顺利地获得新知识有赖于起步时的已有知识。所以对于已有知识的鉴定是十分重要的。针对着一定任务的认知要求评定自己的能量和缺点，监控并估计自己的作业成绩并确定是否坚持努力，或改变策略，或暂时放弃，这些都是人们应该具备的有

技能。

（3）技能效用的认识 一个儿童不能保持一种新获得的行为，原因之一就是他没有认识到这种行为的价值。这就是说他可能没有意识到这种行为会改善他的作业。所以，应该不仅教给学生怎样做某件事，还要教他为什么做这件事。

次数分布表 把一群数据的分组或归类以及各组（类）中包含的数据个数用表格的形式反映出来的方法。把观测到的全部大小不同的数据，先划分出等距离的组距（区间），然后将数据列入各相当的组内，即可出现一个有规律的表，这种表称为次数分布表。次数分布表有简单次数分布表、相对次数分布表、累积次数分布表、累积相对次数分布表等。各种次数分布表的制作方法大同小异，一般地编制步骤如下：①求全距。全部数据中最大数值与最小数值间的距离称为全距。用公式表示为

全距＝最大值－最小值。

②决定组距与组数。组距是指每一组数据的间距，即每组包含的测量单位数，用i表示。组距一经确定，组数亦可随之而确定。全距除以组距，即得组数。组数的多少，应决定于数据的多少和资料的性质。组数过多过少都有缺点。一般如果数据个数在100以上，可分为10—20组，常取12—16组。③写出组限。组限就是表明每组界限的两个数值。其中每组的起点数值称为下限，终点数值称为上限。表格中组限的表示方法有多种多样。④归类划记，登记各组次数。完成上述步骤即可制表。

次数分布图 统计图中的一种，它是和次数分布表相对应，根据一定的次数分布表制成的。利用次数分布图，可以形象地看到次数分布的情况，各组的次数是多少，分布是否对称，是峻峭，还是低平，等等。次数分布图一般用于连续性数据的资料。最常见的次数分布图有两种，即次数直方图与次数多边图。

闭卷考试 不准学生查阅课本、笔记或其它参考书、工具书，要求学生在规定的时间内，完成试卷要求，当场交卷的一种考试形式。大多用于检查学生的学业成就。

问题教学 苏联教育界比较一致的看法，就是使教学带有问题性。这种教学主要是通过三种方式来实现：其一是带着问题讲授教材，这是主要的方式；其二是学生的部分探索活动；其三是学生的独立研究工作。

所谓带着问题讲授教材，就是在课堂教学中创设一种问题情景。创设问题情景可有两种方法。一种是科学性的，主要涉及讲授的内容，即利用教材来创设问题情景，从学科本身出发，把学生引入目前或过去存在的科学问题中；另一种是方法论的，主要涉及讲授的方法，即从教学法的角度，在讲课时加强教材的问题性，通过提问突出教材的重点，从而把学生注意力吸引到问题的某个方面，促使学生开展思维活动。

问题教学法 这种教学方法是启发式教学方法的一种，是辽宁抚顺二中于1981年12月提出的。它是用一系列问题，让学生自己动脑去分析、探索，

在探索过程中进行研究和领悟，达到掌握知识，培养能力的目的。其教学的全过程是：第一步，启发设问，引起学生产生要认识未知问题的心理要求；第二步，分析矛盾，分析已知与未知之间，新和旧知识之间、现象与本质之间的矛盾，把未知转化为已知；第三步，揭示规律，教给学生从联想中进行类比和对比的方法，从分析中进行试探的方法，从归纳中进行猜想的方法，从一般到特殊的演绎论证方法等。

问题情境测验　对被试者提出一个课本教材中所没有的，课堂上教师也未曾讲过的，某种新情况下的问题，令被试者自行解决，从而考察其分析问题和解决问题的能力。因此，问题情境测验也称解决问题能力测验。这种测验的试题，不可能凭借单纯记忆和过去学习的经验解决它。要解决问题，必须运用自己已有的知识、技能，通过分析、综合、判断、推理、假设证明等一系列的思考探索，最后才能获得答案。因此，问题情境测验过程的实质就是演绎、归纳的思考过程和理解应用知识的过程。但这种测验的命题较难。

问题是数学的心脏　《美国数学月刊》主编P·R·Halmos 的一个著名论点。自希尔伯特在1900年巴黎国际数学家代表大会上作了《数学问题》的著名演讲以来，问题在数学研究中的重要性已经得到公认。诚如希尔伯特所说："某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求着确定目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志，发现新方法，产生新观点，达到更为广阔和自由的境界。" P·R·Halmos 的论述更为一针见血。他说，数学究竟是由什么组成的？公理、定理、证明、概念、定义、理论、公式、方法吗？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在。但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏。数学的真正组成部分是问题和解。数学家存在的主要理由就是解问题。他希望作为教师在讲堂上，在讨论班上，在书和论文里应越来越多地强调它们，同时，把我们的学生训练成比我们更好的问题提出者和解答者。这种观点，影响很大。如果说美国60年代的口号是"新数学"，70年代的口号是"回到基础"，那么，80年代的口号就是"问题解决"。解题教学成了美国当前数学教学的新动向。

并列结合学习　当新概念与认识结构中已有概念不能产生从属关系时，它们在意义学习中可能产生联合意义，这种学习称为并列结合学习。在这种学习中、新概念与整体的有关认知内容有潜在的吻合之处，因而，能与认知结构中有关内容联系起来。在学习中，并列结合学习常常发生于新旧概念有结构相似性的情况。例如，由于分式与分数集合对于加、乘运算都构成域，具有结构相似性、因此，在已有的分数运算的基础上，学习分式

概念及其运算，实属并列结合学习。又如，在掌握向量运算的基础上，学习复数运算，也是一种并列结合学习。在并列结合学习中，新概念虽不能类属于原有概念体系，也不能概括原有概念，但它们之间具有某些共同的关键特征，这些关键特征有时是潜在的隐含的，这就给并列结合学习带来困难。反复进行并列结合学习，可使所有学得的概念体系之间建立横向联系，达到综合贯通的效果。

安慰剂效应　在药学研究中，安慰剂指的是无药效，仅仅产生心理作用的制剂。在心理学实验和教育实验中，许多研究表明，如果一组被试受到了某种特殊的注意而控制组却没有在同时得到相应的注意，那么实验组的某些行为反应就难以都用实验变量的效果来解释。这有如，一个病人在接受一种药物处理后报告了病情的好转，其实这种“药”并没有治疗效果，是病人的心理在起作用。国外已经有若干研究文献报告了教育研究中利用安慰剂控制心理因素的情况。在实验组和控制组对比实验中，对控制组进行“安慰剂处理”，以便使全体被试的心理情境趋于相同。例如，在数学教育中开展一项新的改革实验，研究者可以在控制组的教室也相应地开展一项新的音乐欣赏实验。音乐教学一般很难影响控制组的数学成绩，但能使控制组在安慰剂效应上与实验组有关心理因素保持平衡，因为看起来两个教室都在试行新的教学改革。安慰剂效应有助于对比实验设计中控制心理无关变量的实现。

讲授法　一种教学方法。这种方法是指通过教师口语描绘、叙述、分析、讲解、论证、向学生系统连贯地传授文化科学知识、思想观点和发展学生的能力。在小学和初中阶段的数学教学中、常采用讲述、讲解和讲读三种方法。

（1）讲述。侧重采用生动形象的语言叙述事实材料或描绘所讲对象。在叙述某一事物的形态特征和发生发展过程或人物传记材料时常采用讲述法。由于在小学和初中的学生上课注意力不够集中，思维波段很短，想问题形象性占居主导地位，所以，对他们教学运用讲述法会收到较佳效果。

（2）讲解。侧重于对一些较复杂的问题、概念、定理、公式和原则，以及事物之间的内在联系，产生的前因后果等进行较系统的解释和论证。此法常用于小学自然课和中学理科教学尤其是常用于数学教学中。运用中常将讲述和讲解两者结合起来、常会收到满意的教学效果。

（3）讲读。它是通过教师和学生双方的讲解教材和诵读教材传授文化科学知识的。它是由一系列复杂的教学活动构成的。如在数学教学中运用的讲、读、练、议形式、就是讲读法的一种形式。

在教学中运用讲授法的基本要求是：

①将讲授内容的科学性与思想性、系统性和趣味性，理论和实际结合起来。做到讲授条理清楚，层次分明，重点突出，既有生动事例又有科学结论。

②贯彻启发式教学思想、努力启发学生思考，吸引学生注意力，帮助学生学习教材。

③充分发挥教师教学语言的直观、生动、做到声、情、动作协调，符合学生的接受水平。

④板书规范，简明扼要，安排协调美观，充分发挥板书的教育作用。

⑤培养学生的听课能力，能抓住讲授的线索，记下讲授的要点。

运用讲授法教学的优点是：①能使学生在短时间内，获得大量的系统知识。②能利于教师向学生进行思想教育。③能充分发挥教师的主导作用。

但是，这种教学方法也有一定的局限性，教学中如果不注意调动学生的积极性，将易变为"满堂灌"、"填鸭式"教学。

论述题　给出论题，让考生自己组织材料，寻求论据进行论证的试题。属主观性试题。论述题主要测量学生的组织能力、分析综合能力、逻辑推理能力和文字表达能力，有时还可测量学生的评价能力和创造能力。考生根据题目要求，用自己的语言回答问题，在答案的取材，组织论点的广度、深度、重点和评价上都有较大的自由，可以充分运用所学的知识，按照一定的逻辑体系，纵横联系地阐述自己的见解或创见。解答论述题不会出现猜测或简单的背诵现象。由于考生的回答比较自由，答卷可以体现自己的思想、观点和态度等，这对于测试者全面了解考生具有重要的参考价值。但这类试题评分不客观，易受主观或客观因素的影响，而且试题取样缺乏代表性，阅卷计分都比较费时费力，误差较大。

论文答辩　考核本科生和研究生的实际学术水平与独立研究能力，保证学生质量的重要环节。目的是对本科生的毕业论文（设计），研究生的学位论文做出科学的评价。论文答辩时，首先由论文（设计）的撰写人向答辩委员会扼要地报告论文主要论点、论据和结论；然后，由答辩委员会委员提出问题，再由论文（设计）撰写人进行答辩。最后在答辩委员会主任主持下，委员们对论文（设计）进行评论，并由委员会对论文（设计）的学术水平做出评语。

论文式考试　根据教材重点编拟少数试题，让考生或申述说明，或分析比较，或推理论证，或鉴别评价，根据自己的认识，自由回答的一种考试方式。论文式考试在教育史上出现最早，自从有笔试以后就开始采用，延袭至今。这种考试能测量学生较高层次的能力，如分析概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力、对知识的应用能力、文字表达能力等。回答问题比较自由，答案可以体现学生的思想、观点和态度，对教师了解学生有重要的参考价值。但这种考试的评分难以排除各种主观因素的影响，不客观，标准难统一，很难给学生以真实的评价。考试的效度与信度较低。

设计教学法　一种教学组织形式。它是由学生自觉地决定学习目的和内容，在自己设计和负责实行的单元活动中，获得知识和解决实际问题的能

力的教学组织形式。是美国教育家W·H·克伯屈创立的。设计教学法的理论基础是杜威的实用主义教育思想。其显著特点有：废除班级授课制，打破学科界限、摒弃传统教科书。设计教学法创立于1918年，20年代初传入中国在南京等地进行过实验，30年代曾盛行一时。

设计教学法一般进行的过程是：第一，学生根据自己的兴趣、需要，从实际生活环境中提出要解决的问题，即学习目的。第二，制订达到目的工作计划。第三，在自然状态下，运用具体材料、进行实际活动。第四，检查、评价活动结果。教师的任务主要是利用环境引起学生的学习动机、帮助学生选择活动所需要的教材等。设计教学法主要适用于低年级教学。

设计教学法重视学生的学习动机，对克服班级授课制的弊端有一定作用。但是，它忽视了教师的主导作用、学生学不到系统的科学文化知识。采用这种教学组织形式，一需要有相应的教学准备；二需要有经验丰富的教师。

导生制　又称贝尔——兰开斯特制。这是一种教学组织形式，这种形式是先由教师教高年级的学习优秀生，然后由导生去教其他学生。它是由英国国教会牧师*A*·贝尔和公谊会的教师丁·兰斯特创始的。19世纪，导生制曾遍及美国及欧洲大陆。

在使用导生制的学校里，一个大教室中安放着一排排长课桌，每排约容十几个学生，其中有一个导生。教师先这些导生，然后由导生领着一排学生围站在一个地方，把刚学的内容转教给其它学生，以后这些学生的学习情况也是由导生检查，考试。由于导生的协助，一个教师在一个教室里能教几百个学生。这种教学组织形式开始时，仅用在阅读和宗教教义问题后来扩展到书写和算术教学方面，以后又在高一级学科中被运用。

导生制为当时英国初等教育的发展起了一定的促进作用，它有助于解决教师不足的困难。不过，这种教学组织形式对教学质量难以给出保证。

阶梯式教学法　日本目前流行的一种教学法。这种教法是把复杂的问题分解成几个重点，然后逐个讲解。其教学的步骤一般是：先讲清产生问题的背景和原因，然后提出问题，最后阐明解决问题的方法。

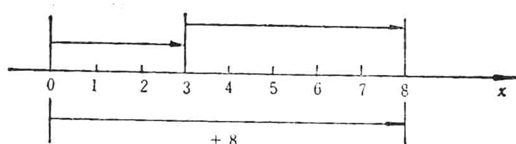
这种教法有两个明显的特点，一是自始至终抓住一个例子，讲解第一个重点时举的例子，同时也是讲解下一个重点的例子，使问题一步一步得到解决的过程清楚地显示出来；二是用图解法帮助讲解。

例如讲授有理数加法法则时，可以以“一个学生从一点出发，求他在直路上连续走动两次后所在的位置情况”为例进行教学。

规定向东走为正，向西走为负。

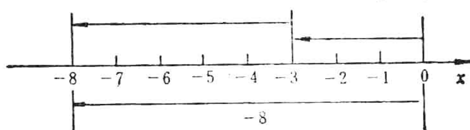
（1）同向连续走动情况

①向东走3米，再向东走5米。



即（+3）+（+5）=（+8）。

②向西走3米，再向西走5米。

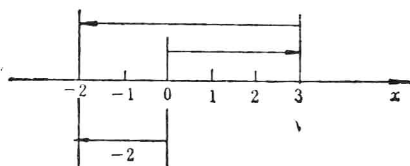


即（−3）+（−5）=（−8）。

由此得出同号两数相加的加法法则。

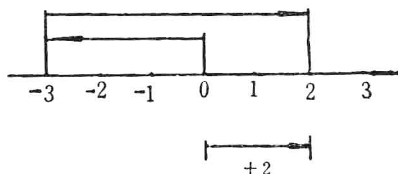
（2）异向连续走动情况

①向东走3米，再向西走5米。



即（+3）+（−5）=（−2）。

②向西走3米，再向东走5米。



即（−3）+（+5）=（+2）。

由此得出异号两数相加的加法法则。

………………………………

这种处理教学内容的方法就是采用的阶梯式教学法。

观摩教学 亦称公开教学。教学研究活动的形式之一。旨在探索教学规律、研究教学内容和教学方法的改革，评价或推广教学经验。一般有三种形式：①示范性的课：由有教学经验的教师任教；②研究性的课：经集体研究，个人设计教案，具有试验性质；③汇报性的课：主要由青年教师担任，旨在提高青年教师的教学能力和水平。

约翰·亨利效应 约翰·亨利据说是美国一位黑人铁路工人的名字。因为有人想通过实验来检验蒸汽道钉铆打机是否可以取代工人，于是约翰·亨利就凭着自己的体力和技术与蒸汽道钉铆打机进行了比赛。约翰·亨利效应是由美国的罗伯特·海尼奇1970年在《教学的技术与管理》一中首先命名并加以描述的。海尼奇在考察电化教学方法与一般课堂教学方法的比较实验时发现，控制组的教师在课堂教学中总是表现出最大的努力，结果使他的学生的成绩总是与进行电化教学的实验组的成绩不差上下。在海尼奇以后，许多人在研究中重复观察到，控制组在学习上格外努力，其成绩一般能达到甚至超过实验组的水平。目前的研究一般认为，教育实验的约翰·亨利效应的产生，可能主要来自两种心理。一种是竞争意识，控制组被试常常认为，自己完全能够和那些正在受到实验的同学做得同样好。另一种是恐惧心理，他们知道自己是控制组，害怕自己低居人后。

形式教育说 亦称形式训练说 十八世纪提出的一种教育主张。认为人的心灵具有各种不同的官能。每一种官能都可以选择一种难度较高的教材通过教学加以训练，使之充分发展。例如，用拉丁文法的教材训练记忆力，用数学教材训练思考力。学生在这些方面的能力得到发展，就会使以后的学习变得容易。因此，教育的效果最重要的不是掌握基本知识，而是通过知识的学习增进学生的思维、想象、记忆等方面的能力。形式教育说重视智力的发展，有其合理的一面，问题在于它把掌握基本知识技能和智力发展割裂开来，把强调智力发展推向了极端。

形成性考试 在教学方案实施的进程中举行的诊断性考试。目的在于检查根据具体的教学目标进行的小单元教学，是否在有效地进行；了解学生通过教学是否掌握了教材的基本内容；教学目标是否达到和达到的程度如何；如果教学目标尚未达到或达到的不完满，就要设法及时补救——调整教学过程或改变教学方法进行再教学。在新的教育评价体系中，形成性考试占有重要的地位，它突出了反馈与矫正的结合。形成性考试的结果一般不予评分，它重视的是寻找答案发生错误的地方及错答的性质和原因。形成性考试融洽在教学过程中，而不是中断教学过程。这种考试的时间不能太长，一般用几分钟到十几分钟。教师对学生错答的性质和原因，必须迅速准确地分析，做到及时反馈矫正。经过调整后的再教学，当大部分

学生都能达标后，就可以转入下一个小单元的教学。对未能达标的学生，可通过进一步地诊断了解，根据其具体情况再做个别辅导。

运用数学知识分析问题和解决问题的能力 具有运用数学知识和其它知识解决学习、日常生活和生产中简单问题的能力。它是运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力的综合。

要解答一个数学问题、首先要有解决问题的愿望。愿望的产生需要激发、需要培养。解答问题则需要知识和能力的综合。显而易见，培养学生运用数学知识的意识、习惯和传授知识、培养能力是同等重要的。引导学生运用已有的知识和能力、独立地学习新的数学知识，是培养学生分析问题和解决问题能力的一条重要而可行的途径。精选一些日常生活、生产中的实际问题，教会学生如何把实际问题化成数学问题予以解决，则是另一条重要途径，中学数学教材中对于直接联系生产实际的内容是很多的。例如，代数中的“统计初步”、指数中的“科学记数法”，解三角形中的“解三角形的应用举例”，几何中的“视图”、相似形中的“用小平板测绘平面图”、解析几何中的“经验公式”等。这些内容在培养学生分析问题和解决问题能力方面起着十分突出而重要的作用。

数学能力的大小和数学知识水平的高低虽不具有严格的正比例关系，但理解和掌握数学知识的基础则是数学能力。就是说，知识与能力之间存在一种客观而必然的联系。从这个意义看，考查学生的数学知识水平和考查学生数学能力水平是具有一致性的、常规考试的数学成绩就大体上反映了学生的数学能力水平。实际上在目前中学数学教学中或开学考试中，考查学生掌握知识和培养能力的情况都是通过解题来进行的。这也正是瑞典心理学家I·魏德林把数学能力定义为“理解数学的问题、符号、方法和证明本质的能力；学会它们在记忆中保持和再现它们的能力；把它们同其它问题、符号、方法和证明结果合起来的能力；在解数学问题时运用它们的能力”的原因所在。然而，客观事实是，对都能正确解答同一个问题的学生，其各自解法的合理性、简洁性、速度，以及表述的逻辑性诸方面都有差异，这种差异实质上就是数学能力的差异。可是，这种差异一般不会在考试分数中反映出来，解决这个问题，就需在考试命题、评卷及考试方法上进行一些相应的改革。

技能 是通过练习而形成、巩固起来的控制动作执行的那些经验，是一种合乎客观法则要求的活动方式。技能作为一种活动方式，是由一些动作组成的，有时动作是内潜的，在头脑内部完成，有时动作是外现的，通过头脑外部的运动来完成的。因此，一般把技能相对地分为两类，一类叫智力技能，另一类叫操作技能。智力技能，主要是指组成这种活动方式的动作是在头脑内部实现的。例如，运算的技能、解题的技能、推理的技能。操作技能是指组成这种活动方式的动作需要通过人的头脑外部的机体运动或操作一定的对象来完成。如运动技能、写字技能。在各门学科的教学

中，知识和技能是不可分的，知识是技能的基础，技能是知识的应用；把知识运用到实际问题中去形成形技能，又通过形成技能去进一步巩固和掌握知识。技能在能力形成中的作用，是无容置疑。任何操作能力的形成，必须掌握一定的操作技能。智力技能也是如此。比如，通常所说的运算能力实际上就是逻辑思维能力与运算技能的结合，空间想象能力则是逻辑思维能力和识图，作图技能的结合。

两极差 全部数据中最大数值与最小数值之差，又称全距，用符号 R 表示。是用来表示数据分布离散程度的一种最简单的差异量数。其计算方法可分两种情况：①用原始数据计算，其公式为。

$$R = x_n - x_i。$$

式中，x_n为全部数据中的最大数值，x_i为全部数据中最小数值。②用次数分布表计算，其公式为

$$R = 最大组中值 - 最小组中值$$

或

$$R = 最高组的精确上限 - 最低组的精确下限。$$

两极差只有极大值与极小值参加运算，受两极数值的影响太大，有很大的局限性，只能作为一种辅助差异量数。

连续变量 在获得数值的范围内，不同数值之间可以包含无限数目的变量。它的单位可以划分为细微的数目，细微的程度可以达到看不见，只能想象的程度。如时间可分为小时、分、秒、毫秒……等；长度可以分为公里、米、分米、厘米、毫米、丝米、忽米、微米……等。连续变量多是借助于测量工具（如尺、时钟、秤等）、通过计量（如测高、计时、秤重等）而获得的。所以，由连续变量组成的数据也称为测量数据。连续变量中的观测值是近似值，而不是确定值。在连续变量中数值5，包含了4.5至5.5之间的所有数值。连续变量的数据不管是整数还是小数，它实际是代表一个单位的中央点，是一个代表值，在这个代表值的以上和以下各包含了半单位的数据。数值作为代表值，它包含了这个数值所代表的最低值（起始值）到最高值（终止值）之间所包含的所有数据。连续变量数据的起始值叫做精确下限；终止值叫做精确上限。如，5的精确下限是4.5，精确上限是5.5。在统计过程中，一般是用数据的精确下限或精确上限进行计算。

我国中学数学教学的改革 新中国成立四十年，中学数学教育进行过各种各样的改革和实验，取得了很大成绩，积累了丰富的经验，也遇到了很多挫折。

建国初期，从1949年至1957年，是社会主义中学数学教育体系的创建和巩固时期。这个时期，彻底改革了旧中国的教育，全面学习苏联，公布了中学数学教学大纲，编写了新的中学数学教材、明确了中学数学教育的思想性、科学性、目的性、系统性，改进了教学方法，为中学数学教育的改革奠定了基础。但是，在学习苏联中学数学教育方法上，脱离了我国当时的实际，呈现全苏化的倾向。

1958年至1966年，是社会主义中学数学教育的改革和发展时期。这个时期，由于"大跃进"及国际数学教育现代化运动的影响，在我国也掀起了群众性的"教育革命"高潮，进行了中学数学教育各种各样的改革与实验，编写了一些新材料。但这些教材编写的较粗糙，难以使用，在"调整、巩固、充实，提高"的八字方针指引下，进一步修订了《全日制中小学数学教学大纲》，指出了学习数学的重要性，重视了"双基"，加强了数学教学研究，使中学数学教育质量得以提高。

1966至1976年，是社会主义中学数学教育遭到严重破坏的时期。这个时期，中学数学教材的体系被破坏，数学基础知识被削弱。

1976年至现在，是社会主义中学数学教育恢复，调整和发展时期。1978年教育部颁布了《全日制十年制学校中学数学教学大纲》，按照"精简、增加、渗透"的原则、编写了代数、几何统一的新教材。从1981年起，根据教学实际需要，又将统一的中学数学教材进行了分编成为代数、几何等。1983年，原教育部调整了1978年制订的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》的高中部分，颁布了《高中数学教学纲要》，将高中数学分为《基本要求内容》和《较高要求内容》，其中《较高要求内容》与《全日制十年制学校中学数学教学大纲》内容相当，而《基本要求内容》则删去了《微积分初步》、《多面角和正多面体》，《坐标轴的旋转》、《一元多项式和高次方程等内容，并将《行列式和线性方程组》、《概率》改为选学内容。

1985年，国家教委颁发了教学004号文件及其所附的《调整初中数学教学要求的意见》、对许多内容的教学要求作了控制、并且指出："如果感到初中课时较紧。可把"二次函数的图象和性质"与"一元一次不等式组"和"一元二次不等式"或其中的一部分内容移到高中代数第一册前学习"。

1986年，国家教委对《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》进行了修订，颁布了现行的《全日制中学数学教学大纲》，其中反映了上面的两次调整意见，并突出了《高中数学教学纲要》里《基本要求内容》的地位将它作为现行教学大纲高中阶段的正文部分、而将《较高要求内容》作为现行教学大纲的附录列出。

1989年，国家教委下发了教基字111号文件《关于对〈现行高中教学计划调整意见（征求意见稿）〉征求意见的通知》，根据这个通知的精神、中学数学教学内容又作了适当的调整。这样，使我国中学数学教育不断地引向深入改革的阶段、并逐渐为实现《九年制义务教育全日制初级中学数学教学大纲（初审稿）》进行教学做好必要的过渡。

作业分析课　以分析学生作业或试卷为主要教学任务的课称为作业分析课。其目的是指出作业或试卷中存在的问题和错误，给出正确答案，以弥补对已学知识的缺陷，使全体学生都

能总结经验教训，搞好以后的学习。作业分析课的一般结构如下：

（1）宣布作业或考试的一般情况。

（2）分析多数学生在作业或试卷中存在的问题，并将典型问题公布于众。对个别质量好的作业或试卷，多介绍他们的一些解题思路及方法。最后再将作业或试卷分发给学生，自己改正其中的错误。

（3）根据作业及考试情况，提出今后学习要求或学习建议。

（4）布置课外作业。

系统 相互作用和相互依赖的若干组成部分合成的具有特定功能的有机整体，并且系统本身又是它所从属的更大系统的组成部分。系统的各组成部分称为要素。一般来说，复杂的研究对象都可以抽象为系统，从明确的目的出发，以整体的相互联系的动态的观点加以考察。例如，对教学活动的研究可以考察教学系统，它是由教师及教导人员、学生、教材和其他教学条件组成的有机整体。而教师、学生、教材又各自组成子系统，各子系统又可再分出较低层次的子系统，这样层层考察，就有可能把握事物的整体。系统这个概念在教学过程中是经常使用的，例如，知识系统，概念系统，有时也把它说成是体系。

库李信度 适用于各类选择题（正误题）的信度计算方法。此法由库得尔——李查森提出，因此称库李法。用这种方法只需测验一次，然后根据各考生总分的平均数和标准差来计算信度系数，较为简便。在对客观性试题进行信度分析时，应用广泛。最常用的公式为

$$\gamma_{kR_{21}} = 1 - \frac{0.8 \times \overline{X}(k - \overline{X})}{kS^2}。$$

式中，$\gamma_{kR_{21}}$为库李信度，$\overline{X}$为各考生总分的平均分数，S为各考生总分的标准差，k为试题数量。应该注意的是，库李信度只适用于答案或对或错，只有两种可能的客观性试题的信度分析。

启发式教学 启发式教学是一种教学指导思想，它与注入式教学是相对立的。它的基本要求是教师在教学过程中要依据学习过程的客观规律启发学生积极思维，引导学生积极、主动、自觉地掌握知识，培养学生分析问题和解决问题的能力。

我国启发式教学的鼻祖是孔子。他说："不愤不启，不悱不发。"在《学记》中又提出了启发式教学的三条原则。即"道而弗牵；强而弗抑；开而弗达"。古希腊思想家苏格拉底用"问答法"启发学生独立思考，探求真理。他们当时都注意到了教学要发挥学生的积极性，强调在学生积极思考的基础上进行教学。现代教学论中的启发式教学思想，是在辩证唯物主义认识论的指导下、批判地继承了过去的教学理论遗产，在现代教育学和心理学的发展基础上，进一步完善发展起来的。

现代启发式教学的特点是：

（1）实现教师主导作用和学生积极性的结合学生的学是内因，教师要最大限度地调动学生学习的主动性、积极性、体现主体地位，使教师

的主导作用和学生学习的主体地位统一结合起来。

（2）实现系统知识的学习与智力的充分发挥和发展相结合。

（3）实现内在动力与学习的责任感相结合。

（4）实现书本知识与直接经验相结合。

启发式教学合乎教学过程的规律、是各种教学活动都必遵循的基本要求。在中小学数学教学中更有其重要作用。

评价的功能　教育评价有什么作用？这个问题的认识有一个发展过程。早期的教育评价集中于对学生进行成绩考核，评价主要被用于鉴定、审查、总结学生的学习质量。1967年以后，评价被区分为“形成性评价”和“终结性评价”，在评价的形成性功能中，评价是被用来改进和发展一个正在进行着的活动。教育的形成性评价是为了帮助改善和不断完善一个教学方案和教学活动而进行的，而终结性评价是用于教育效果的鉴定、核实或人才的选拔。此外，评价还有激励和增进认识的心理和社会政治功能。有时，评价还有执行权威的行政功能。我们不能断言评价的哪一种功能最重要。现在的倾向是，越来越重视评价的形成性功能。有一句名言：评价最重要的目的不是证明，而是改进。

评价指标体系　评价指标就是评价的项目，规定评价的内容。它反映评价目标的本质属性。评价指标体系是一个依据评价目的和原则建立起来的分类系统。是目标的具体化，是对目标的分解。设计指标体系就是对目标分类，把目标加以具体化，行为化。制定指标体系的原则主要可归纳为：①方向性原则。②科学性原则。③可行性原则，即可测性、可比性、简明性。评价指标体系一般应包括评价指标，评价指标的权重，评价内容，评价标准，评价方法等。在评价指标中，包括全部评价内容的指标，称为总指标或母指标。如一个学校的办学水平，就是一个总指标。它包括了与学校办学水平有关的全部内容。总指标可以按照一定的分类原则，分解成若干个内容较丰富，概括性较强的分指标，我们称之为一级指标。一级指标通常用A表示，第一个一级指标用A—1表示，第二个一级指标用A—2表示，等等。如办学水平的一级指标可包括：A—1办学方向；A—2领导与管理；A—3教育与教学；A—4教职工队伍建设；A—5后勤工作。每一个一级指标，可以再分解成若干个包括部分评价内容，具有一定概括性的分指标，我们称之为二级指标。二级指标通常用B表示。第一个二级指标用B—1表示，第二个二级指标用B—2表示，等等。直到每一个指标都比较具体、可测为止。这样，整个评价指标体系就分解成了相互联系的一级指标、二级指标、三级指标……等等。指标系统的形状就犹如一棵多茂叶的树。

诊断性考试　一般指在学期、学年开始，或一门课程、一个单元课程教学开始之前举行的考试。目的在于摸清学生对于即将学习的新的教学内容具有的准备状况，以便设计一种可以排

除学习障碍的教学方案。进行诊断性考试，是为了教学适合学生的需要和背景。在一门课程或一个新单元开始的时候，传统的作法是使所有的学生都从一个假想的“零点”一起起步。诊断性考试能识别出那些高出或低于零点的学生，这样就可以在设计教学方案时，把他们分置在最有益的教学序列中。在教学过程中的诊断性考试是用来测量学生掌握某一部分教学内容的情况的考试。根据教学目标的各项具体要求，逐项进行考查，以分析学生掌握知识的实际情况，找出薄弱环节，从而改进教学；对个别没有达到教学目标的学生，进行专门帮助。学生的考试成绩是作为了解教学情况用的，不一定作为衡量其水平之用。

改错选择题 选择题的一种题型。这种试题的题干是一个完整的命题，全句或句子的一部分的下边划了线，要求考生从所给的备选答案中，选出最恰当的答案代替命题中的划线部分，使改正后的命题为真命题。例如，“式子$a^2+b^2\neq 0$表示a、b都不等于零。（　　）（A）a、b都不等于零；（B）a一定不等于零；（C）b一定不等于零；（D）a、b不同时为零。”答案应选（D）。

阿莫纳什维利实验教学体系 阿莫纳什维利是当代著名的教育家和实际改革家，苏联合作教育学派的代表人物。他在1961年组建了“实验教学论实验室”，实验室就设在一所小学里。他们研究的课题是如何改革小学教育，使学生的积极性、独立性和创造性得到发展，既提高教学质量又减轻负担。由于阿莫纳什维利取消了给学生打分数的传统做法，所以习惯地把他的实验叫做“没有分数的学校”的实验。其实，“不打分数”只是这项研究选择的“突破口”。它涉及的领域是很广的。下面是实验教学体系中一些的主要因素。

（1）人道主义教育是实验教学体系的一条最基本的原则 阿莫纳什维利指出这一原则赖以建立的基础和出发点在于：①教学是为了发展学生的个性；②使学生牢固树立对人、大自然、劳动、周围世界的人道主义的、合乎道德的、共产主义的态度；③爱护和周到地关怀学生的内心世界、关心他们的兴趣、爱好和需求；④使学生的心灵和精神潜力日益丰富起来。

（2）折断和丢弃教师手中的“权杖”——分数 阿莫纳什维利认为，分数是一种强制手段，是教师控制教学过程的“权杖”。是造成种种冲突，特别是师生之间的对立和冲突的直接原因。不仅无助于学生在道德品质方面的健康成长，而且使他们逐步地养成了为分数而学习的习惯，而不是为了认识和得到发展的快乐而学习。在实验教学体系里，分数对学生的强制手段被排除出去，学生对知识的日益增长的渴望成为学生学习的动力。

（3）在教学过程中确立人道主义的师生关系 阿莫纳什维利所说的人道主义的师生关系用他自己的话来说就是：教师对儿童的爱和尊重，使儿童得到认识的快乐，教师信任儿童，师生共同探索和共同发现。他在

教学中的主要做法是：①从学生的兴趣的立场出发组织教学工作和学生的整个学校生活。这既不是“儿童中心主义”也不是“自由教育”，而是指教师要从学生所处的地位，考虑到他们的心理特点、内心活动来设计教学过程。其实质是要使学生在积极的动机作用的基础上接受教育要求所必需的学习—认识任务。要使学生自由选择的学习对象就是教学要求的任务，是他所必须掌握的知识体系。②始终相信每一个儿童的能力和发展前途。教师要做到这一点，就必须把儿童在发展中的任何偏离，都看作是自己在教学中没有区别对待的结果，把儿童在学习上的失利归罪于自己。要使全班每一个学生都相信，他们都是有能力的，都能克服在学习上的困难。③在教学过程中师生合作。所谓师生合作，就是在解决学习—认识任务中师生的兴趣和努力的一致性，是师生交际的一种方式。在师生合作的情况下，学生会感到自己是独立自主的主体，而不是教师的教育影响的客体。④合乎道德规范的对待学生，尊重学生的人格，维护他的尊严。实验教学的主要做法是：师生建立在互相信任的基础上；提高每一个学生在同学中和家庭中的威信；在班级集体中形成互相尊重的气氛，使学生养成交际的道德习惯；教师对每一个学生的兴趣爱好表现出浓厚的兴趣。

（4）建立以形成性评价为基础的评价体系　实验教学体系中取消了分数。但这并不等于在教学过程中对学生的学习活动，掌握知识的情况不做任何评价。阿莫纳什维利使用的评价是形成性评价。所谓形成性评价就是把学生的学习认识活动的进程或结果同拟定的学习任务要达到的目标的标准相对比的过程，以便确定学习—认识活动进展的水平和质量，决定和接受下一步的学习任务。这种评价对学生来说是一种激励，它可以增进、加强学生的学习—认识活动，并使之具体化、使学生对自己的能力和成绩充满着信心。这种评价又区分为两种不同的变体，一种是由教师、班集体、同学间进行的评价，称作为外在的评价；另一种是由学生自己进行的自我评价。阿莫纳什维利对培养学生自我评价的能力赋予重要的意义。在他的实验教学中是以下述三条途径培养这种能力的。第一，教师的评价活动，其实质是纠正和刺激学生的学习认识活动，体现对学生的积极态度并相信他们的能力。同时，学生从教师的评价活动中潜移默化地接受某些评价标准，掌握评价活动的某些形式和方法。第二，在集体的学习—活动中，集体的或学生间互相的评价活动，其实质是形成集体的评价标准、集体的舆论，在儿童集体中体现和确立积极的批判的态度。第三，学生独立的学习—认识活动，在这里主要是自我评价、内省的评价和在形成性评价的基础上调整学习—认识活动。在教学中这三个方面几乎是同时并存，互相联结、互相作用。

现场考试　到工厂、农村、医院等实际运用所学理论知识、技能的场所，按规定的要求，或事先安排好的测验项目，要求学生进行实践活动，借以考查学生运用所学的知识和技能解决

实际问题的能力。

现场教学 中小学数学教学中被采用的一种教学组织形式。这种组织形式是根据一定的教学任务，教师组织学生到工厂、农村或其它场所，通过观察、调查或实际操作进行的，是班级教学的一种辅助形式。在1958年教改中，现场教学在我国曾被广泛采用。现场教学可分为两种类型：第一，根据教学理论性知识的需要，组织学生到有关现场进行教学；第二，根据学生从事实践活动的需要，到现场给学生讲授某种技术。

现场教学的优点：第一，丰富学生的直接经验，便于学生理解和掌握理论性知识；第二，实际操作，便于形成学生的技能、技巧，培养学生运用知识于实际的能力；第三，通过接触现代化建设实际，利于激发学生的学习热情，培养学生良好的思想品德。

进行现场教学应需做到几点：第一，要制定出切实可行的计划。师生均应明确目的要求。做好事前准备工作。第二，加强组织工作，将学生注意力集中到教学要求上来，使整个教学活动紧紧围绕着教学目的、任务进行。第三，从实际与可能来确定。能否进行现场教学，要根据教学的目的要求，学生的实际情况及当地具体条件来确定，不可滥用，也不可不用。

现场教学的缺点是：比班级授课耗时多，组织教学难度大，适于进行现场教学的客观条件常有局限性。

现代化教学手段 又称电化教学手段。它是指运用幻灯机、电影、广播、录音、录像、语言实验室和电子计算机等现代化的视听工具作为教学的手段。这种教学手段根据技术的不同意义分为两类：①硬件。一般指设备的机件本身，如收录机、电视机、电子计算机等。②软件。教学内容和程序等。

现代化教学手段产生于19世纪末期。19世纪90年代、幻灯机开始用于教学。20世纪初，唱片和无声电影开始在教学中使用。自20世纪20年代起，无线电收音机、有声电影、磁带录音机、电视、语言实验室、程序教学机、闭路电视、电子计算机等视听工具越来越多的运用于教学。特别是二次世界大战后，现代化教学手段得到了迅速地发展。

利用现代化教学手段进行教学是十分优越和方便的。其优越性表现在：

（1）生动、形象、逼真，大大提高课堂教学效率 现代化教学手段能化静为动，将动变静，变小为大，整体可分解为部分，看不见的变为看得见的，能在较短时间内展现事物运动发展的全过程，使学生获得最充分的感知；现代化教学手段还可把抽象的东西具体化，便于学生观察、理解和记忆；现代化教学手段不受时间和空间的限制，既能扩大学生的知识面，又能较好地适应学生的个别差异，便于因材施教；现代化教学手段还可以节省时间，便于教师备课或业务进修；现代化教学手段，如录音机、电视机等还能在家庭学习时使用，使课堂教学与家庭学习结合起来。

（2）有利于培养学生的思想品德行为　幻灯、电影、电视生动形象，用这样的手段对学生进行思想品德教育，能更快更好地形成良好的思想和道德观念。学生对教师的说教，常会难以接受，而用鲜明生动的道德形象，却能给学生留下难忘的印象，充分利用各种电教手段，能促进学生道德行为的培养。

（3）扩大教育规模　利用广播电视及卫星传播电视向学校、家庭及社会传授教育课程，凡有电视之处皆变为课堂，一位教师可教成千上万的学生，大大节省了师资、校舍和设备，扩大了教育规模。

现代化教学手段虽对教学有很大作用。但它仍然只是一种辅助手段。它的运用应服从教育的需要，有利于提高教学质量，特别要注意发挥教师在教学中的主导作用。

现代教学方法的特点　现代教学方法是相对于传统教学方法而言的。其特点是：

（1）以发展学生的智能为出发点　50年代以前的教学方法，是以保证"双基"的传授为主，而现代教学方法则是以发展学生的智能为出发点。这一特点，正是布鲁纳的发现法之类的教学方法所以风靡全世界的根本原因。也正是从这个基本目的出发，广大教师创造出许多新的教学方法，同时也改造了旧的教学方法。

（2）以调动学生的学习积极性和充分发挥教师的主导作用相结合为基本特征　中外教育史上已有的许多教学方法，或以强调教师为中心，或以强调学生为中心。现代的教学方法既重视学生自身的积极性，又要求发挥教师的主导作用，努力寻求教师与学生间控制与自我控制联系之间相互关系的最佳尺度。现代教学方法要求学生成为学习的主体，不仅是为了更好地掌握"双基"，而是为了培养学生的探求精神和创造能力。教师的主导作用不再是仅仅体现为知识的"讲述人"，而应成为学生学习的"引路人"。

（3）重视对学生学习方法的研究　其表现有三：第一，以研究学生的科学的学习方法作为创立现代教学方法的前提；第二，在教学方法的运用上，既有教的要求，也有学的要求；第三，以学生学习中表现的思维紧张程度、思维水平和品质作为评价教学方法的基本标准。

（4）重视学生的情绪生活　传统教学忽视学生的情绪，现代教学方法强调发挥学生积极情感的动力功能，千方百计形成学生愉悦的学习情绪。现代教学方法是沿着苦学——乐学——会学的道路发展的。

（5）正确对待传统的教学方法　不能一提传统教法就认为是错误的。对传统教法应是改造、发展和保留运用。新的教学方法也不是十全十美、万能的。传统教学方法也不是一无是处。因此，要以科学态度，取传统教学方法之长，保留运用，弃之缺点，改造发展。同时，对新的教学方法，也要视其不足，从理论和实践上不断地完善它。

现代教学论发展趋势　现代教学论发展趋势主要表现在五个方面：

（1）为适应当代科学技术迅猛

发展的需要，更加注意研究课程和教材的改革，促进教学内容的现代化，掌握教材更新的规律。

（2）为使学生将来能够适应日益复杂的社会生活和工作需要，强调在教学中发展学生的智力，培养科学态度和创造性思维能力。

（3）加强教学手段现代化研究，推动教学手段愈来愈广泛地应用先进科学技术成果，使教学方法进入新的阶段。

（4）更加注意挖掘学生的潜能，提高学习的主动性，重视自学能力和操作能力的培养，要求在教学中引导学生学会学习并掌握科学的方法，把用脑和用手结合起来，为学生终生的学习和工作打下坚实的基础。

（5）教学论的研究与生理学、心理学、脑科学等学科的研究更加紧密地结合起来，不断提高教学论的科学化水平。

范例教学　20世纪50年代联邦德国兴起的教学理论流派之一，也是现代教学理论的典型代表之一，最早提出范例教学理论的，公认的是M·瓦根舍因。

范例教学是联邦德国教育现代化的一个特色。研究实践，主要是以历史、地理和一些理科为中心进行的。它主张以“关键性问题”来带动教学，克服教学内容的繁琐，使学生通过范例来掌握科学知识，这对于解决科技知识激增和教育周期过长的矛盾，对于培养学生的创造发明能力是颇为有益的。

范例教学的基本观点是：在教学过程中，以培养学生的自学能力，让学生掌握学习的方法，解决知识庞杂，教学内容过多的问题。因而，要求教师在教学中，分清内容上的主次，从日常生活中选取“基础的”、“本质的”知识即范例作为教学内容，让学生通过这种范例，掌握同类属性的科学知识，并把科学的系统性与学习者独立、能动的学习活动结合起来。范例教学在内容上，强调基本性、基础性和范例性三条原则。

（1）基本性原则　就是要求教师教给学生基本的知识结构，包括基本概念、基本科学规律和学科的基本结构。例如，国家教育委员会颁发的九年制义务教育《全日制初级中学数学教学大纲（初审稿）》中，“二、教学内容的确定与安排”写道：“根据上述教学目的，初中数学的教学内容应当精选作为一个公民所必需的代数、几何中最基本最有用的部分，在理论要求和习题难度方面，应当适当。”这就是基本性原则的体现。

（2）基础性原则　就是要求教学内容适应学生的智力发展水平，接近他们的生活经验，并且对于一定年龄阶段的学生来说，是打基础的知识。例如，国家教育委员会颁发的九年制义务教育《全日制初级中学数学教学大纲（初审稿）》中，“二、教学内容的确定与安排”写道：“教学内容的安排，既要注意数学知识的系统性，又要注意符合学生的认识规律，注意处理好数学各部分内容之间的联系，特别是初中内容与小学内容的衔接，……”这就是基础性原则的体现。

（3）范例性原则　就是要求教给学生的内容是经过精选的，能具有代表性的基本知识。范例教学的过程可划分为四个阶段：①解释范例的“典型事物阶段”；②解释范例“类型”和“属”的阶段；③掌握范例“规律”和“范畴”联系的阶段；④获得范例“对于世界和生活联系的经验”的阶段。

范例教学虽是现代教学论的典型代表之一，但它也还有一些问题有待研究解决。教学中要从实际出发，灵活取用，不可生搬硬套。

直观　学生在一系列的实物、模象与语言刺激物的作用下，通过各种感官及大脑的反映活动，在头脑中建立起有关事物的特征与联系的感觉、知觉、表象或观念，从而获得对于事物的一些具体的或感性的知识的过程。它是由反映事物的外表特征与外部联系的一系列认识活动构成的。它是理解知识的开端环节。具有三个基本特点。第一，直观总是在一定刺激物的直接作用下发生的。在实际教学中，用来直接作用于学生的刺激物，大体上不外三种，即实物，模象与语言。第二，直观过程中总是包含着一定的感知活动，但不限于感知，还有想象、思维和记忆成分。而且在有些情况下起作用的并不是感知成分。第三，直观所以是认识事物的开端环节，在于它或是只能反映个别事物的感性特征与联系，或是只能提供反映一类事物的外表特征与联系的具体知识，或是只能提供一些事物的特殊认识。

虽然直观只能提供关于事物的具体的，特殊的或感性的经验，但是，它是理解抽象的科学知识的起点，是使学生由不知到知的开端。没有这个起点，缺乏这个开端，学生就只能从字面学得一些空洞的概念或法则。这样就可能会产生这种情况，即或者对概念、法则反映的实际事物一无所知，或者产生严重的曲解。

肯定直观为理解知识的开端环节，并不意味着任何情况下教学都必须从直观开始。在学生已有有关知识经验的情况下，可以直接利用这些知识经验来建立新的概念或法则。直观就不再是必需的。当学生具有较高概括水平的范畴或类概念的情况下，概括水平较低的种概念就可以通过范畴或类概念的应用及具体化来建立，直观也不再是必需的。

直观教学　学生在教师根据教材精心挑选或人为制作的一系列的实物、模象与语言刺激物的作用下，在教师的指导下，通过各种感官及大脑的复杂反映活动（包括观察、倾听、触摸、操作或设想等），在头脑中建立起有关事物的特征与联系的感觉、知觉、表象或观念，从而获得对于事物的一些具体的或感性的知识的教学形式。直观教学中总是包含着一定的感知活动，但不限于感知，而且在有些情况下起主要作用的并不是感知成分。除了具有感知成分以外，还有想象、思维和记忆成分。直观教学，目的在于提供领会抽象知识所必备的认识支柱，也就是所要领会的概念与法则等所必需的基础性的知识经验。若要建立起相应的概念与法则，则必须在这基础上，进一步进行思维加工。直观教

学必须具有严格而确切的要求，为达到预期的目的，必须注意下列条件的影响。

（1）词与形象的结合　研究表明，在实物直观与模象直观的过程中，如果形象与词分离，仅有事物形象的作用，而缺乏词的作用，则学生往往会撇开当前的学习任务，热衷于感兴趣的因素，忽视对事物的全面观察，此外，形象与词分离，也难以使学生获得确切的感性知识。这表现在如果不要求学生用语言来描述他所见到的东西时，学生往往不能清楚地意识到对象各部分的组成因素和组成关系。在语言直观中，词与形象分离，形象化语言的描述如果缺乏有关的记忆表象的支持，学生的想象活动就难以展开，难以达到语言直观的目的。

（2）直观对象的特点　研究表明，某种直观对象与学生已有的有关经验接近，则此感性知识易于形成，但在表象中，易于同相近事物混淆。对象与背景的差别愈大，则此对象易于清晰地感知，否则就比较困难。对象各要素的强度不同，则各要素的感知效果也有差异。强度较大的要素可以掩蔽那些强度较弱的因素。因此，在教学中应注意：①在感知那些与学生已有经验相近的对象，应注意比较，特别要注意其差别；②在直观教具的制作、选择与运用方面，要注意突出对象与背景间的差别；③在直观过程中，要注意突出那些强度弱的但是重要的因素。

（3）直观对象的分析与综合　在观察较为复杂的对象时，感性映象的形象往往由笼统的、模糊的、不确定的形式逐渐过渡到确切的分化的形式。这有赖于学生头脑中对客体进行分解与结合，即进行对象的分析与综合。头脑内部的高级分析与综合活动，来源于头脑外部的物质的分解与组合活动，是物质的分析与综合活动方式的反映。当学生还不善于独立进行头脑内部的分析与综合活动时，应注意从外部的实物或模象的分析与综合开始，过渡到语言的分析与综合，最后形成智力的分析与综合技能。

（4）直观对象的变式　所谓对象的变式，指在直观过程中要注意变换作为直观对象的事例。这是丰富学生的感性知识，变更对象的非本质要素，突出对象的本质要素，使学生形成一般表象的必要条件。关于几何教学中标准图形的消极影响以及变式的必要性，我国心理学家卢仲衡曾进行过专门的研究，结果表明，标准图形的消极影响在学生刚刚开始学习平面几何基本概念时是存在的，采取图形变式或语言变式是有益的。

（5）学生的独立性及主动性　实际经验表明，“教师演”，“学生看”的教学方式的效果，往往不如学生自己动手操作。这说明，直观的效果受制于学生的独立性和主动性。因此，在必要与可能的情况下，应发挥学生的独立性及主动性，改变那种教师演学生看的被动直观的教学方式。

直线程序　通常是把教材按逻辑次序分成一个个极小的部分（“卡片”），一般地每部分包含这段教材的一个相

当简单的问题，预计如果学生仔细地读完这部分（以及它之前的）材料，应能够无错误地回答提出的问题。在转到下一卡片时，学生首先要知道，他上一卡片上的问题的答案是否正确。由于每一部分都只有很少的新材料的信息，只要把自己的答案与正确的答案作一简单的比较，便能立即得出答案的正误，并且明白，究竟在什么地方发生了错误。直线程序要求每个学生都作所有项目，其差别只是各人通过的速率有所不同。它的另一个特点是要求学生独立地表述问题的答案，而不是在一组多重可能中作选择。

直观性原则 直观性原则就是在教学中，为使学生能比较深刻地理解与牢固地掌握理性知识而提供感性材料的原则，提供感性材料的方法是利用学生的多种感官和已有经验，通过各种形式的感知，丰富学生的直接经验和感性知识，形成鲜明的表象，易于揭示问题的实质。

直观性原则是根据从感性到理性，从具体到抽象的人类认识的一般规律和学生思维发展的特点提出来的。从总体上说，中小学学生的形象思维还处在主导地位，其抽象思维仍需要形象思维的支持，因此，教学中贯彻直观性原则，具有特别重要的意义。

教学中要贯彻直观性原则，需应做好以下几点：

（1）恰当采用各种直观形式。直观形式一般分为实物直观，模象直观和语言直观三大类。所谓实物直观是指运用实物演示教学。如平面几何教学中度量线段长度的两脚规和刻度尺等。所谓模象直观是指运用模型、图象等进行教学。如函数图象的教学等。所谓语言直观是指运用形象化的语言描述教学内容，使学生头脑中已有的有关事物得以重现，或按描述加以改组，形成新的表象。适当采用上述直观形式，形成学生的鲜明表象，为其掌握理性知识提供必要的感性材料。

（2）要根据不同教学内容，不同教学任务，不同学生的年龄特点和不同认识水平情况，恰当地选择各种直观教具进行教学。运用直观教具教学，要周密考虑运用直观教具的条件，不能盲目乱用。如教具演示的时间和地点等，使其恰到好处，发挥应有作用。在教学中运用直观性原则，可贯彻于整个教学过程的始终。如运用于讲新课，使用于旧知识的复习，也适用于独立作业和检查知识技能技巧的活动中。

（3）重视教学手段现代化教学。如充分利用幻灯、电影、电视、录像、唱片、录言、语言实验室和电子计算机等现代化视听工具，发挥电化教学直观形象的威力，辅助学生学好理性知识，使学生的注意力、观察力、想象力、思考力和记忆力等都有所发展。

（4）运用感知规律，加强直观教学，最大可能提高教学效果。如注意对象与背景间的差别，对象各部分的强度对比和对象的活动状态，多种感官协调活动等。

（5）要重视直观和语言的正确结合。运用直观教具教学，是离不开

语言的，若失去语言只运用教具，便不能对学生进行知识的抽象与概括，使学生停滞在感性认识水平，达不到理性认识阶段。直观不是目的，而是手段，要防止为直观而直观的倾向，实现直观与抽象的有机结合。因此，教学中，在充分运用直观教具的同时，要正确运用语言讲解组织学生的注意力，指导观察的顺序和方法，明确观察目的等，对直观和语言的正确结合具有重要作用。

具体教学目标 将中程教学目标再行分化，使之尽可能地成为能够观察和衡量的行为，即成为具体教学目标。具体教学目标一般是指一个教学单元或一个课题的目标，以及一个单元或课题目标之下分列出来的具体行为目标。它们往往是以母目标与子目标的形式结为一组的。

凯洛夫教学原则体系 И·А·凯洛夫苏联教育家，他主编的《教育学》是在我国有较大影响的一本教育专著。特别是以它为代表的教学论思想在我国的教育理论和实践中曾经发挥过，现在仍在发挥着重大的影响，凯洛夫教学原则体系包括五条，即直观性原则、自觉性积极性原则、巩固性原则、系统性原则、量力性原则。这些原则反映了学习教材的一般规律，它所要求的是使学生尽可能成功地掌握人类积累起来的知识、技能、技巧，具有一定的局限性，因此对凯洛夫教学原则进行修正、补益和发展应视为必然。

制约教学过程最优化的因素 一般是指主要因素而言的。

（1）教学目标的正确性。教学过程的最优化是以教学结果和教学目标的结合程度来衡量的，教学目标的正确与否决定着教学过程的意义，教学目标不正确，教学过程也就没有意义。因此，目标是恒量最优化的依据。教学目标不仅要正确，而且要明确，特别是对下一个程序要求的明确程度，决定着上一个程序的要求和质量。

（2）教与学的同步性。教育者和受教育者在各教学阶段的状态以及教学系统的结构，决定于在各教学阶段中师生活动配合的程度，即教与学的内容是否同一，输出和输入是否同步，决定于各阶段的工作质量和师生在各阶段的状态与目标要求的符合程度。

（3）教学程序各阶段的协调性。教学程序各个阶段的地位、作用是否明确，是否协调，都直接影响着教学过程的最优化。

知识 事物属性和联系的反映，是人们对客观现实认识的结果。表现为对事物的感觉、知觉、表象、观念、概念或法则。就其反映事物的深度来说，有感性知识和理性知识的分别。感性知识是事物的外表属性与外部联系的反映，理性知识是事物的内在本质与内部联系的反映。就个人获得知识的途径来说，又有直接经验和间接经验之分，直接经验是主体在接触、改变外部世界活动中亲自获得的知识，间接经验是主体借助书籍、文献或他人口传方式而获得的知识。学生学习书本知识是一种间接经验，但也要有一定的直接经验为依据，否则就不可能完全掌握。因此，教师应把指

导学生借助间接方式掌握知识，同组织学生通过观察和实践活动直接获取知识，有机地结合起来。

知识的应用 学习知识的重要环节。根据已有知识，解决有关问题。这些问题可能是运用所学的概念原理，法则去辨认有关的事物，去说明、解释有关现象，或者是去完成一定的操作任务。既包括教材中抽象化了的课题，也包括现实生活中的实际问题。知识应用是抽象知识具体化的过程，是加深理解和巩固知识的重要途径，也是形成技能，培养能力的重要途径。知识应用的具体过程因课题的性质与难度而有所不同，但是大体上包括以下几个相互联系的环节。

（1）审题或课题映象的形成 即确切地了解题意，区分条件与问题，特别是那些遗漏或隐蔽的条件，并在头脑中保持清晰的印象。审题有时简缩的，一次完成的，但遇到比较生疏，复杂而困难的课题时，则往往是扩展的，而且要反复与后面的环节交错地进行。

（2）相应知识的重现 这是在感知课题的条件与问题的基础上通过联想而实现的。联想活动的进行将因课题的难易和学生对所用知识掌握程度的不同，而有扩展与压缩，直接与间接，意识到知识的重现与意识不到知识的重现的分别。在解决比较容易的课题和对某种原理、法则等知识已经熟练应用的情况下，作业过程中的联想活动是高度压缩的，多数是通过一种直接的概括联想进行的，一般都意识不到有关知识的重现。但当感知课题的条件与问题之后，而无法作出定向时，则发生明显的扩展的、间接的、有意识的回忆、联想活动。

（3）课题的类化和找到解题方法及答案 即学生通过思维把握具体课题内容的实质，找到它与相应知识的关联，从而把当前的课题纳入已有的知识系统中去。这样，学生就能依据已有的知识去明确课题的性质，解释同类的现象或做出解题方法的判断。任何一个新问题的解决，都要利用主体经验中已有的同类课题。课题的类化进程将因课题的难易，同例题的差别程度以及抽象知识的应用状况的不同而有所差异。在熟练地应用所学知识去解决那些难度较低，同例题的差别较小的课题时，课题的类化与有关知识的联想几乎是同审题一起实现的。如果是在应用刚刚学得的知识或同例题差别较大，一时难以辨认课题本质特征时，课题类化通常是展开的、间接的、较长的。

知识的学习 学习的主要类型。通常把学习划分为四种类型：知识的学习，技能的学习，心智的、以思维为主的能力的学习，道德品质和行为习惯的学习。教师可以针对不同类型的学习形式的特点和规律进行教学和指导学生的学习。知识的学习一般分为四个环节，即感知、理解、巩固、应用。关于学习规律，研究者甚多。比如，桑代克曾提出过：准备律，练习律、效果律。孔子讲“学而不思则罔，思而不学则殆”、“举一隅不以三隅反，则不复也”。以下是我国学者江山野根据知识的基本特征，提出的三条学习知识的基本规律，对教学

有一定的指导意义。第一基本规律称为量次规律：知识是从人类的实践活动中得来的，是实际事物及其运动和发展变化的规律的反映。它具有丰富生动的实际内容，但表现它的语言文字（包括符号图表等）则是抽象而又简约的，因此，学习知识必须对其所含的丰富内容达到一定“量次”（即数量和次数）的了解或认识。第二条基本规律称为充分思维规律：知识又是思维的产物，智慧的结晶，它本身就具有思维价值和智力价值；但它一经被阐明和证实，就成了现成的结论。因此，充分、曲折、反复的思维，是学习知识的必然过程。第三条基本规律称为与实际活动相结合规律：知识是人类生存、发展和改造客观世界的武器，它本身就有巨大的能量；但它在书本上却只是一些条文。因此，可以说，它是一种潜在的能力。因此，学习知识并将其转化为实际的能力，必须在理解和掌握足够的知识的基础上，同实际活动结合起来，进行长期的经常的多样的实际练习。概括起来说，这一规律包括有三个重要环节：一是基础；二是同实际活动相结合；三是长期、经常、多样而实际的练习。

知识有多种多样，其性质、深度、难度和繁简度各有不同，学习者的条件和学习的目的要求也不同，因此，对于学生来说，知识的理解、应用知识的能力就会有不同层次或不同水平的要求，严格按照教学大纲规定的教学要求进行教授和学习，这是学校教学的一条基本指导思想。

知识的理解 知识学习的重要环节之一。理解是个体逐步认识事物的种种联系，关系直至认识其本质、规律的一种思维活动。随着学习中所要认识的联系与关系的不同，理解的性质也不同。有对言语的理解，对事物意义的理解，对事物类属的理解，对因果关系的理解，对逻辑关系的理解，对事物内部构成、组织的理解等等。理解以旧经验、旧知识为基础、经验的丰富性、正确性，已获得的基本知识的数量与质量以及思维的发展水平等，都会影响理解知识的水平。为了提高理解的效果，教学中应注意下列几点。

（1）采取有效途径提供感性材料 一般采用实物直观，模象直观，言语直观或言语与实物、模象直观相结合的方法。

（2）理解基本概念和基本原理，需要通过变式与比较 变式是从材料方面为理解事物本质提供有利条件。比较则是从方法上促进理解。应用变式材料，通过在思维中分离出事物的各种特点，进行比较，抽出其共有的本质特点加以综合与概括，同时舍弃其非本质特点，这就是形成概念的过程。基本原理的学习也是如此。

（3）通过语言明确揭示概念、原理的内容。

（4）采用多种形式进行练习，加深对概念、原理的理解。练习的过程就是概念和原理的运用过程，是具体化的过程。

（5）形成知识系统，进一步加深概念和原理的理解。也就是理解各部分知识之间的关系，把知识的各部

分纳入一定的顺序结构中去，形成良好的认知结构。

知识结构单元教学法　这种方法是按照知识的结构，把教材内容分成若干个小单元进行教学的。其实质是将科学家发现真理的过程转移到学习过程，所谓“单元”可大可小，以内容而定，是个相对概念。例如“一元二次方程”这章教学内容，既可以把它视作一个大单元进行教学，也可以把它视作“一元二次方程”，“一元二次方程根与系数的关系”，“可化为一元二次方程的方程”和“简单的二元二次方程组”四个单元进行教学。也可以从实际出发分为更多的小单元进行教学。每个单元的教学程序，一般是自学获得感性认识；提出猜想（即一般性结论）；证明猜想，达到理性认识，掌握一般规律；应用实践，即时反馈。此法自1982年起，在我省有较多的实验班，反映良好，实验面最大的是潍坊市。

使学生理解学习过程的原则　赞科夫实验教学论原则之一。赞科夫指出这一原则既和公认的掌握知识的自觉性原则相近似，又和它有着重大区别。自觉性原则通常被解释为学生对学习的自觉态度，自觉地掌握和理解所学的东西，自觉地把知识运用于实践。这里的理解是指向外部的，即把应当掌握的知识、技能和技巧作为理解的对象。而这条原则中的理解是指向内部的，即指向学习活动的进行过程。比如，所要掌握的知识之间是怎样进行联系的，各自处于何种地位，主次如何区分，掌握教材时发生错误的根源及其防止的机制如何，这些和其他许多有关掌握知识和技巧过程的问题，都是学生要密切注意的问题。

使所有学生包括后进生都得到一般发展的原则　赞科夫实验教学论原则之一。赞科夫指出这一原则有着特别重要的作用，因为在教学实践中，往往对于最差的学生提供的真正智力活动的可能性是最少的。补课和布置大量的训练性练习，被认为是克服学业成绩不好的学生落后状况的必不可少的手段。然而，学业落后的学生，不是较少地，而显然是比其他学生更多地需要在他们的发展上系统地下功夫。经验证明，这种工作能使差等生在发展上取得很大进步，从而也就在他们掌握知识和技巧方面达到较高的成绩。相反，许多训练性的作业使得差等生负担过重，不仅不能促进这些儿童的发展，反而只能扩大他们的落后状态。这条原则使得实验教学论的其他四条原则的作用范围更加明确了。赞科夫还指出，在实验教学体系中，不是借助分数及类似的方法对学生施加压力，而是通过教学论的实现，使学生产生对学习的内部诱因，增加和深化这种诱因。不断地以新的知识丰富学生的知慧，让他们思考，树立学生自己去探索真理的志向，让他们完成复杂的任务——这一切都会产生强烈的、稳定的内部诱因。当然，这里也往往会产生勤奋，但是，勤奋是与内容丰富的，使渴望认识深入成为习惯的活动交织在一起的，没有来自外部压力所造成的不愉快的性质，不能理解为学生为完成来自外部的要求而造成的学习活动的紧张。实施这条原

则的另一个方面是为了尽量开拓学生发展的可能性，必须给个性以发挥的余地。个性的发展，在孤独和隔绝中是不可能的，只有在学生集体的内容丰富而形式多样的生活中才有可能。集体生活要具有应有的思想方向性，而同时也要反映出学生的动因、愿望和意向，不能要求一律，否则，就会压制个性，从而也就压制了学生的精神力量，阻碍了学生发展可能性的发现与形成，也阻碍了学生的一般发展。

命题的一般原则　考试的核心环节是命题。在命题时，必须遵循下列原则：①试题的形式要符合考试的目的，要能测出所欲测量的知识和能力。②内容取样要有代表性，亦即复盖面要大，各部分内容比例要适当。③题目格式不要使考生发生误解，要使考生明白让他干什么、怎么干，答案应以什么形式出现。④语意要清楚，文句要简明扼要，要避免使用艰深的字词，除阅读测验外，应使成绩尽可能不受语言能力影响。⑤应有不致引起争论的确定答案（并不是只能有一个正确答案）。⑥各个试题必须彼此独立，不可互相牵连，不要使一个题目的回答影响另一个题目的回答。⑦题目中不可含有暗示本题或其他题正确答案的线索。⑧题目难度要适合受测量的团体的知识和能力水平。⑨题目内容要具有一定的思想性、教育性。⑩施测与评分方便、经济，且不受无关因素干扰。

备课　教师在上课前的教学准备。备课是上课的前提，具体说，备课就是教师根据教学大纲的要求和本门学科的特点，结合学生的具体情况，选择传授知识、技能最合适的表达方法和顺序，加强教学的预见性和计划性，以保证学生有效地学习，实现教学任务。备课时应当做到以下几点。

（1）钻研教学大纲、教材及教学参考书。钻研教学大纲的目的，是弄清本学科的教学目的，教材体系和基本内容以及教学上的基本要求。做到统观全局、统筹安排。钻研教科书是为了明确教材编写意图，组织结构，以及重点、难点和关键等。

（2）了解学生。包括了解学生对有关知识技能掌握的范围和质量，学习态度和方法，学习习惯和学习能力，了解学生的思想面貌，个性特点和健康状况等。既要了解全班学生的一般特点，又要深入了解每个学生的个别特点。在了解的基础上，预测教学中可能出现的问题，拟定相应的措施，以保证教学顺利进行。

（3）进行教法设计和加工。在前两步工作的基础上，遵循教学规律，运用教学原则，选择适当的教学方法，将教学内容按一定逻辑顺序编制起来，要求做到：条理清楚，层次分明；系统严密，重点突出；观点明确，论据充足；难易适度，详略得当。教师备课要求分别写出学期（或学年）教学进度计划，单元（或课题）教学计划及课程授课计划（即教案）。

单元备课　又称课题备课。教学一个单元前，在制订好学期（年）教学进度计划的基础上，拟定单元（或课题）教学计划。目的在于明确这一单

元（或课题）教学的目的任务、内容，作出全面安排。单元（或课题）教学计划包括：单元的教学目的、课时划分，各课时的主要内容、重难点、教学关键、教学法的要求及教具的利用等。

单元测验　一个单元的教学结束时进行的测验。学校里一门课程的教材，常可按其内容的性质和内在联系，区分为若干个小的整体，分编章节，安排练习，从传授知识到巩固应用，连续在一段时间内进行。这个小的整体，通常称为单元。一个单元的教学结束时，教师可以在课堂教学过程中，抽出一定时间进行测验，用以检查每个学生学习本单元的成绩。

注入式教学　注入式教学俗称满堂灌或填鸭式教学。它是同启发式教学相对立的教学指导思想。它的特点是：教师只凭主观愿望，不考虑学生，学生学习完全处于被动状态，生硬地向学生灌输知识，使学生呆学死记。在这种指导思想下，压抑了学生学习的主动性积极性，阻碍了学生独立思考，使学生思想僵化，不善思索，不能独立地分析问题和解决问题，因此，注入式教学与我国的培养目标是相违背的，必须在教学中坚决废除这种思想。尤其是在中小学数学教学中要坚决制止，否则，后患无穷。

波利亚教学三原则　G·波利亚是当代著名数学家、数学教育家。他的教育宗旨是“教会思考”，“培养创造精神”，倡导“探索法”教学，提倡启发式的提问，既注意智能因素的培养又不忽视非智能因素的作用。为了贯彻他的教育宗旨，提出了三条教与学的原则。这三条原则称为波利亚教学三原则，也称波利亚学习三原则。

（1）主动学习原则　即为了有效地学习，学习者应当自行发现所学题材中（为环境所许可的）尽可能大的份额。作为教师来说，应该让学生自己发现尽可能多的东西。

（2）最佳动机原则　即为了有效地学习，学习者应当对所学题材发生兴趣，并在学习活动中寻找乐趣。然而，除了这种最佳动机外，尚有其他动机，其中有些还是可取的。作为教师职责应该是：使学生相信数学是有趣的，正在讨论的问题是有趣的，要他解的问题是值得努力的。一种有效的办法是在学生解一道题之前，让他们猜测结果或部分结果，凡是作出了猜测的学生，必定专心致志于实现自己的猜测。因为自信和自尊多少总依赖于成果，他必定急于知道自己的猜测正确与否。

（3）阶段序进原则　波利亚认为学习大致可分为三个阶段：探索阶段，形式化阶段，同化阶段。探索阶段是对事物的观察和初步了解，是行动和感受，处于一种比较直观和启发式的水平上。形式化阶段对所接触的事物进行了分类整理，引入适当的定义、术语等，并认识了其中的规律性，认识上升了一个较为概念化的水平上。同化阶段有一种洞察事物“内部境界”的尝试，学生已经消化了学习材料，事物的规律性在更广的范围内被认识、推广和应用。波利亚认为，学习的过程应该遵循这种模式，

缺少任何一个环节都会使所获得的知识不全面。任何成功的教学法必然以某种方式与学习过程的性质相通。譬如，指导学生解题，探索阶段发生在解题之前，寻求手头这个问题与周围世界的联系，同化阶段发生在解题之后，寻求手头这个问题与其他知识的联系。缺乏这两个阶段就不是好的教学法。

波利亚以教学三原则为基础并结合长期教学的经验，提出了教师十诫：①要对你讲的课题有兴趣。②要懂得你讲的课题。③要懂得学习的途径，学习任何东西的最佳途径就是靠自己去发现。④要观察你的学生的脸色，弄清楚他们的期望和困难，把自己置身于他们之中。⑤不仅教给他们知识，并且要教给他们“才智”，思维的方式，有条不紊的工作习惯。⑥要让他们学习猜测。⑦要让他们学习证明。⑧要找出手边题目中那些对后来题目有用的特征——即设法去揭示隐藏在眼前具体情形中的一般模型。⑨不要立即吐露你的全部秘密——让学生在你说出来之前先去猜——尽量让他们自己去找出来。⑩要建议，不要强迫别人去接受。

学习动机 推动学生学习的内部动力，它是学生在学习活动中的一种自觉动能性的心理状态。学习动机与学习效果有着密切的联系，一般说来，正确的强烈的学习动机能产生好的学习效果，反之效果就差。

学习兴趣 学生对学习对象的一种力求趋近认识的倾向。对学习有着浓厚兴趣的学生，能自觉地集中注意力，全神贯注地进行学习，能主动地去思考和探索问题。学生学习情绪是影响学习的一个因素。如果学生在学习中，心情舒畅、愉快，就能增强对学习的注意，增强学习的兴趣和信心，从而收到良好的学习效果。反之，学生学习情绪沮丧分散学习注意力，兴趣降低、态度消极，影响学习效果。培养学生学习兴趣的途径和方法是很多的。如给学生创设一个好的学习环境；上课开始做好组织教学工作；教学内容的深浅要适当；教学方法要生动活泼，形式多样；开展多种形式的课外活动；到工厂、农村参观学习；帮助学生明确学习本门课程的目的和意义等，都能激励和提高学生的学习兴趣，增强学习信心。但是，其中帮助学生明确本门学科的目的和意义，树立为建设伟大的社会主义祖国而学的思想，才能产生内在的学习兴趣。有了这种兴趣，学习注意力才能集中持久，学习态度才能端正，学习积极性、主动性才会高，学习效果必定是很好的。

学习评价 根据教学目标，用一定的评定方法，对学生在学习过程中发生的变化进行定量和定性的分析，并作出价值判断的过程。学习评价是在收集学习信息的基础上进行分析，并作出价值判断。收集学生学习信息的方法有考试、作业、提问、谈话、观察、调查等。学习评价具有诊断功能、反馈功能和决策功能。学习评价的原则主要有：①评价的内容、方式要以教学目标为准则。②学习评价要有量的统计，而量的统计主要是评分，所以评定的分数一定要可信、有效。③评价的目的是为了激励、导向和鉴

定。④教师评价学生要一视同仁。⑤学习评价不能光凭考试分数，还应有多样性的项目，以便能综合反映学生的学习能力，学习态度、进步幅度，以及品德修养等。

学生评价　以学生为对象，以他们的学习和生活为领域，对其发展与成长作出价值判断。学生评价是整个教育评价的核心与基础。对学生的评价，应包括以下几个方面：①思想品德的评价。②知识能力水平的评价。③体质健康水平的评价。④美育水平的评价。⑤劳动教育水平的评价。⑥个性发展水平的评价。

学年考试　学校中，学年结束时举行的总结性的考试。学年考试的成绩是决定学生升留级和总结一学年教学工作的重要依据。

学校评价　教育评价的一个重要组成部分。是介于宏观教育评价（某一地区办学水平评价）和微观教育评价（某一学科评价）之间的一种评价。学校评价可分为以目标为中心的评价和以决策为中心的评价。以目标为中心的评价只评价学校工作结果是否达到了既定目标；以决策为中心的评价不但评价学校工作是否达到了既定的目标，还评价达到目标的条件、过程等。以决策为中心的学校评价，一般从两个方面进行，一方面是办学条件评价，另一方面是办学水平评价。

学能考试　用来测量考生完成某项任务的能力倾向的考试。这些能力倾向往往是潜在的。在考试时，考生不一定具备了这些能力，而只是具有发展这些能力的倾向。学能考试并不根据过去的教学内容来命题，它的命题的依据是对这些能力的结构的分析。学能考试与水平考试的主要区别在于，前者着眼于将来，后者着眼于现在。

学期（年）备课　教师在学期或学年开始前，在以认真钻研本学科教学大纲，教材及教学参考书的基础上，根据学生的实际情况，制定出学期（年）教学进度计划。目的是明确一学期（年）教学工作任务和范围，作出通盘安排。这种教学进度计划一般应包括说明和正文两部分。说明部分包括：情况分析、教学指导思想、总的教学任务、教材重难点，提高教学质量的措施等。正文部分包括：划分教学单元，制订教学目的要求，教学周次和时数，作业安排，复习考试日期，教具准备等。学期（年）教学进度计划可用条文或表格形式写出。

学生学习过程最优化　教学过程不仅有教师的活动，而且还要有学生的活动，这样才能做到教与学的统一。如果没有学生的一定的自我组织活动，教学过程最优化是不能实现的。

教学过程最优化的所有组成部分都反映在学生活动的最优化中。因此，要使学生明白一堂课的学习任务，要学会集中精力注意专题中的主要问题，努力寻求完成学习任务的最好方案。要用教师所要求的速度，采取有效的自我监督，并坚持不懈地达到教学目的同时完成作业。这种在教师指导下的学习活动的自我组织是符合最优化要求的。

教学最优化与学习最优化结合起

来就保证了教学过程最优化。

使学生了解当堂课的学习任务有重要意义。教师不仅善于给学生指出这堂课的任务，而且善于教会学生自己去寻求解决这些任务的最优途径和手段，学生就会为实现教师提出的任务而努力学习。学生学习过程最优化是大面积提高教学质量的重要途径和方法。

学生获得概念的解释 学生掌握概念必须经过领会、巩固、应用三个过程。学生获得概念的解释一般有两种观点：一是皮亚杰的同化，顺应理论；一是奥苏伯尔的意义学习理论。这两派观点都认为概念学习是在已有的认知结构基础上进行的，新概念的获得主要是依赖认知结构中原有的适当概念，只有通过新旧概念之间发生联结，有意义学习方能完成，原有的认知结构形成更为高度分化的认知结构。

皮亚杰认为，新概念的学习无非经历同化与顺应的过程。所谓同化，就是把新知识，新材料接纳已有的认知结构中，所谓顺应，就是当原有认知结构不能纳入新概念时，换句话说，当新概念与已有的认知结构发生矛盾、冲突时，必须改变已有的认知结构，以概括新概念。例如在自然数概念的基础上学习分数概念，从本质上说是属同化过程。我们把一个标准对象（整体）采用先均分后结合的方法，得到该对象的“几分之几”的量的概念，因而分数概念的形成与自然数概念的形成有相通之处，它们都是通过等价抽象手段形成的。

又如在实数的基础上学习复数概念，基本上属于顺应过程。在实数知识结构中，实数已和数轴上的点建立了一一对应，这是学生熟悉的，那么，有了复数概念以后，既然复数也是个数，那么i在数轴上的位置怎样呢？因为i在数轴上无立足之地，这就与已有的实数知识结构发生冲突，原有的知识结构必须改变，改变后的知识结构既能接纳新概念，又能包括原有的概念体系。于是，把数轴扩展到复平面，使复数与复平面上的点建立一一对应，一维的数扩展到二维的数，实数结构被复数结构所代替。在顺应过程中，知识结构发生了质变，同时，学习者的思维方法也产生飞跃，因此，顺应的结果是知识结构的质变和思维方法的飞跃。

定性评价法 也称非数量化评价方法。凡是在评价中不采用数学方法的都叫做定性评价法。如等级法、评定法、写评语等，都属定性评价法。定性评价是用评语或字符作为标度的标准。等级法是我国传统的评价方法，如上、中、下三级制；甲、乙、丙、丁四级制；优秀、良好、中等、及格、不及格五级制等。这些方法简便易行，但太粗略，标准不好掌握。评定法是用简明的评语按项记述评价的结果。它在评价技能或作品时比较常用。

定量评价法 也称数量化评价法。指在评价过程中采用数学方法的评价。定量评价是用分数作为标度的标准。在教育评价中采用数学方法有多种形式，有时用数学对教育现象进行描述；有时是分析教育现象时以数学作工具；有时是把评价结果用数字来表

述；有时是把评价标准用数字来表示；也有时是综合地运用上述几种方法等。平时学校中学科的考试，用分数来表达其结果，就是一种定量评价。常用的定量评价法有指数法、累积分数法、统计分析法、综合评判法等。数量化的评价方法在评价中越来越被重视，但采用起来也有不少困难。如有不少教育现象不能数量化，而且在数量化的方法中，也有不少主观因素的影响。

实验法　学生在教师指导下，运用仪器设备或材料进行实验实际操作，引起实验对象的某些变化，从观察和研究这些变化中，获得或验证知识的一种教学方法。这种教学方法普遍运用于自然科学的教学中，通常在实验室和实习园地或教室中进行。实验法能在理论和实践的结合中，加深学生对知识的理解和记忆，提高学生的实验能力和对科学的兴趣。根据实验的时间和目的实验法可分为：

（1）为学习理论知识所准备的直接经验的实验。这种实验是在学习理论之前进行的，准备工作要十分充分。

（2）验证理论的实验。这种实验是在学习理论知识之后进行的，其目的是加深对理论知识的理解。

（3）复习知识的实验。这种实验是为帮助学生巩固已学过的知识进行的，安排要具体明确，系统有序，达到复习的目的。

实验的组织形式有个别独立实验、小组实验。根据实践经验和教学计划的要求，教学中多提倡开设分组实验。

运用实验法教学的基本要求是：①做好整体准备工作。在学年或学期初，要依据教学大纲和教科书的要求，制定出实验课的教学计划，实验题目、实验顺序、实验仪器，实验材料、用具等。进行每次实验，教师要编制好实验说明书，划分好实验小组。②实验开始时，要向学生阐明实验的目的要求，说明实验的原理、方法、步骤和实验的注意事项。③在实验中要加强实验指导。依据实验的进展情况，善于提出思考性问题，让学生积极思考研究；实验过程中发现学生共同性问题，要对全班学生及时提出，及时指导；对个别困难较大的学生或实验小组要具体指导帮助，保证全班学生顺利完成实验任务。④认真做好实验总结。首先要指导学生记好实验记录，画好或填好必要的图表，写出实验报告。然后指定学生汇报实验过程、结果，由教师做出必要的小结，指出优缺点及克服缺点的方法。最后教师评阅学生的实验报告，注意分析产生错误的原因。⑤整理仪器，洗净归还原处，养成学生作实验工作的整体观念和善始善终认真负责的工作习惯。

实验法在中小学数学教学中虽不多用，但在所用之处对于发现、验证计算原理，启迪思维也是很有意义的。如中小学数学中求体积或容积的计算公式的由来，不少是用实验法得出的。

实物直观　直观的类型之一。它是在感知实际事物的基础上进行的。例如，观察实物标本，进行实验，测量或现场参观、实践等等，均属于实物直

观。通过实物直观，可以使学生获得关于实际事物的感觉、知觉、表象与观念。因为实物直观是在接触实际事物时进行的，所以它所得的感性知识同实际事物间的联系较为直接亲切。此外，它比较易于激发学生的求知欲，培养学生的学习兴趣，调动学生学习的极积性。但是，实物直观往往难于突出事物的本质要素，因为实际事物中，本质要素与非本质要素是结合在一起的，而且往往非本质要素比较突出、强烈，本质要素则较为隐蔽。例如观察球的实物时，球心到球面上各点的距离相等这个本质要素就难以觉察，而球体积的大小却很容易感知。其次，实物直观受时间，空间或感官的特性限制也较大。

实质教育说 亦称实质训练说。十八、十九世纪提出的一种教育主张。与形式教育说相对。认为在教学中应追求实质的目的，让学生学习有实际用处的知识。在获得知识的过程中就包含着能力训练的作用。这些主张有合理的成分，但是，它没有看到智力发展对掌握知识所起的作用，更没有看到两者之间区别的一面。其结果必然是对智力的发展缺乏自觉的努力，造成智力发展上的自流状态。实质教育说与形式教育说，都是各执一端，把知识、技能与智力、能力的关系割裂开来。这当然是不合理的，正确的主张应该是两者的统一。

试卷 考试中写明考试题目的卷子。根据考试双向细目表将试题选出之后，要根据考试的目的与性质，并考虑学生作题时的心理状态，将选出的符合要求的题目加以适当编排，组合成试卷。一般在试卷开头应该有一两个容易的题目，称作热身题，以使考生熟悉作答程序，解除紧张情绪，建立信心，进入考试情景。对试题总的编排原则是由易到难，形成梯度，这样可以避免考生在难题耽搁时间太久，而影响对后面问题的解答。在最后可有少数难度较大的题目，以测出考生的最高水平。如果同一份试卷中，包括不同性质的材料或不同形式的题目，则要把属于同一内容或同样形式的题目编排在一起，以便作答和记分。为了增加实际的效用，在很多情况下，试卷需要有复本。试卷的各份复本必须等值。所谓等值指符合下列条件：①测量的是同一种心理特性；②具有相同的形式；③题目数量相等，并有大体相同的难度；④内容范围相同，但具体题目不重复。

参数 根据已知的统计量推断得到的总体的各种量数，在统计学中称为参数。如总体平均数、总体标准差、总体相关系数等。参数一般不易获得，只能根据代表总体的样本求出统计量后，再用统计量去估计参数。

练习 一种有目的、有步骤、有指导的重复活动。但又不同于机械重复，它是形成技能的基本途径。练习的一般步骤是：教师首先提出练习的任务，说明练习的要求和方法并进行示范；其次是学生进行独立的练习，教师进行具体的指导；最后，师生检查，分析评判练习的结果，明确改进的要求。指导学生有效地进行练习，必须注意下列事项：

（1）要明确练习的目的和要

求，掌握有关技能的基本知识。

（2）要掌握正确的练习方法　教师首先通过讲解和示范，然后再让学生自己练习。要有意识地把解决问题的思维方法教给学生。

（3）要使学生知道每次练习的结果　并对结果有所分析。如果学生做得不好的话，还应该让学生知道，为什么做的不好，以及怎样才能做好。

（4）练习必须有计划、有步骤的进行　教师在选择练习内容，布置各种作业时，需要有适当的计划，坚持遵守循序渐进的原则。对于那些复杂的由多种智力活动组成的智力技能，可以从形成个别智力活动开始，而后以统一的程序，把它们联结起来构成一种复杂的智力技能。

（5）正确掌握对练习速度和练习质量的要求　一般来说，在开始练习的阶段速度要适当的放慢，保证练习活动的准确性，可以及时发现错误和困难，以便纠正和克服，保证练习的质量。

（6）练习的次数和时间要分配适当　技能的形成和保持，需要有足够的练习次数或练习时间，不仅在技能形成的阶段要反复练习，就是在技能形成以后，也要继续进行练习，使之保持和提高。练习的次数并不是越多越好，如果在一段时间内练习次数太多，练习时间太长，不仅浪费时间和精力，并且容易疲劳，容易产生消极态度，兴趣减退，练习的效果就会降低。练习的时间应适当分配。一般说，适当的分散练习比过度的集中练习优越。它可以使每次练习的效果较好，不仅时间较为经济，而且技能的保持也比较好。分散练习的次数和时间分配应该因不同的情况而异。一般在开始阶段，每次练习时间不宜过长，各次练习之间的时距可以短一些。随着技能的掌握，可以适当延长各次练习之间的时距，每次的练习时间也略可延长。

（7）练习方式要多样化　不仅可以引起学生的练习兴趣，保持学生的注意，而且还可以培养学生在实践中灵活地运用知识和技能。

练习，对于数学教学来说，有着更为重要的意义。它是数学教学的有机组成部分，对于学生掌握基础知识、基本技能和发展能力是必不可少的，是学生学好数学的必要条件。数学教学大纲规定，练习的目的是使学生进一步理解和掌握数学基础知识、训练、培养和发展学生的基本技能和能力，能够及时发现和弥补教和学中的遗漏或不足，培养学生良好的学习习惯和品质。在教学中要注意充分发挥练习的作用，加强对解题的正确指导，应注意多从解题的思想方法上去研究，引导学生对解题思路作必要的概括。大纲还要求，为了使练习能起到应有的作用，应注意：①目的要明确，题目要精选。②题量要适度，首先要保证有足够的基本题。③习题难度要适中，布置作业要区别对待。对学习有困难的学生，要给予必要的辅导。④要循序渐进，由浅入深，由单一到综合。⑤要求学生在做作业时，认真弄懂课文内容，独立完成作业。⑥在作业出错误时，教师应及时指导学生弄清错误原因，并要求学生及时

改正。⑦要重视实习作业。

练习法 学生在教师的指导下，依靠自我控制和自我校正，反复地通过一定的活动方式，巩固知识，形成技能和技巧或行为习惯的教学方法。练习法是各科教学广泛采用的。根据各学科不同的特点，练习的分类很多，主要的分类有：

（1）按培养学生不同方面的能力分为：口头练习，书面练习和实际操作练习等。

（2）按练习任务分为：解答问题的练习、绘制图形的练习、创作的练习、运动与文娱技能、技巧的练习等。

（3）按练习顺序渐进的过程分为：模仿性练习、独立性练习和创造性练习等。

（4）从具体学科分为：语文课的听、说、读、写练习、数学课的运算、解题、作图、测量练习，体育课的各种项目的练习、计算机课的实际操作练习等。

教学中，运用练习法的基本要求是：①明确练习目的，提高练习的自觉性。练习前要向学生阐明练习目的和要求；练习中要以理论指导，克服盲目性，增强自觉性，提高练习水平；练习结束要进行小结，以利再提高。②根据练习目的，精选练习材料。做到从学生的实际出发，加强基本技能训练，使典型练习，变式练习和创造性练习密切结合起来，触类旁通，举一反三。③掌握正确的练习方法，打好基本功底。任何练习都有各自的一套方法、程序和技能。开始时先向学生提出要求，教师正确示范，指导学生正确练习；然后教会学生自检和评价，总结优缺点，加深对所学知识的理解，进一步改进自己的技能、技巧。练习的原则是先求正确，后求熟练。练习的方式要多样灵活，以提高练习的兴趣和效果。④要进行有计划、有系统地练习。在练习的内容方面，应由浅入深，由易到难，由简单到复杂，由单一到综合；在练习的难度方面，应由模仿到半独立练习，再由独立练习到创造性练习；在练习速度和质量方面，开始适当的慢一点，以保正确性。在掌握了基本技能后，可逐渐加快，以求熟巧。⑤练习数量和练习时间要搭配适当。形成学生的技能、技巧和习惯，必须要有足量的练习。否则，是达不到目的的。练习的次数和份量，应根据学科的性质、练习的材料和学生的年龄特征，认识水平而定，不是越多越好。练习时间的分配，一般地说，分散练习比集中练习效果要好，一次练习的时间不宜过长，练习的间隔可逐渐延长。⑥掌握练习的结果。学生每次练习后，教师都要进行检查，发现错误，及时纠正，不断培养学生的自检能力和习惯。

练习课 以典型例题示范，师生共同分析、演算题目为主要教学任务的课。其目的是为了巩固所学知识，培养技能技巧。它的特点是教师先进行典型例题示范，而后由学生进行演算，以促进学生将学过的知识形成技能，并进一步训练思维方法和解题方法，以加深对基本概念，基础理论的理解和掌握。练习课的一般结构如下：①复习有关基础知识。复习方式可以是教

师提问，也可以由教师进行小结，②典型例题示范。示范题目要有代表性，做题步骤要完整。通过例题示范，总结出解题规律，归纳常用解题方法。③课堂练习。即学生独立做题。其中包括指定学生板演。练习过程中，教师要分类指导，因材施教，使差生和优秀生都在各自基础上有所提高，智力充分发挥。④教师小结。总结规律，肯定成绩，找出错误，不断提高。⑤布置课外作业。练习课中，例题示范是中心环节。如果典型题目较多，可适当减少课堂练习的时间。

组织教学　教师运用各种手段唤起学生的注意，建立良好的课堂秩序，保证课堂教学顺利进行的工作。组织教学是教师必备的一种教学能力，是提高课堂教学质量的重要条件。

组织教学集中表现于每节课的开始阶段，但绝不是局限于这一阶段，实际是它开始于上课的予备铃响，直至一节课结束，贯穿于一节课的始终。

组织教学的手段和形式是多样的，一般包括有形的和无形的，集中性的和渗透性的，警觉式的和未察觉式的等等。教师组织教学好，主要表现为在教学活动的进行过程中，不破坏全班学生的学习注意力，而随机地处理影响课堂教学的因素。处理的主要手段和方式是：教师讲课精神饱满，精力集中，以感染、影响学生；发挥眼神的威力，边讲边用眼光扫视，通过眼神对学生表示赞尝、鼓励或斥责、制止；用讲课声调的变化，停顿唤起全班学生或个别学生的注意；机智地采用提问或插入练习、议论等纠正课堂中的干扰因素，等等。要尽量防止采用停止讲课，厉声训斥、挖苦、讽刺的方式方法。

组合选择题　选择题的一种题型。这种题型的标准模式是在题干的后面列出四个用数字标明的选择答案，这些答案中，可以有一个、二个、三个或四个是正确的。考生首先要判断四个答案中哪些是对的，哪些是不对的。然后结合自己的判断，按规定的回答格式，选出对应的字母作为正确的答案。

终结性考试　是在一个大单元或一个阶段的教学计划完成之后所进行的考试。目的在于了解学生通过一定阶段的学习之后，全面地完成教学目标的情况。终结性考试的目标有三个，一是给学生评定成绩，二是为学生作证明，即证明某学生具有（至少在当时具有）某些技能、某类知识和能力；三是评定教学方案的有效性。学校中的期中考试、期末考试、学年考试、毕业考试等一般都是终结性考试。在编制终结性考试之前，一定要对需要考试的范围以内的全部教材进行分析，并根据教学目标列出所要测量的学习内容与教学目标的双向细目表。然后再根据双向细目表编选足以代表上述目标的样本，做为这一考试的试题。编选试题时，要充分考虑试题的难度和鉴别力。

终极教学目标　即教育目的。因为，教学是实施教育的基本途径，教学的终极目标就是教育目的。我国的教育目的是：培养德智体美全面发展的、有理想、有道德、有文化、有纪律，

热爱社会主义祖国和社会主义事业，具有献身精神和科学精神的社会主义建设者。

标准差 方差的算术平方根叫做标准差。用符号s或SD或σ表示（通常以s或SD代表样本标准差，以σ代表总体标准差）。标准差是标志离中趋势最有用的一种差异量数，应用最为广泛。标准差大，表示观测数据比较分散，个别差异大；反之，则表示数据比较集中，差异比较小。其计算公式有两种情形，由未归类数据求标准差的公式为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}。$$

式中，X为原始数据，$\overline{X}$为各数据的平均数，$x=X-\overline{X}$，即各数据的离均差，N为数据总个数。由归类数求标准差的公式为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(X-\overline{X})^2}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}}。$$

式中，f为各组的次数，$N=\Sigma f$。

标准误 从一个总体中，用随机抽样的方法，可以抽出许多样本，每一个样本都可以计算出平均数、标准差等统计量。如果把各个样本的平均数构成一种次数分配，即称为平均数的抽样分配。同样，也可以把各个样本的标准差，构成一种次数分配，这称为标准差的抽样分配。一般说来，从一个总体中所抽的各种可能样本的某种统计量的次数分配，称为抽样分配。而各种统计量的抽样分配的标准差，即称为标准误。用符号SE表示。如样本平均数抽样分配的标准差，称为平均数的标准误，记作$SE_{\overline{X}}$；样本标准差的抽样分配的标准差，称为标准差的标准误，记作SE_{σ}等。标准误实际上是为了区别各样本统计量的标准差与单独一个样本的标准差，前者称为标准误，后者仍称标准差。

标准分数 反映个人在团体中相应位置的统计量，又叫z分数。是以标准差为单位来衡量原始分数与平均分之差的。计算公式为

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}。$$

式中，x为原始分数，$\overline{x}$为全部原始分数的平均分，s为标准差。标准分数的功用之一，是将某个原始分数转化为标准分数之后，便可以表示出该原始分数在团体分数分布中所处的相对位置。如在数学考试中，某班的考试的平均分为77，其标准差为8.7。学生甲得了94分，乙得了56分。将这两个分数转化为标准分数：

$$z_{甲}=\frac{94-77}{8.7}=1.95,$$

$$z_{乙}=\frac{56-77}{8.7}=-2.41。$$

这就表明，学生甲的成绩高于平均分1.95个标准差，而乙的成绩低于平均分2.41个标准差。标准分数的功用之二，能够在两种或两种以上考试单位不同的数据分布中进行比较。如，学

生甲在数学考试中得80分，语文考试中得78分，该生哪科成绩较好？表面上看，数学成绩优于语文成绩。但这两科考试的试题内容不同，难易程度不同，因而分值也不同，是没法进行比较的。若将它们都转化为标准分数，那就可以比较了。如果该生全班数学考试平均分为75，标准差$s=7$；全班语文考试平均分为70，标准差$s=5$。那么，该生两科的标准分数为

$$z_{数}=\frac{x-\overline{x}}{s}=\frac{80-75}{7}=0.714,$$

$$z_{语}=\frac{x-\overline{x}}{s}=\frac{78-70}{5}=1.6。$$

显然，学生甲的语文成绩优于数学成绩。利用标准分数还可以衡量某科学习成绩的进步或退步，或进行几科学习成绩的综合比较等。

标准化考试 一种大规模的具有统一标准的按照系统的科学程序组织、并对误差作了严格控制的考试。这种考试必须达到以下几个环节的标准化，即试题编制的标准化，施测过程的标准化，阅卷评分的标准化，分数合成的标准化以及分数解释的标准化等。标准化考试一般由有权威性的机构主持，这个机构由命题队伍、考务管理队伍和统计、科研队伍组成。标准化考试的主要优点，一是其客观性，二是有可资比较的标准。但这种考试多偏重于知识技能掌握程度的测量，至于高层次的学习能力、态度、兴趣与习惯等难于测量，考生的解题思路及文字表达能力更难了解。

相关 事物或现象之间确实存在的数量上的相互依存关系。如，身高与体重的依存关系，物理学习成绩与数学学习成绩之间的依存关系等。相关有三种情况：（1）正相关 两列变量的变动方向相同，即一种变量变动时，另一种变量也发生或大或小的同方向变动。如，一般说来，身高越长则体重越重，这属于正相关。（2）负相关 两列变量的变动方向相反。即一种变量变动时，另一种变量呈或大或小的向相反方向的变动。如，学习成绩与请假时间的关系，就属于负相关。（3）零相关（无相关） 即两列变量之间毫无相互关系。如人的相貌与人的思想品质，身体的高矮与学习成绩的好坏等，就属于零相关。

相关系数 表明二列变量间相关程度的量数。相关系数如果从总体的数据中计算得来，称为总体相关系数，用符号ρ表示。相关系数如果从随机样本的数据中计算得来，则称为样本相关系数，用符号γ表示。相关系数包括从1.00至−1.00之间的各数值。若γ为+1.00，表示完全相关；γ之值为−1.00，表示完全负相关；γ之值为0，则表示零相关。相关系数的正负号只表示相关的方向，其绝对值表示相关的程度。一般对相关系数作如下解释：

±.00——±.20最低相关，可以忽略不计的相关。

±.20——±.40低相关，低微的相关。

±.40——±.70切实相关，较显

著的相关。

±.70——±.90高相关，显著的相关。

±.90——±1.00非常高的相关，极显著的相关。

相关系数的计算方法很多，如积差相关、等级相关、点双列相关等。

相对评价法 在被评价对象的集合中，选取一个或若干个对象作为基准，然后把各个评价对象与基准进行比较，或者是用某种方法把评价对象排成先后顺序。如在学校中，把全班学生的成绩由高到低依次排列，以个人在团体中所处的位置来判定优劣，这就属于相对评价。相对评价的特点是根据被评价对象的整体状态确定的，其标准只适用于所选定的评价对象的集合，对于另外的集合未必适用。由于相对评价是在某一类评价对象集合的内部进行比较，所以无论这个集合的整体情况如何，都可以进行比较，其适应性强，应用面广。但相对评价实属于"从矮子里选高"，评价结果并不表示被评价对象的真实水平，只表示他在被评价集合中的所处位置。

相对独立性 数学对象从现实世界中数量关系和空间形式发展为任意形式和关系，既舍去了具体对象的性质，也舍去了对象的具体关系，仅重视研究对象的量的关系的形式结构。每个概念同现实的联系逐渐成为间接的东西，在某种程度上表现为对于原始对象具体内容的相对独立性。另一方面，数学概念不仅产生于客观世界中的具体事物，而且产生于"思维对象"（如无穷远点，复数概念等），这些从思维对象产生的数学概念，尽管为数学理论的建立，对于现实世界的广泛应用有着重要的作用，但就概念的引入及其反映属性与现实内容相脱离来看，具有相对独立性。

相对位置量数 也称地位量数。表明一个数值在全部数据中所处位置的量数。如，一个学生的数学考了80分，这个成绩是好还是差呢？假如全班数学成绩平均为90分，那么该生成绩80分就是差的；如果全班平均成绩为65分，那么该生成绩就是好的。由此可见，原始分数并不表明它在全体中的地位。只有把一个量数放在全部数据之中，说明它在全体中所占的地位，才能作出正确的判断，表明它的意义。常用的相对位置量数有标准分数、百分等级、百分位数等。

相对差异量数 又称差异系数。用来表示两个测量单位不相同的数据的差异程度，或者两种以上测量单位虽相同，但其平均数相差悬殊的度量之间的差异程度。它是无名数，无实际单位的差异量数。用符号$C\cdot V$表示。两极差、四分差、标准差都是名数，是以数据原有单位为单位的绝对差异量数。它们只能用以比较两个测量单位相同的数据的差异情况。若测量单位不相同时，则必须使用相对差异量数。相对差异量数有平均差系数、四分差系数、标准差系数等，其中应用最广泛的是标准差系数。计算标准差系数的公式是

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{X}}\times 100。$$

式中，$C\cdot V$为差异系数，S为标准

差，$\overline{X}$为算术平均数。如，在某校初中一年级学生100人中进行调查，平均身高为134公分，标准差为14.5公分，平均体重为52公斤，标准差为3.2公斤。试比较该校学生的身高与体重两变量的差异程度谁大？这个问题因身高与体重二者单位不同，无法直接进行比较，只有分别求出其差异系数才能比较。代入公式

$$C\cdot V_{身高}=\frac{14.5}{134}\times 100$$

$$=10.82,$$

$$C\cdot V_{体重}=\frac{3.2}{52}\times 100$$

$$=6.15。$$

因为6.15<10.82，所以学生身高的差异程度比体重差异程度大。

研究法 这是辽宁省实验中学于1980年1月提出的一种教学方法。同年3月在该校初中二年级两个班的数学课进行实验。这种教学法是教师依据具体教学内容，按照教学目的，提出富有思考性的研究题目和要求，先由学生个人独立思考、琢磨，然后互相研究，得到初步认识、理解、判断和概括，再由教师归纳、总结、讲授正确答案，纠正错误意见，完成教学过程。概括起来"研究法"的结构和程序是：教师提出问题——学生独立思考——互相研究——回答教师的问题——教师总结提高，其实质在于使学生在独立思考的基础上，主动地探究问题，提出见解，发展思维能力。

点估计 在参数估计时，用一个数值作为样本统计量对总体参数的估量，称为点估计。如某省高校招生考试数学成绩，抽出2000份试卷进行统计，其平均分为$\overline{X}=83.35$，标准差为$s=18.11$。用这个平均分和标准差来估计全省高考数学成绩，平均分也为83.35，标准差也为18.11。这种估计便是点估计。点估计是一种粗略的不精确的估计。

点双列相关 点双列变量是指X与Y两个变量，其中一个变量是连续变量，而另一个变量是二分称名变量。点双列相关是检验一个二分称名变量对另一个连续变量是否产生影响，或影响程度大小的方法。二分称名变量指只存在两种变化可能的事物，如男与女、好与坏、对与错、及格与不及格等。点双列相关系数用符号γ_{pbi}表示，其计算公式为

$$\gamma_{pbi}=\frac{(\overline{X}_p-\overline{X}_q)}{S_t}\cdot\sqrt{pq}。$$

式中，p为二分称名变量中的一项在全部数据中所占的比例，q为二分称名变量的另一项在全部数据中所占的比例，$q=1-p$，$\overline{X}_p$为p部分的x变量的平均数，$\overline{X}_q$为q部分的x变量的平均数，S_t为全部变量x的标准差。如，16名学生的数学成绩统计如下，判断性别与数学成绩的相关。

表中性别为二分称名变量，数学成绩为连续变量，可用点双列相关，计算相关系数。计算步骤如下：①求p值，即男生在总人数中所占的比例，

$p=\frac{9}{16}=0.5625$。②求q值，即女生在总人数中所占的比例，$q=1-p$

学号	数学成绩	性别(男1女0)	男生成绩	女生成绩
1	68	1	68	
2	97	0		97
3	75	1	75	
4	93	0		93
5	89	0		89
6	100	1	100	
7	78	1	78	
8	88	0		88
9	80	1	80	
10	97	1	97	
11	92	1	92	
12	74	1	74	
13	55	0		55
14	89	0		89
15	77	1	77	
16	64	0		64
总计	1316		741	575

$=0.4375$。③求$\overline{X}_p$，即男生的数学平均成绩，$\overline{X}_p=\frac{741}{9}=82.33$。④求$\overline{X}_q$，即女生的数学平均成绩，$\overline{X}_q=\frac{557}{7}=82.14$。⑤求$S_t$，即16名学生数学成绩的标准差，$S_t=12.59$。⑥代入公式求$\gamma_{pbi}$:

$$\gamma_{pbi}=\frac{82.33-82.14}{12.59}\times\sqrt{0.5625\times0.4375}=0.0075。$$

计算所得的相关系数极小，趋近于零相关。这就表明，性别与数学成绩的高低无关。

尝试教学法 尝试教学法是目前我国小学数学中正在广泛实验的一种教学方法。这种教学方法在中学基础年级的数学教学中也有应用。

尝试教学法是1982年由邱学华提出来的，其实施过程可分为五步进

行，又称“五步教学法”。

第一步：出示尝试题。尝试题要同课本中的例题同类型同结构同档次。尝试题出示后，要提出启发性问题，激发学习兴趣。这时，对出示的尝试题有可能多数学生不会做，待转入第二步解决。

第二步：学生自学课本。在第一步基础上，学生产生解决问题的愿望，跃跃欲试。这时，不要求学生急于解题，教师应进一步指导学生反复阅读课本例题，待大部分学生对解答问题有了办法，即可转入第三步。

第三步：尝试练习。通过各种形式如板演等，给予各类学生尝试练习的机会。在学生练习时教师要巡视观察、及时了解学生尝试练习的情况。练习时学生也可以边看课本例题，边做尝试练习。待练习结束转入第四步。

第四步：学生讨论。根据学生板演等形式的尝试练习情况，教师应引导讲评讨论。使各类学生讲述自己运算的原理、方法和依据，不同的看法进行争论。待学生急于想知道自己尝试的结论时，便可转入第五步。

第五步：教师讲解。此时的讲解不是从头泛讲，而是针对学生感到困难的地方和教材的关键处，重点的有目的讲解。通过教师的讲解，使学生掌握系统的知识。

上述五步不是固定不变的，而是根据具体情况灵活运用。

尝试法是以现代教学论思想为指导的，是符合数学自身内在规律和学生认识规律的。它体现了以学生为主、自学为主和练习为主，发挥了教师的主导作用、学生的主体作用和课本的示范作用与学生间的相互作用。现在这种教学法已在全国26个省、市、自治区的许多学校实验取得了较好成绩。它的研究发展将向着探索立体的体系努力。

选择题　标准化考试中最常采用的一种客观性试题。这类试题在结构上包含两部分，一部分叫题干，由直接问句或陈述句（可以是完整的，也可以是不完整的陈述句）组成；另一部分叫选择项（亦称备选答案），即供学生选择的若干答案，一般有4—5个；其中一般有一个答案是正确的，其它3个或4个是错误的，叫干扰项，起迷惑作用。在选择题的题目前面，都有一段指导性语言（或称解题指令），目的是告诉学生正确答案的数目，如何答题和如何记分等。选择题有利于培养学生的判断能力、推理能力，因为考生必须对几个备选答案反复思考比较之后，才能决定取舍。多项选择题的迷惑答案有不同的难易程度，可以反映学生不同的错误观念。由选择题编制的试卷，试题容量大，知识覆盖面广，使抽样全面而有代表性。这类试题评分标准客观、统一，不受主观因素的影响，可使评卷电脑化。但是采用选择题，考生在选答中存有猜测的机会，任意猜测有时也能选中正确答案。并且这类试题不能测量学生完整的分析综合能力、归纳总结能力、文字表达能力等。选择题的类型很多，如最佳选择题、多解选择题、因果选择题、填

空选择题、类推选择题、分类选择题、改错选择题、配伍选择题、比较选择题、组合选择题等。编制选择题时应注意：①题目的措词必须清楚明白，准确无误。②题干要围绕一个中心来提问，各个选择项和题干的关系应是一致的。③题干要简练，尽量减少不必要的词语。④选择项不能用重复词语，否则会使试题显得啰嗦，给考生带来不必要的干扰。⑤在题目中要避免提供各种暗示。⑥干扰项必须具有似真性，对不具备相应知识的学生确能起到诱答、干扰的作用。⑦正确答案应无规则地排列在选择项的所有可能的位置上。⑧注意控制题目的难度。

总括学习 总括学习是一种从低级概念形成高级概念的学习，也就是在几个已知概念的基础上，学习一个概括和包摄程度更高的概念。在学习中，当进行概念的再次抽象时，就是一种总括学习。例如，已知某一连续曲线$y=f(x)$在定义域内的一点(x_0,y_0)的切线斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}。$$

又已知距离函数$s=f(t)$在t_0时的即时速度为

$$V_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}。$$

非均匀杆的线密度为

$$\rho_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}。$$

其中以杆的一端为原点，m表示从O到x的质量，则m是x的函数。

从这三个概念中，抽象和概括出包摄性更高的导数的概念。

进行总括学习，实际上是对已知的几个概念进行概括，抽象出它们的共性，得到表示这共同性的新的概念。它既需要学生对已有的概念透彻理解，也需要他们具有一定的抽象概括能力。总括学习的不断进行，使概念之间的层次结构分明，联系网络清晰。

是非题 也称真伪题。要求考生判断一个陈述句是对（真）还是非（伪）的试题。这类试题测量考生对问题的辨认能力。提供“是”的题目，要求“再认”已学过的知识；提供“非”的题目，要求考生从相似与相异之点进行辨别。是非题的优点是命题容易，回答简单，可以广泛取样，评分方便客观。但缺点是，这类题目只能用来判断定义、定理、公式、法则、结论的真伪，或片断事实的正反面，对于关联性和概括性知识的测量则不适用。而且答案的对与错各有百分之五十的概率，很容易使考生产生侥幸心理，进行猜答。是非题不能起诊断教学的作用，无助于教学的改进，在标准化考试中已较少采用。是非题的编写原则有：①试题含义必须单一，否则无法判断正误。②答案必须明确而无争议。③不可使用教材中的语句编制试题，应重新组织。④尽量避免使用否定句。⑤在全部是非题中，答

案为对与为非的比例应大体相等，并要无规则地排列在试卷中。

思考四法　（1）环境设人法　这种思考方法得益于印度的瑜珈术。就是要求将意念集中于一点，不受外界环境的干扰。虽在人声嘈杂的地方，也照例可以进行思考。

（2）寸暇续思法　这种方法是日本人新崎盛记提出的，就是充分利用间休、吃饭、洗澡等短暂时间思考，对于难以获得很多完整时间的人来说，最为适宜。

（3）散步思考法　这是根据亚里士多德的消遥派的学说提出的，即在室内思考疲倦时，到室外边散步、边思考，由于生理功能得到适当的调节，一些新想法就可能涌现出来。

（4）临床思考法　这是从梦中或半睡中产生的闪念，同样是思考的一种形式。但要注意将思考所得的东西及时记录下来，以免忘却。

上述几种思考方法，很适于数学教育工作在解证难题时之用。

思维技能　属于智力活动技能。我国学者林传鼎曾对其一般要素作了详细的列举和分类，具体内容如下。

（1）探索信息的技能

怎样寻找某种特殊课题的信息储存点

怎样提问

怎样使用图书馆

怎样使用参考资料

（2）吸收信息与保留信息的技能

怎样注意听、怎样学、怎样记（记忆术启发法）

怎样进行理解式的阅读

怎样测验自己的理解程度

（3）组织技能

怎样安排那些应优先解决的问题

怎样安排时间

怎样分配物力（在有限时间和物质条件的范围内，一个人要怎样安排自己的生活以便尽可能地把那些最重要的事情做好）

（4）发明的技能

怎样发展好探究的态度

怎样进行归纳推理

怎样形成观点和假说

怎样取得新观点

怎样应用类比

怎样把现成的工具应用于解决问题（避免“功能的固定化”，提倡灵活性）

（5）分析的技能

怎样发展批判的态度

怎样进行演绎推理

怎样评价观点和假说

（6）做决定的技能

怎样识别待决的各种可能性

怎样做出合理的选择

（7）交流的技能

怎样通过口头的和书面的方式表达观点

（8）社会技能

怎样避免（或解决）人际间的冲突

怎样进行合作（并取得合作）

怎样进行适当的竞争

怎样引起别人行为的动机

（9）次认知技能

怎样评价自己的认知活动

怎样从各种已知的可能性中选择出解决问题的确切方法（策略）

怎样集中注意待决的问题

怎样决定何时对一种难对付的问题停止工作

怎样判断到底一个人是否理解他所听到或看到的事

怎样从一种情境中所学到的原则或方法转用到另一种情境中去

怎样判断目标是否和能力相一致

（10）其他技能

怎样接受测验

思维技能的一般要素可以结合各学科的教学，尤其是数学教学，得到训练。

思考型教学 又称思考水平的教学或探究性理解水平的教学。是在教师主导作用下，学生主动解决问题的教学。它和说明性理解水平的教学之间的区别在学生掌握知识、获得理解的途径和主体的积极状态的差异。它要求学生进行反复思考，促使学生重组以往的经验，形成新的认知结构。处在这种教学水平的学生，既可将学习的知识内化为自己的精神财富，又能在学习过程中养成好奇、探究、思考、发现等良好的学习习惯，为创造能力的培养打下有力的基础。从发展智力的要求说，应当尽可能提高教学水平，而思考水平的教学是最能促进智力发展的。

思维的七把钥匙 （1）质“疑” 学起于思，思源于疑。疑是引起定向的探究反射，产生思维。

（2）引“趣” 凡富有情趣的东西，大多能引起人们的思维和联想。

（3）勤“学” 知识是思维的基础，学习愈勤奋，知识愈丰富，思维越敏捷，成效也越大。

（4）攻“难” 华罗庚有句警语：“下棋找高手，弄斧到班门”。锻炼思维也是如此。

（5）动“情” 俗语说：“知情达理”。先动之以情，引发思维，再达到晓之于理。

（6）求“变” 对现有的知识结构重新组合，对已熟悉的事物变换一个角度再认识，以激发思考。

（7）务“体” 全面地、辩证地考虑问题，思维才能开出娇艳瑰丽的花朵。

“怎样解题”表 世界著名的数学家、数学教育家波利亚集数十年教学和科研经验归纳的一张表。表中对如何“弄清问题”、“拟定解题计划”、“实现解题计划”及“验算答案”提出了指导性意见。利用这张表教师可以行之有效地指导学生解题，发展学生独立思考和进行创造性活动的能力。全表如下：

弄清问题

第一 你必须弄清问题。	未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？ 画张图。引入适当的符号。 把条件的各个部分分开。你能否把它们写下来？

拟定计划

第二 找出已知数与未知数之间的联系 如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。 你应该最终得出一个求解的计划。	你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？ 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？ 看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。 这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。 你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了利用它，你是否应该引入辅助元素？ 你能不能重新叙述这个问题？你不能用不同的方法重新叙述它？ 回到定义去。 如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？ 你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

第三 实行你的计划。	实现你的求解计划，检验每一步骤。 你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

回　顾

第四 验算所得到的解。	你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？ 你能不能把这结果或方法用于其他的问题？

科学性和思想性统一原则　科学性和思想性统一，是指教学既应使学生获得科学文化知识，发展科学探索能力，又能使学生受到一定的政治思想品德教育。科学性是指教师在教学中，以科学态度，运用科学方法，向学生传授系统的科学知识。思想性是指教学要体现社会主义的政治方向，辩证唯物主义世界观和共产主义道德精神，防止非无产阶级思想对学生的不良影响。

科学性和思想性是辩证统一的。

科学性是思想性的前提和基础。共产主义道德情操的培养，共产主义世界观的确立，各种文明行为习惯的形成，都需以科学知识为基础。在教学中不能脱离科学文化知识，空洞地进行思想教育。教学通过传授科学文化知识，提高学生认识，使学生在有关政治和道德知识的科学基础上，形成共产主义世界观。思想性是科学知识的内在属性，在传授和学习科学文化知识的同时，不可避免的有某种思想、观点和道德精神影响着学生。教学永远具有教育性，这是教学的客观规律之一。古今中外的统治阶级，都是从各自的政治目的出发，利用这一规律培养自阶级的接班人。

贯彻科学性和思想性统一原则，在于在整个教学过程中，认真运用马列主义、毛泽东思想的立场、观点和方法，这是根本保证。教学的科学性和思想性只有在社会主义制度的条件下，才能够实现完美的结合。

贯彻好这一原则，必须做到：①教师向学生传授的知识必须是科学的。就是努力实现教学内容的现代化。以最新的科技成果，先进系统的基础知识和基本技能武装学生。中小学教育是基础教育，中小学教学内容现代化，要根据现代科学技术的发展、参加现代化生产的基本需要、学生接受的可能性，将基础知识和先进知识统一起来加以确定。做到在教学中讲述数学概念要准确，论证要严密，推理要有据，引用材料要可靠，演示要正确。②在教学中，教师的教学态度，教学方法，教学过程的设计和安排都必须是科学的。注意培养学生进行科学探索的初步能力和科学地从事劳动的习惯。③在整个教学过程中，要坚持贯彻马列主义，毛泽东思想的立场、观点和方法，充分挖掘教材中寓含着的思想性，通过教师发挥，成为现实地影响学生思想品德的一种力量。教师要自觉地用马列主义观点方法，去分析理解教材，将教材中的思想性，和学科的特点、学生的实际，有机地结合起来进行教学。要防止脱离知识传授的空洞说教和将教学中的思想教育庸俗化的做法。④教师要用高尚的思想品德和实事求是的科学态度来增强教学的科学性和思想性。教学活动集中体现了教师的人格、精神面貌和道德修养，教师的科学态度，学风及言谈举止都对学生有着潜移默化的影响作用，这种教学因素是不可忽视的。

复习课 以系统复习所学知识为主要教学任务的课称为复习课。其目的是巩固过去所学的知识。复习课分为阶段复习和学期复习两种方式。阶段复习就是在一个单元或一章结束后，根据学生学习情况，对该单元或该章节的内容进行系统地有重点地讲解。

学期复习就是在期末考试前的复习。除系统地重点地复习教材内容之外，特别要注意知识的综合运用。复习课的一般结构如下：①提出复习内容，进行系统复习。复习方式，有教师系统总结性讲解；有教师提出问题，由学生回答，教师再总结。在复习基础上，教师向学生指出重点和难点，以引起学生的注意。②综合性典型题目示范。③布置课外作业。复习课中，系统地复习学过的知识为重

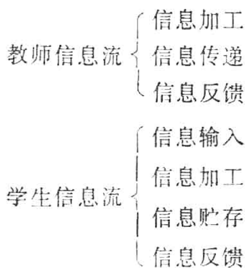
点，它与新授课是不同的。

顺序变量　可以就事物的某一属性的多少、大小、优劣按次序将各事物加以排列的变量。如将学习成绩按分数高低排列名次，分为第1名、第2名、第3名等。顺序变量可以反映事物在数量方面的差异，但没有相等的单位，也不具有绝对零点。如按考试分数排列名次得1、2、3名，从形式上看各名次之间各相差一个等级，实际上各等级之间的距离并不相等。如，100分为第1名，92分为第2名，91分为第3名。三个分数间的差别是不相等。另外，等级也具有相对性。仅有4人的第3名与100人中的第3名其意义是大不一样的。

信度　考试所得结果的稳定性和可靠性。是保证考试质量的一个重要指标。表明信度大小的统计量叫做信度系数，其最大值为1。考试可以看作是一种对于学习结果的测量。假定测量十分准确，完全没有误差，那么，考试的成绩与学生的真实水平应该完全一致，即考试的实得分数与学生的真实水平（理想的真分数）就会完全符合。在这种情况下，我们说考试的信度最大，或者说这次考试的分数完全可靠。但实际中的任何考试，都存在误差。我们只是力图将这种不可避免的误差能降低到最小程度。信度一般与某种特定情境有关。由于测量误差的来源不同，计算的方法不同，信度可以分成不同的种类，如稳定性信度，等值信度，分半信度，库李信度等。不同种类的信度系数不能相互比较。另外，仅仅信度高，也不一定就是好的考试，还必须看考试是否有效。从信度与效度的关系来看，考试的效度高，其信度也高，但信度高的考试，其效度并不一定高。

信息　物质的一种存在形式，它以物质的属性或运动状态为内容，并且总是借助于一定的物质载体传输或贮存。信息可以被观察者所感知、检测、识别、提取、传输、贮存、显示、分析、处理和使用，它是决策的依据、控制的基础、管理的保证。

教学过程实际上是个信息传递加工、反馈过程。其中存在两条最基本的信息流，一条以教师为中心结，另一条以学生为中心结：



这里，教师的信息加工就是通常所说的备课。信息传递就是指教学过程中，教师按照原先制定的计划，采用一定策略输出知识信息的活动过程。信息反馈则是指教师通过一定的手段了解学生在学习领域内的最新发展水平，并且与原有目标进行比较，从而决定进一步教学策略，调整教学进度，加强有针对性的因材施教的活动过程。所谓学生信息输入，就是指学生通过眼、耳、手等各种器官接收外来知识信息的过程，这里不仅仅局限于教师在课堂上所传递的信息，还包括书本上、参考资料上、同学间相互

传递的信息。所谓信息加工就是指学生通过自己的大脑对输入的信息进行思考得以实现理解的过程，也就是运用已有的知识去认识一种新事物和其他有关事物的联系或关系，并且能够在新的情境中加以运用。所谓信息贮存则是指学生对所学知识进行编码、分类、记忆的过程。对于学生来说，信息反馈则是通过作业、测试后教师的评价、同学间的相互评价和自身的评价，了解自己的学习效果，诊断自己的学业水平，从而调整自己的学习行为、学习态度等方面的活动过程。

两条信息流之间，彼此相互联系，又相互依赖，都以对方为自己存在的前提。

衍支程序 又称分支式程序或内在程序。通常是把教材分成具有相对于直线程序来说大得多的信息量的部分（“卡片”），在每一卡片的末尾对学生提出问题。学生不是自己说出这个问题的答案，而是在给出的几个答案中选取一个，其中只有一个答案是正确的。对着每一个答案都标出选择这个答案的学生应接下去的页数。选择了正确答案的学生将被送到呈现新材料的下一卡片。选择了错误答案的学生将被送到另外一页，这里有对他的错误所作的分析，并建议他或者是回到原来的卡片仔细阅读，作出正确选择，或者是转看对他所不理解的材料有补充说明的一页。衍支程序使用多重选择，考虑到学生回答时可能产生的错误，从这个观点来看，它更接近于教学的实际过程。特别重要的是衍支程序引导不同的学生按不同的途径去掌握知识。在补充解释中考虑到学生能力的差别，一个学生可能由一部分新材料直接转入学习下一部分新材料，而另一个学生却必须利用补充说明、分析自己由于对教材不理解而形成的错误答案。

差异量数 描述一组数据离中差异情况或离散程度的量数。为了全面了解一组数据的次数分布的情况，不仅要研究数据的集中趋势，计算出某些集中量数，还要考察这些数据的离散程度，计算其差异量数。只有掌握了集中量数和差异量数，才能比较清楚地了解次数分布的全貌。集中量数在量尺上是一个点，表示数据的代表值所在的位置；差异量数在量尺上是一段距离，表示数据与集中量数相差的距离。对一组数据的全貌来说，差异量数越大，集中量数的代表性就越小；差异量数越小，集中量数的代表性就越大。常用的差异量数有两极差、百分位差、四分位差、平均差、标准差、方差等。

类推选择题 选择题的一种题型。这种试题在学能考试中用得较多，主要测量考生对事物间关系的概括能力和推理能力。其形式一般是题干分为两部分，前一部分是具有某种关系的两项（中间多以“⟶”相连），后一部分则只有前项和“⟶”。解答时，考生应先分析出前一部分的两项间所具有的关系，然后进行类比推理，从备选答案中找出符合这一关系的答案。答案是唯一的。例如，“$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\longrightarrow\frac{3}{5}$，$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1\longrightarrow$（ ）。（$A$）$\frac{5}{3}$；

（B）$\frac{5}{4}$；（C）$\frac{4}{5}$；（D）$\frac{3}{5}$。"

答案选（B）。

前馈　当环境变化所产生的干扰信息作用于受控部分引起输出信息改变的同时，干扰信息也可直接作用于控制部分，这就可能在输出信息未出现偏差之前，控制部分即可发出控制信息纠正即将发生的偏差，而不是产生了偏差之后通过反馈信息再来纠正。干扰信息对控制部分的这种直接作用，且控制部分又能理解这一作用的影响，称为前馈。前馈与反馈是密切联系的。比如，学生在屡次犯过某种错误并经教师不断订正后，再出现类似的情况，便会立即提醒自己，避免错误的发生。有经验的教师常常对学生头脑中正在孕育的错误，通过提醒、暗示、防患于未然，这也是在发挥前馈的作用。可见，前馈是以反馈作为基础的。

前馈控制　一种带补偿的控制方式。具体地说，就是控制部分不断地直接接受干扰信息，根据干扰对被控对象可能产生的影响，产生一补偿信号，用以抵消干扰的作用，使系统输出不会因干扰的存在而发生变化。这种控制方式是以要求能测得干扰信息，以及具备有关方面知识（如干扰对系统产生什么样的影响和影响方式等方面知识）为前提的。在这类控制系统中，特别注意预测与决策方法的运用，估计出可能产生的问题，采取防预措施，以防患于未然。但是，有些随机因素难以预测，会给这种控制方式带来困难。因此，人们更多地还是采用反馈控制。

测验法　评价学生学习成就的主要方法，是学校中应用最多的，最主要的考查学习成果的方法。心理测验学家布朗认为：测验是对一个行为样本进行测量的系统程序。所谓"系统程序"是指测验在编制，实施和评分等方面都是依据一定的规则确定的。测验的题目依据测验的目的经过系统地选择；测验实施的方法和评分按事先确定的规则进行。所谓"行为样本"中的行为，是指学生对测验题目所进行的反应。人们根据这种反应去推断所要测量的东西。测验作为一种测量工具，必须根据一定的目的慎重地选择具有代表性的行为样本——测验题目。同时，在评分和实施上都应有确定的标准和规定，这样才能获得真实的测验结果。

测验双向细目表　从教学内容与教学的认知目标两个维度编制出的测验的明细表，它是测验的蓝图。在双向细目表中，一向栏目表示教学的认知水平（即学习水平），另一向栏目填写知识内容。学习水平反映了试题中能力因素参与的程度，体现试卷的能力要求。常用的有布卢姆的学习水平分类系统，也可以根据学科特点对其加以适当修订。知识内容反映了试题中的知识要求，透过它可以了解整个试卷对知识点的覆盖情况。如果测验的容量较小，象教完某一单元之后用形成性测验检查学生的知识掌握情况，则所有的知识点都必须一一详细列出。命题时要考虑测试题与知识点之间的紧密对应。如果测验的容量较大，一次测验不可能检查到所有的知识，则列出的知识点必须作一定程度的抽

象与综合，站在学科的高度，把所有预备性知识或单项性知识都列入到它最终所能归纳的大知识点中去，这时列出的知识点就不是单一孤立的知识，而是包含其预备知识，有密切联系的知识及直接推论的知识等一连串的知识块。在双向细目表中，对各级学习水平要加权重，对知识内容也要加权重，它们分别列在最后一横行及最右边一纵列中。栏中纵横交叉的格内填写得分点。如下列初中二年级平面几何第一学期期末考试双向细目表：

知识内容 \ 学习水平	识　记	理　解	应　用	分　析	综　合	评　价	Σ
直线、射线、线段	1	1	1	1			10%　4
角	1	1	1	1			10%　4
相交线、垂线		1	1				5%　2
平　行　线	1	1	2	1	1		15%　6
命题、定理、证明		1	1				5%　2
三　角　形	1	1	1	1			10%　4
全等三角形	1	2	3	1	2	1	25%　10
等腰三角形	1	2	2	1	1	1	20%　8
Σ	15%　6	25%　10	30%　12	15%　6	10%　4	5%　2	100%　40

测量、评定与评价　测量和评定是人们根据确定的目标，进行评价活动的重要的前期阶段，它主要是进行信息资料的必要收集和前期整理。例如，测量是使用一定的测量尺度，对学生的性别、知识水平、学习能力、兴趣爱好、体力体质、个性特征等及与教学有关的其他事物进行测定，取得数量或可量化的文字资料。评定主要是在测量的基础上，简单地对这些量进行性质的描述，如合格与否，等次排定等。但这种分析一般不一定去参照教育目标作出价值方面的判断。因而，评定与评价是有区别的。但是，人们在利用语言传达思想的时候，往往存有相当大的模糊度。而一些词语的内涵和外延，往往又是约定俗成，并会随着时代的发展有所变化。因而，有人认为评定就特指相对评价，把评定作为评价的子概念；也有人把评定概念囿于“评定法”范围之中；还有人把教学过程中的评价看作是评定。

客观性试题　又称固定应答型试题。因评分客观而得名。是一类在评分时，排除了主观因素的影响，能客观地记分的试题。客观性试题有明确的标准答案，评分的标准是客观、固定、唯一的，对就是对，错就是错，

毫不含糊。没有基本正确、基本掌握、基本理解等模糊说法。回答问题的方式比较固定，答案单一，回答正确与否，不受阅卷人主观因素的影响。可采用计算机阅卷。采用这类试题，可以在较短时间里，测试较多的内容，取样广泛系统，对知识考查的覆盖面大，有助于提高考试的信度和效度。客观性试题适用于测量识记、理解、应用、分析等较低层次的认知目标。这类试题难以测量综合、评价等较高层次的认知目标。特别不易考查学生的解题思路、观点、态度及文字表达能力等。采用客观性试题的测验，难以排除考生对试题随机猜测引起的测量误差。客观性试题的主要题型有：简答题、是非题、填空题、配对题、排列题、多项选择题等。

语言直观　直观教学的类型之一。它是在形象化的言语作用下，通过学生对言语的物质形式的感知及对语义的思维、记忆及想象而进行的。在各科教学中，语言直观是经常的。例如，数学教学中，对直线、平面就是通过生动的言语描述唤起表象的。以学生熟悉的事例来引进概念的教学方式，更是常见的。这实际上也是在利用语言的作用，使学生回忆起有关事物的形象，为所要领会的概念建立起直观表象基础，也是在发挥语言直观的作用。语言直观有许多优点，特别是培养学生的想象能力有独特作用。但是，由于语言直观主要依靠想象和表象的作用，所以它也有一定的局限性。因此，在可能情况下，配合实物或模象直观将会提高直观的效果。

误差　在统计学中，一般指测得值与真值之差，以及样本统计量与总体参数之差。误差主要可分三类：系统误差、过失误差和随机误差。在观测实验过程中，由于实验条件不同，或主试者对实验要求与指标不够明确，实验时掌握过宽或过严，因而使观察结果出现有倾向性的偏大或偏小，由此而取得的数据出现服从确定规律误差，这些都称作系统误差。在收集资料过程中，由于过失造成的错误，如测错、记错、传错、仪器失灵等错误，使调查或实验出现明显的误差称为过失误差。随机误差又称偶然误差。产生这种误差一般有两种情况。一种是由实验中的一些偶然因素引起而又不易控制的误差。另一种是随机抽样中产生的误差。由于抽样而引起的样本指标(统计量)与总体指标（参数）之间的差异，就叫做随机抽样误差。

结构　系统内部各个要素的组织形式。和结构密切联系的是功能，它是指系统在一定环境中所能发挥的作用。不同的结构往往表现出不同的功能。结构这一概念在教学中是经常使用的，例如，知识结构，是指知识系统内各知识点的组织形式，认知结构，是指知识系统在学生头脑里的组织形式；能力结构，是指各能力成分的组织形式，等等，还说到课堂教学结构，实际上是教师、学生、教材和其他教学条件在课堂教学活动中的组织形式。

结构效度　考试的成绩能以心理学的属性来解释的程度。例如，要测量学生的“空间想象力”，空间想象力具有某些心理特征，这些心理特征就是

"结构"。要考察"空间想象力"，就要考虑这个结构。结构效度就是测量符合理论上的结构的程度。结构效度要根据理论框架，以逻辑和实证研究的方法取得。

绝对评价法　在被评价对象的集合之外，确定一个标准，这个标准称为客观标准，在评价时，把评价对象与客观标准进行比较。绝对评价不照顾评价对象集合的整体状态。学校中的会考就属于绝对评价。评价标准是国家教委颁发的教学大纲和教材。在考试时，是假定试题覆盖了教材和教学大纲规定的基本内容。评价的尺度是分数，如果满分是100分，那么凡是60或60分以上者都算合格。绝对评价的标准比较客观。如果评价是准确的，那么评价之后，每个被评价者可以明确自己与客观标准的差距，从而可激发被评价者积极上进。但绝对评价的客观标准很难达到客观，这是它的不完美之处。

统考　由国家或地方教育机关统一组织的考试。这种考试可以按其目的分为：升学考试（或称招生考试），是决定学生能否升入高一级学校的主要依据；毕业考试，是判断学生是否完成一定教育阶段的学习任务，能否毕业的主要依据；学科考试，是为了促进学校提高教学质量而组织的同一层次的若干学校，对同一年级的学生进行某一门（或几门）学科的考试。

统计表　统计中表达数据资料的方式之一。把所研究的现象和过程的数据资料，用简明的表格形式加以表达，这种表格即为统计表。统计表能正确地显示出数据资料所蕴含的某种意义，使人一目了然，便于各项之间相互关系的比较，便于检查，便于总计。统计表的分类较多。较普遍的是根据数据分类所依据的研究对象的特征数目的不同，而分为单项（向或栏）表、双项表、三项表等。编制统计表应注意的规则有：①表的内容要简明扼要，主题突出。②表的标题要能简要确切地说明表的主要内容，总标题还应该表明资料所属时间和地点。③各栏的标目要准确，并且注明指标的计量单位。④各项数字要填写准确、整齐、完整，每一栏的数字要对准数位，整数在四位以上的要标出分位点"，"。当数字为0时，用"—"符号表示，缺资料时，用"……"符号表示。⑤统计表的表式，一般是"开口"式的，即表的左右两端不画纵线。⑥资料来源和需要说明的数字，应在表下附注说明。

统计图　通过点、线、面、体及色彩等的描绘，利用几何图形或事物的形象来表示各种数量间的关系及其变动情况的图形。统计图种类甚多，可分为条形图、曲线图、直方图、圆形图、象形图等。绘制统计图，首先要根据统计资料的性质、绘制统计图的目的，选择适当的图形，并规划图形的结构。其次是定坐标、划分尺度、画图形。最后是上墨着色，书写标题及图例说明等。绘制统计图一般的规则有：①图的标题须简明扼要，并能正确表现图形所反映的主要内容。标题写在图的下方。标题文字宜由左向右排列。图的标号应排在图的标题的前头。②图的尺度线与图形基线要垂直。尺度分点要清楚。不能用同一尺

度表示性质不同的两种计数单位。③图的横坐标上的数字，须自左向右排列，小数在左，大数在右。纵坐标上的数字，则由下而上排列，小数在下，大数在上。④图中所画各种不同的线，应根据重要性而有较粗较细之分。⑤数量大小最好用条的长短来表示。⑥用同一图形比较时，要使用同一比例。长度一定，可比较宽度；宽度一定，可比较长度。⑦图形要位于图的中央，所占面积应以图框内面积的一半为宜。图例说明应与图内图形一致，并且要放在图内适当的空白地方。⑧图注：凡图形或其局部某一点，需要借助文字或数字另行补充说明的，均属图注部分。图注的文字要少，字型要小。

统计量　直接从样本计算得到的能代表实际资料的集中趋势、离散程度、相关系数等特征的各种量数，统计学中称为统计量。例如，平均数、标准差、相关系数等。

统计分类　依据某种标准将统计资料进行归类或分组。是统计资料整理的方法之一。统计分类所依据的标准叫做分类标准。统计分类的标准应当是明确的，不能含糊不清，所划分的类别应当是互相排除，亦即互斥的，互不相容的。任何数据资料都应有类可归，绝不能出现无类可归的数据资料。

统计推断　根据样本的资料，对总体的某些性质进行估计或作出推测性的判断，从而认识总体，这就称为统计推断。统计推断是由部分推断总体，由已知推断未知。统计推断包括两大部分，一部分是参数估计，参数估计又分为点估计和区间估计；另一部分是统计假设检验，常用的统计假设检验有z检验、t检验、x^2检验和F检验等。

统计检验　又称差异显著性检验。它主要是检验样本与原来的总体之间（或样本与样本之间）的差异是否显著，亦即检验实验效果是否显著。在统计学中，差异是否显著，是以差异由机会（随机误差）产生的概率大小为判断标准的。如差异由机会产生的概率很小，则实验效果就明显，即差异显著；反之，如差异由机会产生的概率大，则实验效果就不明显，即差异不显著。统计检验，是先假设总体具有某一特定性质，然后根据样本数据，运用概率统计方法去验证这个假设是否成立。这个假设称为虚无假设（或零假设、解消假设）。虚无假设的对立面是备择假设（或研究假设）。统计检验的基本步骤是（以z检验为例）：①建立虚无假设与备择假设。如H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$。②计算统计量值（z值）。③确定显著性水平α值。根据研究问题的要求，确定α后，查表找出临界值z_α，从而确定检验的临界区域。④作出判断。把②中求得的z值，与查表所得的z_α相比较，如果$z\geqslant z_\alpha$或$z\leqslant -z_\alpha$，拒绝H_0，否则，接受H_0。

统计资料的表列　整理数据资料的方法之一。就是对统计数据分别归类，用数字表达其间的相互关系，以便于相互比较的一种方式。表列的方法与数据的统计分类分不开。

统一要求与因材施教相结合原则　在教学中，要面向全体学生，不仅有统

一的要求，而且也要从学生的实际出发，根据学生的认知水平、年龄特征和个别差异进行教学，使每个学生都在各自的基础上向着培养目标不断前进。

因材施教是我国的传统教学的宝贵经验。贯彻因材施教原则是我国的教育目的所要求的。它反映了学生心身发展的客观规律。我国社会主义教育方针要求使每一个学生都得到全面发展。但是，不同年龄阶段的学生有着不同的生理、心理特点。各个学生因遗传因素，生活环境和所受教育的不同，形成了在知识经验，智力发展水平，思想状况，个性特征等方面都有若干差异，教学要从这些实际情况出发，有针对性的进行，促进全面发展。

要贯彻好因材施教的原则，必须做到以下几点：①要深入了解学生的一般特点和个别差异，这是贯彻这一原则的前提。由于一定年龄阶段的学生，其主观条件和客观条件的制约，知识经验、接受能力在不断地发展变化，所以教学要注意适应学生现有的发展水平，积极促进其水平的不断提高。一定年龄阶段的学生有他们的共性，也有各自的个性差异，因此，教师还必须对全体学生中的每个学生都有全面、详细地了解，特别是对学习后进生，智力超常生，以及有特殊才能的学生，更应掌握他们特点，及早发现，及时采取措施。②教学要面向大多数，照顾两头。在班级授课制的条件下，教学的深度，广度和进度，要以大多数学生的知识经验，接受能力和发展水平为依据，保证能基本完成教学计划，使大多数学生达到教学大纲所规定的要求。对于学习后进生和学习优秀生，要针对情况，分别采取不同措施，如个别布置作业、个别辅导等。③要根据学生各自的个性特点，分别提出有针对性的教学要求。因此，教师要在充分了解学生的基础上，对他们分别提出不同的要求，以促使他们发扬优点，克服缺点，培养其兴趣爱好，努力发展特长。

班级教学制　亦称班级授课制。对学生编级分班进行集体教学的制度。具体地说，就是把一定数量的学生按年龄和程度编成班级，每一个班级有固定的学生和课程，由教师按照固定的教学时间表对全班学生进行上课的一种制度。早在十六世纪，西欧的一些学校中就出现了按班级编制进行教学的形式。十七世纪初，捷克教育家夸美纽斯对这种形式作了理论上的论证和方法上的阐明，由此建立了一套班级授课的教学制度。十九世纪在欧美各国广泛推行。我国最早采用班级授课制的是1862年北京的京师同文馆，到1902年颁布《钦定学堂章程》以后，逐渐成为全国学校的教学组织形式。

实践证明，班级授课制具有以下特点：

（1）它有利于经济而有效地大面积地培养人材　由于班级是按学生年龄、程度编排，由教师根据统一的教材对全班进行教学的，各门学科均按照一定的教学时间表有计划地、轮流交替地进行，因此无论从时间还是空间来看，它都是使学生在较短的时间内能有系统、有重点地学习人类

丰富知识体系的一种比较经济、有效的形式。

（2）它有利于发挥教师的主导作用　在班级课堂教学中，教师是有目的、有计划、有组织地面对全班学生进行教学的。它保证了在整堂课中，每个学生的学习都自始至终在教师直接指导下进行。

（3）它有利于发挥集体的教育作用　由于同一班级中，学生的学习内容相同，程度相近，因此彼此之间在学习上、思想上遇到困难和问题时，有利于开展讨论、相互促进、共同提高。

班级授课制有它的优点，但是，它也存在着难以克服的缺点。主要是不能适应学生的个别差异，不能发挥学生的全部潜在可能性，其结果往往造成能力弱的学生得不到帮助，能力强的学生无法充分发挥他们的能力，求知欲望得不到满足。因此，现在各国教育界都在研究怎样在课堂教学中做到面向全体学生和因材施教相结合，课堂教学中怎样开展个别化教学活动等等，以及如何通过多种形式的课外活动来弥补课堂教学的不足。

热身题　试卷前面的一、二道试题，往往很简单，一望而知，既使是成绩很差的考生也很容易通过，称为“热身题”。编排热身题的目的在于鼓励学生参加考试的积极性，坚定其考试信心，以便考试能测量出考生可能达到的最高水平。

速度考试　以测量学生掌握知识技能的熟练程度为目的的考试。这种考试要求试题难度一致，一般都比较容易。要求考生在严格限定的时间内解答，主要以正确解答题目的数量作为成绩指标。速度考试与难度考试的划分是相对的。一般来说，每次考试既有速度的因素，又有难度的因素。

配合题　又称配对题、连接题。一类复合式的选择题，也属客观性试题。通常这类试题包括两栏，分别列举两组事，要求考生将第一栏中的每一项与第二栏中的适当项目互相配合。这类试题用以测量学生对概念、公式、法则、性质等关系的了解与联结的能力。例如，“请把左右两列中的相等的式子的代号用线段连结起来：

甲：$\sin(\alpha+\beta)$　　① $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

乙：$\sin(\alpha-\beta)$　　② $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

丙：$\cos(\alpha+\beta)$　　③ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

丁：$\cos(\alpha-\beta)$　　④ $\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha$

答：甲　①

乙　②

丙　③

丁　④

配伍选择题　选择题的一种类型。这类题目先列出五个用字母标明的备选答案，然后是几道用数字标明的试题。要求考生从备选答案中，给每题选配一个最合适的答案。这类题目不是每一道题有一组备选答案，而是几道题共用一组备选答案。每项答案可选用一次，也可重复选用多次，或一

次也不用。例如，“（A）a、b互为相反；（B）a、b 中至少有一个为零；（C）a、b不同时为零；（D）a、b 同时为零；（E）a、b 都不为零。下列各式的意义分别是（1）$a+b=0$；（　）（2）$a^2+b^2=0$；（　）（3）$ab=0$；（　）（4）$a^2+b^2\neq 0$；（　）（5）$ab\neq 0$。（　）”

逐级抽象性　数学概念的逐级抽象性是其重要特征之一。数的概念的发展说明了这一点。起先，数作为一类等价物所具有量的特性与具体事物相分离，成为抽象的数的概念，用符号表示为1，2，3，……，在这个基础上，又舍去了数的具体确定值，用字母表示任意的数，为了研究一般的数的性质及运算性质，用代表数的字母进行运算，以一般的形式去证明某个关于自然数的定理，得出适合所有自然数的结论，由于脱离了具体数的束缚和限制，数的概念具有更广泛的应用，算术发展为代数。由此可知，数学抽象层次越高，与现实的原始对象联系越薄弱，然而应用也越加广泛。在抽象过程中，不管多么抽象，高层次概念总是以低层次概念为其具体内容。低层次概念尽管也是抽象的产物，但相对于高层次概念来说，却有着较多的具体内容。

积差相关　相关系数的计算方法之一。是研究直线相关的最基本的方法，应用普遍。它是二十世纪初，英国统计学家皮尔逊(K. Pearson)提出来的，因而又称积差法为皮尔逊积差法。用积差法计算出来的相关系数，叫做积差相关系数。其计算公式为

$$r=\frac{\Sigma\left(\frac{x}{s_x}\cdot\frac{y}{s_y}\right)}{N}=\frac{\Sigma xy}{Ns_xs_y}。$$

式中，x 是X数列各数值与平均数的离差，即 $x=X-\overline{X}$，y 为Y数列各数值与平均数的离差，即 $y=Y-\overline{Y}$，s_x是X数列的标准差，s_y是 Y数列的标准差，N是X与Y二数列对应配对的个数。如，5名学生的语文与历史成绩如下，求其相关系数。

学　　生	语文(X)	历史(Y)	x	y	xy	x^2	y^2
1	80	70	10	4	40	100	16
2	75	66	5	0	0	25	0
3	70	68	0	2	0	0	4
4	65	64	−5	−2	10	25	4
5	60	62	−10	−4	40	100	16
合　　计	350	330			90	250	40

$$N=5, \ \overline{X}=\frac{350}{5}=70,$$

$$\overline{Y}=\frac{330}{5}=66,$$

$$s_x=\sqrt{\frac{250}{5}}=7.07,$$

$$s_y=\sqrt{\frac{40}{5}}=2.82.$$

$$r=\frac{\Sigma xy}{Ns_xs_y}$$

$$=\frac{90}{5\times7.07\times2.82}=0.90.$$

积极主动性原则 也叫做启发性原则。它要求在教学中，教师要充分调动学生学习的积极性、主动性和独立性，引导学生融会贯通地掌握基础知识和基本技能，并将知识运用于实践，培养学生的独立思考能力和科学的学习方法。

积极主动性原则，是根据学生在教学过程中的认识规律提出来的。学生学习的认识过程必须自觉地动脑，进行思维加工，才能完成认识客观世界的任务。在教学中运用这一原则，是由我国教育目的和要培养的具有独立获取知识和有创见运用知识的人才而决定的。

要贯彻好积极主动性原则，教学必须做到：①正确发挥教师的主导作用，是调动学生积极主动性的前提。要正确发挥教师的主导作用，教师一要深入学习教学大纲，深入钻研教材，驾驭教材，熟悉教材的整体体系，真正把握教材的重难点；二要根据学生实际，正确确定教学起点、高度，调动学生积极性；三要遵循教育学和心理学所揭示的规律，科学合理地安排和指导学生的学习方法。②培养学生的学习兴趣，调动学生的积极主动性。为此，首先要教育学生明确学习目的——为社会主义祖国而学。学生对学习目的和学习活动的意识愈明确，学习积极性愈高，精力愈集中，学习效果愈好。其次，要根据学生的实际，结合教材内容，恰当地联系实际，阐明该学科的意义作用，激发学生的积极主动性。再次，创设问题情景，激发学生学习兴趣和求知欲望。所谓问题情景，就是有一定困难，需要学生努力克服而又是力所能及的学习情景。创设问题的情景，在整个教学过程中始终要贯彻。它既可以用教师设问的形式提出，也可以用作业的形式提出；既可以从新旧教材联系中引入，也可以从学生日常生活中的经验入手；还可以用布鲁纳的发现法，使学生自己感到是个发现者、探索者和研究者。在发现知识的同时，产生浓厚的兴趣，培养自信心。运用竞赛的方法也能激起学习兴趣。③帮助学生形成和发展学习活动所必备的能力，教给学生正确的学习方法，这是调动学生学习积极主动性的重要保证。教师要重视培养学生独立思考、独立学习的能力。凡是学生可以独立做的，要放手大胆地让学生做，不要包办代替，各科教学（尤其是数学教学）都应教给学生良好的学习方法和习惯。④建立民主平等的新型师生关系。教师在教学中，要发扬教学民主，树立学生为学习主体的思想，要尊重学生，相信学生，鼓励学

生质疑问题，大胆发表意见，提倡新创见。同时，要教育学生尊重教师，信任教师，树立和维护教师在学生中威信。师生平等互爱，互尊互敬，互相信任。要防止单纯强调教师权威，无视学生积极主动性的作法，也要防止学生中心主义，忽视教师主导作用的做法。

积极区分与消极区分 在测验中，如果各试题的得分与整个测验的得分相一致，相协调，叫做积极区分。如果各试题的得分与测验总分不相一致，不协调，叫做消极区分。一般的统计方法是，按测验总分从高分到低分依次排列试卷，取27%的最高分数的试卷作为高分组，取27%的最低分数的试卷作为低分组。分别统计高分组与低分组试卷中对每道试题正确回答的人数，并计算出正确回答的比例。如，对试卷中甲、乙、丙三题的统计如下：

	甲　题	乙　题	丙　题
高　分　组	0.75	0.50	0.40
低　分　组	0.10	0.50	0.80
	积极区分	无区分作用	消极区分

从统计结果看，对于甲题，正确回答试题的人数高分组多于低分组，与测验的总分相协调，具有积极区分作用；对于乙题，高分组与低分组通过试题的人数比例相同，不能区分学生成绩的优劣，无区分作用；对于丙题，高分组正确回答试题的人数比例反而不如低分组，其区分价值与测验的总分相反，此为消极区分。高分组与低分组通过率的差数D介于-1.00至$+1.00$之间。对于一道试题，若高分组全部通过，低分组全部失败，则$D=+1.00$；若高分组全部失败，低分组全部通过，则$D=-1.00$。若高分组与低分组通过率相等，则$D=0$。D为正值叫积极区分，D为负值叫消极区分，D为0叫无区分作用。具有积极区分作用的试题（$D>0$），其D值越大，区分效果越好。

称名变量 只说明某一事物与其他事物在属性上的不同或类别上的差异，并不标志事物与事物之间数量差异的变量。如性别分男与女，衣服颜色分为黄、蓝、红、白、灰等色，学校分甲、乙、丙等。这些变量的差异是属性上的，或是名称上的，都属于称名变量。

笔试 对全体考生采用同样的试题，要求考生在规定的考试时间内做出书面回答的一种考试方式。这种考试的试题题型可以多种多样，知识的覆盖面大。笔试能得到考生书写的有形答案，便于分析学生的思维过程。对于需要测量考生的计算、推导、绘图、图解、论证等能力的考试，采用笔试的方式最好。笔试还可以训练学生的文字表达能力。笔试又可分为开卷考试和闭卷考试两种。我国是最早采用

笔试的国家。起自隋唐时代的科举考试，实是世界上最早应用笔试的先例。在欧洲至1702年英国剑桥大学才开始使用笔试。美国则更晚，1845年以后普通学校才采用笔试。

高原期　在技能形成的过程中，在某一个时期，练习成绩有停滞不进的现象，甚至有些下降，这个时期以后，练习成绩又能继续提高。高原期产生的主要原因有两个。一是由于成绩提高需要改变旧的活动结构和完成活动的方式方法，而代之以建立新的活动结构和完成活动的新方法。在学生没有完成这个改造以前，成绩就会处于停顿状态。在改造初期，成绩不但没有提高反而可能会有所退步。当学生经过练习，完成了改造过程，成绩又会提高。二是由于学生的练习兴趣降低，对学习产生了厌倦等消极情绪或者是由于疲劳，成绩也会出现暂时停顿现象。当学生出现高原期时，教师要帮助学生分析原因，指导他们改变旧活动结构，采用新的方式方法，并提高他们的信心，鼓励他们突破高原期。

效度　亦称有效性。指测量本身所能达到目标的有效程度。它是测量的准确性和有效性的指标。对于考试的效度，可以从两个方面去理解：一是考试的目的，考试是否达到了它予定的目的，如选拔性的考试，考试的效度之高低，决定于它是否起到了选拔作用；二是考试的内容，考试的效度之高低，还决定于它是否考了应考的内容。效度总是与其测量的目标密切相连的，对某一个目标有效的考试，对其它目标不一定也有效，或者完全无效。例如，一个考试可以很好地测出学生的写作知识和技巧，但它不一定能够测出学生的观点和态度，当然，更难用它测出学生的数学知识和能力。效度的种类很多，一般分为内容效度、效标关联效度和结构效度等。

效标关联效度　又称经验效度。指一个测量结果与另外一个可以作为效度准则的评量结果的相关程度。也就是指考试成绩与效标考试的成绩的相关程度，从而反映考试对目前及未来某一行为表现的予测力的高低。效标考试是理想化的标准考试，它的效度与信度都是最高的，所以实际中并不存在。因而效标关联效度很难求得，常常用较权威的考试代替效标考试来计算。在学校中，为了估计某学科考试的效度，一般可用教师平日考试评定的等级作为效标考试的成绩。教师根据平日的考试认为在班内是优秀的学生，如果在该学科的考试中也得到较高的分数，就说明这一考试具有较高的效度。如果一个考试的效度已经得到证明，这个考试就可用作一个效标准则去评估其它的考试了。在教育测量中，通常用相关系数来描述两次考试成绩之间的相关程度。这个相关系数叫做效度系数。效度系数的计算公式为

$$r_{xy}=\frac{\Sigma xy}{N s_x s_y}。$$

式中，r_{xy}为考试成绩 X 与效标考试成绩Y的相关系数，亦即效度系数，x 为考试成绩的离均差（$X-\overline{X}$），y为效标考试成绩的离均差($Y-\overline{Y}$)，N为学生人数，s_x为考试成绩的标准

差，s_y为效标考试成绩的标准差。

离散变量 又称不连续变量。其数值形式一般是取整数。两个单位之间不适于再分成细的数值。如人，只能说一个人，两个人，这个单位之间是独立而间断的。离散变量是靠一个一个点数获得的研究资料，所以又叫计数资料。

读书指导法 又称阅读指导法。它是教师指导学生通过阅读教材、教学参考书或其他书籍获取知识，发展独立阅读能力的一种教学方法。书籍是文化、科学和技术知识的载体，是人类智慧精华的表现形式，是传递知识的重要工具，因而，学生阅读书籍是获取知识的重要手段和途径。阅读能力是自学能力的重要组成部分，也是能力结构这个有机整体中的重要因素之一。学生只有具备了一定的阅读能力，才能进行自学，提高学习效益。培养与加强学生学习的独立性，自主性、才能保证学生在日后的工作中不断地获取新知识，适应当今科技飞速发展的要求。

运用读书指导法教学的要求是：①充分发挥教科书的作用。教科书是学生在学校学习之本，因而，教学中教师就应紧依教科书进行形象、生动的教学，以感染学生、激发学生读书的兴趣，运用各种方法，引导学生阅读教科书、重视教科书、会用教科书，充分发挥教科书应有的作用。②加强阅读方法的指导。教会学生使用工具书，学会查阅资料，排除阅读障碍，掌握好从部分到整体或从整体到部分的读书方法，实现精读与略读、读与思的结合，完成从朗读到默读再到速读的过渡。尤其是指导学生阅读好数学教材是不容忽视的。③指导学生写好读书笔记，使学生做到眼、口、脑、手结合并用，提高学习质量。记读书笔记的方法一般有三种方法：一是记要点。这是摘录法。二是记提纲。这是以概括的方法，将所读的材料，简明准确地记下来。三是记概要。将所学的主要内容，用自己的话、观点概括出来。④指导课外阅读。课外阅读是课内阅读的补充和延续，它对巩固课内所学知识，开拓学生知识面，发展学生学习兴趣和提高自学能力具有重要作用。指导学生课外阅读时应当做到：帮助学生选好阅读材料，制订好读书计划。计划要从实际出发，切实可行。经常开展读书报告会、讨论会等，及时检查读书质量。指导学生总结和交流良好的读书方法和经验，增强阅读积极性，提高阅读水平。

阅读的方法一般有三种：①了解性的阅读。一般是对所学的资料内容，进行一般性认识。如对有理数的扩充史料，只要求学生了解，不作为学生必须掌握的知识。这就是教学中的了解性阅读。②理解性阅读。一般是对所学的资料内容，理解其实质，掌握其规律。③鉴评性阅读。一般是对所学的资料内容，在理解的基础上，能融会贯通，判别真伪，用自己的观点作出评价。

读数学书"五法" 读数学书是学好数学的基本功之一。怎样读数学书呢？根据众人的经验，一般归为"五法"。

（1）激读 就是在读课本之

前，教师提出引起学生思索的问题，激发读的兴趣。

（2）算读　就是对一些运算性的例题，可先试算，后再看书。

（3）细读　就是对课本中的题目（例题等），先默读题文，分析题意，寻求思路，力求给出解答。若哪里有疑或不懂之处，作出各种标号。

（4）议读　就是从旧知识引入新课时，可以边议边读，阅读例题的计算方法或证明方法，应自我领悟，能用自己的语言表述出来。

（5）讲读　就是对较为抽象的问题，教师先作形象直观的讲解，再让学生阅读，观察思考。

运用“五法”读数学书必须做到如下几点才能读有实效。①读时要有纯洁的心境。②读时要有安静的心绪。③读时要有乐观的心情。④读时要有专一的心力。⑤读时要有明确的心志。⑥读时要有渴求的心欲。

“读读、议议、讲讲、练练”教学法　这种教学法是上海育才中学在总结17年教学经验的基础上提出来的，是在总结教师讲课讲深讲透的教训中试验出来的。其基本精神就是使学生成为学习的主人，变被动的学习为积极主动的学习。其教学过程是：首先，学生在课内自己读书，互相议论，通过极积思考，逐步了解教材的基本内容；其次，教师做画龙点睛的重点讲课，有意识地引导学生理解教材的重点和难点；然后，让学生在课堂上做必要的练习，基本做到当堂理解、消化和巩固。

课外作业　教学活动不可缺少的有机组成部分，是学生根据教师要求，在上课以外的时间独立进行的学习活动。通过作课外作业，可以巩固和完善课内所学知识和技能。学生通过对作业的独立思考、对作业时间的独立分配和对作业的自我检查等活动，可以培养学生独立工作能力和按时完成作业、科学利用时间的良好学习习惯，同时，也可以培养学生勤学苦练，努力克服困难的意志品质。

课外作业的种类很多。数学课外作业一般分为：①口答作业，如复述课文，口头回答问题。②书面作业，如书面练习，演算习题。③实践活动作业，如绘图、测量等实际技能训练。

课外作业一般是在教师教学活动告一段落进行布置（如一节课，一单元等）。布置时应当注意：①作业内容要符合教学大纲和教科书的要求。②作业的难度，分量要适中，避免学生的负担过重。③布置作业要有明确而严格的要求，并给予必要的指导。④作业形式要注意多样化。⑤对作业情况要给予检查、评定。

课外活动　学校在课堂教学之外对学生实施的各种有意义的教育活动。它能启发学生学习兴趣，开阔学生视野，丰富学生学习生活，陶冶思想情操，发展智力，培养能力，使学生在德、智、体、美诸方面得到发展；能弥补课堂教学的不足，克服其弊端，充分发挥学生主体作用，培养学生个性特长。课堂教学和课外活动好比车子的两轮，缺一不可。开展课外活动应遵循下述原则：①学生根据自己的兴趣、爱好和特长，自愿选择、参加

的原则。②全面育人与发展专门才能相统一的原则。③知识性与趣味性相结合，思想性与科学性相统一的原则。④课外活动的内容、形式与当代青少年的特点相符合的原则。⑤因地因校和因时制宜的原则。数学课外活动的内容包括：制作教具，课外阅读，数学墙报，创作小论文，举办专题报告、数学竞赛等。

课外辅导 课堂教学的一种补充形式。适应学生个别差异、贯彻因材施教的主要措施。数学科课外辅导，分为个别辅导和集体辅导两种形式。课外辅导的主要内容有：解答疑难问题，指导课外作业，补充讲解课堂教学中的遗留问题，给缺课生或后进生补课，对优秀学生学习个别指导，进行学习目的和学习态度的教育等。课外辅导既有利于促进学生的学习质量在原基础上的提高，又有利于教师及时了解学生学习情况，促进教师教学水平的提高。但是，绝不能把课外辅导当成为变相的上课。

课堂教学 把学生按年龄、程度编成有固定人数的教学班，由教师根据教学计划中统一规定的课程内容和教学时数，按照学校的课程表进行分科教学的一种组织形式。课堂教学是我国中小学教学的基本组织形式。它具有以下优点：

（1）它有利于经济有效地大面积地培养人材 由于班级是按学生年龄、程度编排，由教师根据统一的教材对全班进行教学的，各门学科均按照一定的教学时间表有计划地、轮流交替地进行，因此无论从时间还是从空间来看，它都是使学生在较短的时间内能有系统、有重点地学习人类丰富知识体系的一种比较经济、有效的形式。

（2）它有利于发挥教师的主导作用 在课堂教学中，教师是有目的，有计划、有组织地面对全班学生进行教学的。它保证了在整堂课中，每个学生的学习都自始至终在教师直接指导下进行。

（3）它有利于发挥集体的教育作用 课堂教学是分班级进行教育的一种集体组织形式。由于学生的学习内容相同、程度相近，因此集体成员彼此之间在学习上，思想上遇到困难和问题时，有利于开展讨论、相互促进、共同提高。

此外，在课堂教学中各科教师在业务上、思想上、风格上都各有特点，学生也可以从中受到多方面的教育。但是，课堂教学很难顾及学生中客观存在的能力差别，它要求全班学生在同一时间内按照同一教学进度去学习同一的内容，因而不利于发展学生的个性和独创性。致使具有潜在能力的学生和差生都不能很好地得到提高和帮助。为了克服这一缺点，现在各国教育界都在研究怎样在课堂教学中做到面向全体学生和因材施教相结合，课堂教学中怎样开展个别化教学活动等等。有些国家还提出了应通过多种形式的课外教育活动作为辅助形式。从发展的趋势看，学生课外学习活动的作用正在不断增长以弥补课堂学习的不足。

课堂教学评价 教育评价的一个组成部分，是以课堂教学为对象，对教师课堂教学各环节的活动及效果给予价

值上的判断，进而达到改革课堂教学，提高教学质量的目的。课堂教学评价的一般原则是：①评价必须符合教育目标，能促进学生的全面发展。②评价标准应该是相互联系和制约的；评价的标准必须明确具体，可以检查，评价标准必须为多数教师认可接受，使之成为努力的目标。③评价目标既相对稳定，但又不是固定不变的，要反映发展中的教育的要求。④评价方法应定性与定量并重，主客观方法兼取。课堂教学评价的因素应包括以下几个方面：①教学目的、教学要求。②教学内容及其组织处理。③教学方法。④学生对基础知识和基本技能的掌握。⑤学生能力的培养。⑥学生非智力因素的激发和培养。⑦教学效果。⑧教师素质在教学中的反映，它包括知识水平，语言表达能力，责任心，板书，组织能力，师德，为人师表等。每个评价因素仅是指出了整体中的一个方面，评价时，还必须对其具体内容和要求规定一些细则。这些细则应反映出该因素的若干重要的着眼点。条款要具体简明，语义准确，切实可用，易于掌握。由于各评价因素在不同学科、不同课型中的作用各不相同，因此，必须恰当地确定每个因素的权重。为了计量分析的方便，一般采用间距量标的方法，制定课堂教学评价表。如，下面是某校的课堂教学主观评价表：

评价因素	权重	因素的细则	评价等级					因素总评				
			A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
一、目的要求	0.15	1.教学目的明确 2.从实际出发教学要求恰当 3.整节课围绕目的、要求进行教学										
二、内容组织	0.16	1.内容及其处理符合科学性、思想性 2.内容的容量恰当、深浅适度 3.突出重点，突破难点 4.讲究内容布局，层次分明										
三、教学方法	0.18	1.正确处理主导与主体的关系 2.重视启发、思维活跃 3.方法适当，注意反馈，及时调节 4.重视直观教学、实验教学 5.教师语言、板书、操作规范										

（续表）

评价因素	权 重	因 素 的 细 则	评价等级					因素总评				
			A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
四、双基教学	0.14	1.学生形成正确的概念，掌握规律 2.通过技能训练，掌握规范 3.理解、运用基本知识 4.复习巩固、纳入知识体系										
五、能力培养	0.14	1.能力培养纳入教学 2.重视学科特殊能力培养										
六、情意激发	0.08	1.创设情境、激发兴趣 2.情感交流，气氛活跃和谐 3.非智力因素得到激发和培养										
七、教学效果	0.15	1.对完成教学目的，要求的基本评价 2.具备教学特色										
对本课的综合评价												

说明：评价等级分为五个类别：好（A）、较好（B）、一般（C）、较差（D）、差（E）。

课堂提问“七法” 课堂提问是课堂教学的重要环节，一般归结为“七法”。

（1）引趣法 就是在讲授新内容前巧妙设问，以引起学生学习兴趣，并为学习新知识打下基础。

（2）悬念法 就是设置“悬念”，激发学生学习的渴望、追求心理，启迪学生思维。

（3）单刀直入法 就是提挈全篇的提问，促进学生读书的愿望和边看边思的情趣。

（4）想象设问法 就是教师提出一系列充满趣味性、富有想象力的设问，激发学生开动脑筋。

（5）递进法 就是根据教学内容的进展，逐步提出并解决问题，使学生认识不断深化。

（6）逻辑诱发法 就是通过一系列提问，使学生充分运用概念、判断、推理等逻辑手段获得新知识。

（7）巧设疑难法 就是抓住“知识点”，巧设疑问，使学生不仅

知道“是什么”，而且进一步懂得“为什么”。

调节 使系统的特征保持一定的过程。一般采取两种方式，一是依靠系统的实际输出值与目标值之间的偏差进行调节，这称为反馈调节。另一种是预测干扰，用补偿的方式进行调节，称为补偿调节。由于补偿调节要求直接接受外界干扰的信息，同时还要具备干扰对系统产生影响的知识，由于背景的随机性，要预测所有干扰发生的具体时间，强度等有一定困难，因此在控制论中特别强调反馈调的方法论意义。调节是控制的一部分内容，是控制过程中的一个环节。

能力 是与活动要求相适应的，保证活动顺利完成的那些最基本的个人特性。这个解释的涵义是：①能力的作用在于能保证顺利地、有效地进行活动，完成活动的任务。②具有某种能力，就是具备了与某种活动相适应的主体条件。③能力始终是同活动联系在一起的。④能力总是带上个性特点。能力并不是天生的，先天的生物学的素质对以后的能力发展是必需的，但并不是充分的。能力是在人的生理素质的基础上，经过后天教育和培养，并在实践活动中形成和发展起来的。

能力测量 心理测量的一种。是使用一套比较系统的测验题目，并用数量化表示人的能力的方法。能力测量用以了解测量对象的现有能力及未来能力的倾向。能力测量的分类很多，按能力种类可分为一般能力测验和特殊能力测验；按测验的目的可分为智力测验、成就测验和诊断测验；按测验的方式可分为团体测验和个别测验；按测验内容的表现形式可分为文字测验和非文字测验；按测验评定方式可分为速度测验和难度测验等。

能力的类化经验说 关于能力实质的一种观点。这种观点认为，作为个体心理特性之一的能力是一种功能方面的结构，即对人的活动的进行起稳定调节作用的一种心理结构。人的自觉活动总是由一定的原因所激起，指向于达到预定目的而告终的。活动本身总是通过主客体的相互作用，通过由主体作出的一系列动作，作用于一定的对象，从而使对象发生合乎目的所要求的变化而实现的。从活动的动态结构来看，任何活动的实现都是由三个互相联系、互相制约的环节组成。这就是定向环节、执行环节与反馈环节。定向环节的主要功能，在于依据活动的需要与活动的对象，确定活动的目的及达到目的的动作程序计划，即解决做什么与怎么做的问题。执行环节的主要功能，在于把定向环节中确定的动作程序付诸实现，并不断以对象的变化与活动的目的要求相对照，从而不断调整预定动作。反馈环节的主要功能，在于把活动结果与预定的目的要求相对照，从而确定活动是否终了。能力的类化经验说认为，知识是活动的定向工具，技能是活动的执行工具，而能力则是主体内部保证完成定向任务与执行任务的自我调节结构。这种结构对活动的调节具有经常性与一贯性，也就是说具有稳定性。这种结构的实质是概括化与系统化了的知识与技能，或者说是类化了的经验。它的形成与发展直接依赖

于知识、技能的获得以及在迁移过程中的类化。该观点并不排斥遗传的生物学特性对能力形成、发展的影响。但是这种影响仅仅是能力形成、发展的一种条件，并不是作为个体心理特性之一的能力本身。此外，能力的形成、发展除受个体生物学特性条件的影响外，还受个体所处的社会历史条件与主观条件的影响。任何条件对于能力的形成、发展的作用，必须通过主体的活动才能实现。能力的类化经验说，比较科学地论证了知识、技能、能力之间的关系，指出了能力形成、发展的过程，充分肯定了主体的能动性，对教学有着指导意义。

难度　衡量考试题目的难易程度的指标。衡量的指标一般考虑两个方面，一个是采用通过试题的人数与总人数之比，这多用于客观性试题；另一个是采用考生所得分数的平均值与该题满分之比，这多用于主观性试题。比值越小，题目越难。也就是说，通过试题的人数越少，考试题目越难。难度值最大为0，最小为1，试题难度在0与1之间。考试题的难度以多大为合适，这要根据考试的录取率来决定。录取率越低，对试题难度的要求越高。一般认为难度在0.4～0.7较为适宜。在整个试题中难度的分布要广，以便把各类水平的分数拉开，难易的梯度要多，以便能更细地区分。难度一般用符号P表示，计算公式为

$$P=\frac{R}{N}。$$

其中P为答对率（也称通过率），R为答对人数；N为总人数。或

$$P=\frac{\text{题目的平均分}}{\text{题目的满分值}}.$$

理解型教学　又称理解水平的教学或说明性理解水平的教学。以要求学生理解教材为主要标志，不仅使学生掌握系统化、概括化的知识，而且有目的地促进学生认识能力的发展。学生的学习基本上是按照“接受——理解——运用”的程序进行的。长期处在这种水平的学生能通过教师对概念、关系、法则、定理的讲解，掌握它们的本质意义和内在联系，并在教师的帮助下，具有从特例中概括出共性，并使之具体化的能力。从解题途径来看，他们有能力进行分析综合，基本技能比较熟练。但是，他们往往缺乏主动探究思考的精神，对教师表现出较强的依赖性。他们的思维范围局限于教师的讲解，思维方式超脱不了教师处理问题的方式，思维品质缺乏创造性和批判性，易于接受肯定的事物，不习惯于去否定，去猜测，更难于发表具有创造性的见解。

理论联系实际原则　理论联系实际是辩证唯物主义认识论对数学教学的要求，是实现教育目的，培养四化建设人才所必需的。教学中坚持贯彻理论联系实际的原则，能使学生容易地理解和牢固地记忆知识，能激发学生的学习积极性、主动性，有利于发展学生运用理论知识去解决实际问题的能力。

学生的学习是以书本知识为主。教学中要使学生学好书本知识，就必须加强基础理论知识的教学和基本技能的训练。同时，要尽可能的从理论

和实际联系中，理解和掌握知识，培养学生运用所学的知识去分析问题、解决问题。

在教学中要贯彻好这一原则，教师应当做到：①要紧密结合实际、讲清概念、公式、原则和规律，切实搞好基础知识教学。教学中教师要按照教学大纲、教科书的规定，着重讲好基本理论。没有理论，就谈不上联系实际。联系实际应有明确的目的。中小学教学理论联系实际的目的，是使学生将基础知识学懂会用。联系实际，要坚持以理论为主导，以切实加强双基教学为目的，抓住课程的重点、难点和关键问题，不能破坏学科内容的内在的逻辑性和系统性，更不能以罗列事实代替联系实际。②从教学的实际需要出发，将理论知识的教学同实际密切联系起来。教学中联系实际，主要包括：联系学生的思想实际；知识经验和能力方面的实际；学生日常生活的实际；社会生活、生产建设诸方面的实际。努力使学生把间接经验和直接经验结合起来；掌握理论与实际应用结合起来；知和行结合起来。③教学中理论联系实际的形式，要多种多样。可以结合教学组织学生参加一定的社会实践活动，也可以采用如练习、实习、实验等教学性的实践活动。这两类实践活动，各有自己的特点和作用，二者要互相配合，灵活运用。

理论知识起主导作用的原则　赞科夫实验教学论原则之三。赞科夫指出确定理论知识的主导作用的原则，并不贬低知识和技巧以及学生获得知识和技巧的意义。在赞科夫的实验教学中对技巧是十分重视的，只是在形成技巧的途径上跟传统教学法不同。在实验教学中，技巧的形成是在一般发展的基础上，在尽可能深刻地理解有关的概念、关系和依存性的基础上实现的。赞科夫还指出，理论知识的主导作用，通过使学生理解学习过程的原则取得自己的变相存在。

描述统计　主要是将调查和实验所获得的大量数据，通过整理计算出它的集中量数、差异量数和相关系数等。把零乱无序的数据简缩成清晰而易于理解的形式，用数字或图表描述出来，从而反映出这些数据的某一方面的特征及其相互关系，使研究者一目了然，便于进一步作分析综合工作。这类统计方法在教育科学中应用最广。

教态　教师在课堂上的非言语行为，包括教师的姿态，教师的视线，教师的情绪。心理学家曾通过实验得出一个公式：课堂上信息的总效果＝7％的文字＋38％的音调＋55％的面部表情。说明课堂上非言语行为在信息传递中有着明显的作用。首先，通过恰到好处的非言语行为，充分利用视觉的补偿作用，教师积极输出的信息会更好地转化为学生主动输入的信息，从而更好的理解讲课的内容。其次，可以补充和代替言语行为，使学生在接受言语信息的同时，得到鲜明生动的形象，言语行为与非言语行为的恰当结合，同时作用于学生的大脑，会使学生积极地进行思维。还可以促进信息传递中的反馈调节，使学生用心去收集教师发出的信息，并根据理解掌握的情况反馈给教师。因此，作为

一名教师应十分注课堂上的非言语行为。良好的教态应是端庄、大方、亲切、自然，手势应当有表现力，能增强教学语言的生动性、形象性、面部表情应表现出诚恳和谦虚。对学生的成绩和进步，要表现出由衷的高兴，对学生缺点和错误应表现出诚恳与帮助。情绪要乐观、饱满。

教学 教师的教和学生的学的共同活动。学生在教师有目的有计划的指导下，积极主动的学习和掌握系统的文化科学基础知识和基本技能，发展智力，培养能力，增强体质，逐步形成辩证唯物主义世界观和共产主义道德品质。中小学教学是实施全面发展基础教育的基本途径，是学校的中心工作，是衡量教育质量的重要标志之一。中小学教学的基本任务是：

（1）传授并指导学生掌握较为系统的文化科学基础知识，形成基本技能和技巧。

（2）培养学生的求知欲和独立学习的能力，发展智力、培养能力，增强体质。

（3）培养学生良好的学习态度、参加社会主义生产劳动的文明和习惯。

（4）把教学与育人结合起来，丰富学生文明健康的精神生活；培养学生逐步形成共产主义的人生观和共产主义道德品质，引导学生身心健康发展。全面贯彻党的教育方针，促进学生全面发展。

根据数学学科特点，实施上述诸方面的教学，就是数学教学。

教案 在单元备课的基础上，以课时为单位设计的教学具体方案。它是教师上课的具体依据。教案包括班级、学科名称、授课时间、课题、教学目的、重点、难点，课的类型、教学进程（包括教学内容的安排，教学方法的运用和教学时间的分配）、教具，课后分析（或课后记）等。有的教案还有作业题和板书设计等项目，编写教案要符合以下要求：第一，正确制订教学目的。教学目的要明确、具体、落实，要相对集中。第二，合理组织教材内容。突出重点，攻克难点的做法、措施要具体。教学内容的组织要逻辑严密，条理清楚。能反映出教师活动与学生活动的恰当配合。第三，预见教学进程，设计出相应的解决措施。第四，恰当选择和运用教学方法。

教学论 又称普通教学法。研究教学的一般规律及其应用的科学，是教育学的一个分支。随着教育科学的发展，它已形成一门相对独立的学科。教学论是以教育的一般原理为指导，以实践经验为基础，研究教学在整个教育活动中的地位与作用，教学的目的和任务，教学原则，教学过程，教学内容，教学方法与手段，教学组织形式，以及教学成绩的检查与评定等。教学论的产生与发展是与各科教学法密切联系着的，又对各科教学法具有指导意义。教学论是为解决具体的教学问题提供一般规律性的知识或科学的一般原理，而不是只描述教学现象和过程，也不是为解决个别的特殊的教学问题提供现成的方案。教学论的研究方法，主要有观察法、实验法、文献资料研究法以及对书面资料的分析研究和对实践经验的理论概

括等方法。

根据数学学科的特点，具体地研究上述诸方面的问题，就是数学教学论。

教师“十诫”　见波利亚教学三原则。

教师评价　以教师为评价对象，运用科学的评价技术和手段，对其思想政治素质、文化专业水平、教育工作能力等方面作出全面的价值判断。教师评价是一项内容多、层次多的评价活动。教师评价的内容应包括教师全部工作的实际成效，以及在工作的全过程中所反映出的政治思想、道德品质、劳动态度、知识水平、业务能力等实际情况。教师评价的内容主要可分为：(1)教师素质评价　①一般素质的评价，包括性别、年龄、身体、气质、性格等。②政治素质的评价，包括政治思想、教育思想、师德等。③知识素质的评价，包括教育教学理论、一般的科学文化知识技能、所教学科的知识水平等。④能力素质的评价，包括教育能力、教学能力、改革和创造能力、自学能力等。（2）教师工作过程的评价　①工作数量的评价，包括教学工作量，思想教育工作量，其它工作量等。②工作质量的评价，包括教育工作质量，教学工作质量，其它工作质量。③工作态度的评价，包括责任感、工作积极性、组织纪律性、团结协作精神等。(3)教师工作成果的评价　①工作效果的评价，包括学生德智体美劳的发展，学生学习成绩，学生学习能力等。②工作效益的评价，包括社会评价和家长评价。教师评价不是教师活动成绩或问题的简单记录，而应该是对教师的工作进行科学的分析。搞好教师评价，对于加强对教师的科学管理，调动教师的积极性，引导教师按教育规律办事，提高教育质量，有着极重要的作用。

教育评价　自1929年美国教育家泰勒（Ralph W. Tyler）首次提出这个科学概念以来，它的对象和目标不断发展。目前，对于教育评价尚无一个公认的定义。一般认为，教育评价就是运用科学的方法，搜集有关教育现象的数据资料，分析所得结果，对教育系统的结构和功能，对教育过程和它的后果，以及对各个与之有关的事物进行价值判断。教育评价活动是本世纪三十年代美国首先实行的，并逐渐传布至世界各地，成为教育事业管理的一个重要手段，并形成了教育研究的一个专门领域。国际上于1961年成立了专门的教育评价机构——《国际教育成就评价协会》（简称IEA）。联合国教科文组织，也把是否具备相当程度的教育评价技术水平，作为衡量一个国家教育水平的尺度。我国对教育评价的研究起步较晚，但发展迅速。教育评价的内容主要包括以下几个方面：对学生的评价；对教育过程的评价；对学生的小团体、班集体、教师集体、学校整体的评价；对教师的评价；对学校的校舍、校地、基本设施和设备，以及学校周围环境的评价；对教育管理系统的评价等。教育评价的总目的，就是使与教育有关的人们充分地、准确地以至及时地认识教育状况（包括群体的和个体的），以求在外界条件许可

的范围内，发挥人在教育中的主体作用。各层次的教育评价必须有正确的分级分类的评价标准，采用科学的评价方法，做到目标评价与过程评价相结合，定量评价与定性评价相结合，使评价起到激励、导向、甄别和决策的作用。教育评价与教育测量不同，教育测量只提供事实，教育评价则是对所测量到的事实作出价值判断。所以，评价是以价值为出发点和落脚点。教育评价与正确的教育价值观紧密联系。

教育实习 师范院校的学生在教师的指导下，在中学、小学或幼儿园进行的教育和教学专业训练的实践活动。教育实习一般在毕业前进行。教育实习使学生学得的教育教学理论知识应用于实践，培养其教育和教学工作能力，巩固为教育事业献身的专业思想。这是各级师范院校的重要的教学环节，是教学计划的重要组成部分。教育实习前学校制定实习计划，规定实习目的、内容，指导教师配备，实习小组划分，组织领导和日程安排等。实习指导教师一般由各级师范院校和中小学、幼儿园的教师共同担任。教育实习的内容主要包括教学实习和班主任工作实习。教育实习成绩，由指导教师按照评分标准共同评定。实习结束时，要进行总结。

教育实验 教育领域里进行的一种特殊形式的探索教育规律的科学研究活动。根据一定的理论假设，有意识地改变一些条件，然后通过有系统有控制地观察，查明教育现象发生的原因以及某一理论或假设的实际效果。教育实验具有控制性和可重复性的特点，它对于认识教育规律，检验教育理论，鉴定教育或教学的某种方式、方法、内容、形式的效果有着重要的意义。教育实验的对象是学生，其实验情境是自然状态下的教育文化环境，并且大量地是在教室中进行。实验活动受社会、学校、家庭，以及个人的文化素养、智力、情感、意志等各方面条件的制约和影响，因此，实验的实施和研究与典型的自然科学实验、典型的心理实验相比都带来了困难。

教育实验的组织与安排一般可分为：①单组法 对由被试组成的某班、组，施加某一实验因子跟不不施加此因子或施加其他因子，分析其效果差异。（2）等组法，又叫分组对比 把被试对象分为条件基本相等的实验组和对照组两组，只对实验组施加实验因子，而对照组则按原来的正常方式进行，实验后将两组的结果加以对比分析。（3）循环法 把几个不同的实验因子，按不同的排列顺序，分别施加给几个不同的实验组，然后把每个因子的几次效果汇总分析，研究差异变化，得出结论。其方法举例如下：

A组 X_1 0 X_2 0

B组 X_2 0 X_1 0

其中，X表示对实验因子进行的操作处理，0表示对因变量的测试。

教育测量 对学生知识的增长、能力的发展、兴趣爱好、思想品德，以及教育措施上许多方面按一定法则的数量化的测定。学校通常采用的各种考试、考查等都属于教育测量。教育测量主要是为了获取反应信息，取得数

量或可量化的文字资料，为教育评价提供依据。教育测量是改进教学的良好工具，可帮助教师鉴别学生的知识、智力和思想品德水平，区分学生的学习兴趣和才能；诊断学生学习过程中的困难和问题，从而使教师改进教学，有效地进行因材施教，提高教学质量。教育测量是教育管理的重要手段。通过科学的测量，可提供合理使用教育经费、准确选拔和安置人才、决定教育政策、进行教育规划的重要信息，提高教育管理的科学水平。教育测量也是教育研究的重要方法。教育上任何一种新的教育理论、新的教材、新的教学方法，都必须经过教育测量检验其效果之后，才能判断其是否正确，才能鉴定其价值大小。教育测量是教育科学研究中不可缺少的重要工具。

教学大纲　根据教学计划规定的各学科的目的、任务、以纲要的形式编写而成的、关于学科教学内容的指导性文件。这个文件具体规定学科的教学目的，任务、内容、范围、深度及其体系、结构，同时规定教学的一般进度和对教学法的基本要求。各级各类学校各个学科的教学大纲一般分为“说明”和“大纲本文”两部分。“说明”是简要地阐述本学科的教学目的、要求，指出教材的编选原则、教材的编排及教学中应注意的问题。“大纲本文”是依据知识的逻辑体系和学生的认识规律、系统地安排本学科教材的章、单元、节（或编、章、节、目）的标题，内容要点或课题、课时数、实际作业（实验、练习、实习）的内容和时数，以及其它教学活动的时数。有些学科的教学大纲还包括教学参考书目、教学仪器、教具等。教学大纲是编写教科书的依据，是教师教学的依据，是评价教学的依据，是升学考试的依据。要大面积提高教学质量，教师必须认真钻研和熟练掌握教学大纲，严格地执行教学大纲，完成教学任务。

关于中小学数学教学大纲，建国以来，随着形势的发展和教育改革的需要，几经制定和修改。现在在我国中学中执行的全日制中学数学教学大纲是过渡性教学大纲，即在1978年制定的全日制学校《中学数学教学大纲》的基础上，于1986年经过全国中小学教材审定委员会中学数学学科审查委员会修改而成的。为实现九年制义务教育，1986年中华人民共和国国家教育委员会颁布了九年制义务教育《全日制小学数学教学大纲（初审稿）》和九年制义务教育《全日制初级中学数学教学大纲（初审稿）》。后一个大纲共包括四部分：一、教学目的；二、教学内容的确定和安排；三、教学中应注意的几个问题；四、教学内容和教学要求：代数、几何。这种编排同教学大纲的整体原则精神是完全一致的，即前三部分为大纲“说明”，第四部分为“大纲本文”。

教学内容　学校所开设的教学科目和各种科目的知识系统总和。就是学校给学生传授的知识技能、灌输的思想和观点，培养的习惯和行为等的总和。它是实现教学目的和培养目标的保证，是学校组织全部教学活动的依据。目前，我国各科目的教学内容，

具体规定在教学计划、教学大纲和教科书中。

教学内容是由教学目的决定的。它受着社会生产发展和科学技术水平的制约。它反映着社会政治、经济发展的要求。遵循着学生的年令特征和身心发展规律。所以，教学内容是发展变化的。特别是我国幅员广大，教育发展极不平衡，对于教学内容既有全国的统一要求，又照顾各地区的特点，适应地方的实际需要。

根据教学内容的整体原则精神，结合数学学科的特点，便确定出数学教学内容。如中华人民共和国国家教育委员会颁发的九年义务教育《全日制初级中学数学教学大纲(初审稿)》“二、教学内容的确定和安排”中写到：“初中数学的教学内容应当精选作为一个公民所必需的代数、几何中最基本最有用的部分，在理论要求和习题难度方面，应当适当。分量要适中，注意留有余地，以适应各校教学的不同情况。“五、四”制初中与“六、三”制初中多出的课时，可以用来选学应用方面的知识或加深加宽的内容（具体项目可在实验的基础上进一步确定）。”又写到：“教学内容分为代数、几何两门课程。“六、三”制初中可以在一年级上学期安排代数，一年级下学期至三年级同时安排代数和几何；“五、四”制初中可以在一年级安排代数，二年级至四年级同时安排代数和几何。”显然可见，这样安排既体现了整体教学内容精神，统一的教学要求，又体现了从地方实际需要出发的实际性。

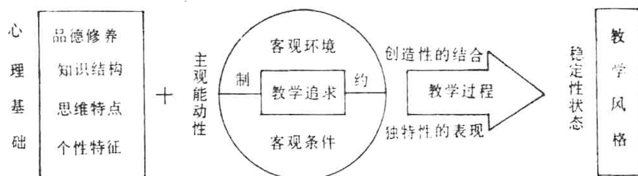
教学水平 教学活动的分类层次。根据美国心理学家比格的分析，教学水平可分为四种。第一种是记忆水平，其特点是教师对学生提出需要识记的教学内容，也就是仅仅要求学生对所学的具体材料进行机械记忆。第二种是说明性理解的水平，具体表现为教师对概括、关系、规则或原则的解释和学生对它们的领会；讲授同原理和概括的工具作用有关的事实以及为学生提供作为证据的事实。教师在以上两种教学水平中的主导作用是权威主义的，他严格地规定着学生的活动，直接提供着要求学生掌握的各种规则和原理。说明性理解水平与记忆水平相比，说明性理解较为符合教学任务的要求，因为它不仅有利于学生掌握系统化、概括化的知识、而且还有目的地促进学生智能的发展。但教学总是停留在教师讲学生听，或教师发出刺激学生作出反应的状态，不易调动学生的积极性和主动性，也不利于培养他们的良好的个性品质。第三种教学水平是探究性理解水平。其教学特征，是使学生“有目的的卷入和感到困难，提出和解决问题，及获得对原理、观念和行动的感知；要求亲自卷入，不只是有兴趣；以教师和学生为中心的共同研究和评价；目标是学生既感到困难，又不至于遭受挫折，而是有结果的学习”。比格认为，同说明性理解水平相比，探究性理解水平要求学生更积极地参与，更多地对传统思想的批判和更多的想象力和创造性。它导致一个更有生气的对新颖的和独创的思想更加开放的课堂气氛。第四种是自主发展的水平，其特点是以学生为中心，学生自己决定他们做

什么以及怎样去做，教师对学生的思想和行动很少或根本没有领导、指导、压制、命令和强迫接受，教师的作用在于唤起学生的意识、自由和责任心。从当前我国的数学课堂教学水平来看，多数处于说明性理解水平，处于探究性理解水平的仅是极少数，甚至有的还未摆脱记忆水平。

教学手段　在教学中师生互相传递信息的工具、设备或媒体。教学手段不同于教学方法。教学手段是指教学中运用的物体、工具。教学方法则是对教学手段的运用。教学手段对于教学有着直接重要的影响，先进的教学手段可以节省教学时间、节约师资力量，可以冲破时间和空间的限制，控制学生的学习行为，提供丰富的感性材料，提高教学效果。教学手段的现代化是现代教育的突出特点之一。如电影、电视、计算机已运用到数学教育之中，成为数学教育领域中的一个重要方面。

教学风格　教师在长期教学实践中逐步形成的富有成效的一贯的教学观点、教学技巧和教学作风的独特结合和表现，是教学工作个性化的稳定状态之标志。教学风格的本质特点在于它的独特性，这种独特性表现在好多方面，象独特的教学语言、教学方法、教学风度和教学机智等等。教学风格的形成，既是教师在教学上创造性活动的表现，又是创造性教学的结果，是教师在教学艺术上成熟的重要标志。看一个教师是否已经成熟，最重要的一点，是看他是否已形成了自己独特的教学风格。教学风格一旦形成，就会在教学的几乎所有方面表现出来，并且每个教师的风格都不会与其他人雷同。

教学风格的构成因素主要有：教师的品德修养、知识结构、思维特点、个性特征（以上因素为心理基础）和教师在教学上的主观追求（这种追求受到客观环境和条件所制约）。教学风格的形成，便是教师的心理基础与主观追求的高度统一，是各种因素的结构及其运动达到稳定状态的表现和结果。



教学风格一旦形成，就具有相对稳定性，并且在整个教学过程中都表现出其本质特色——独特性。这种独特性，主要表现在：独特的内容处理

对于整个教学内容，教学风格不同的人，其处理方式也不会相同。从导入新课、练习、复习，到检查与评定，都有其创造性的处理。并且这种处理虽有所侧重，但是非常合度，如难与易、深与浅、轻与重、多与少、繁与简、详与略、先与后、一般和个别等等，这一点，从我国特级教师的

教案与课堂教学实录来看，非常明显。有的善于归纳概括，有的长于演绎分析；有的善于变零为整，总体把握，有的长于化整为零，重点讲授……各具特色，各有千秋。独特的教学方法的运用　教学工作对象的复杂性、教学内容的多样性和教师不同的个性决定了教学风格在教学过程中表现出来的特点之一，是教学方法的多样性、灵活性和创造性。这既包括教师对现有教学方法的创造性运用，又有对新型教学方法的创造。独特的表达方式　教学的表达方式，可分为语言表达和辅助语言表达的非语言表达。语言表达可分为口头语言表达，书面语言表达。非语言表达可分为实物演示表达和教态表达。教师的个性不同决定了其语言的基调、气势、节奏的差异，甚至造成常用词汇、语法、修辞等方面的区别。有的语言优美动听，生动形象，富有感染力和鼓动性；有的语言层次分明、逻辑严密、论证有力，富于论辩性和说服力。有的语言词汇华丽，有的语言朴素扎实。有的语言庄重典雅，有的语言幽默诙谐。板书方面，有的善于提纲式、图解式，有的善于线索式。实物演示和教态表达，也都打上了每个教师的个性烙印，象演示操作，丰富的表情、手势、眼神等。

根据教学风格的构成因素，及其在教学过程中的不同表现，教学风格在相对意义上归结为两大类：科学型（或称理智型）和艺术型（或称情感型）。

科学型　构成这类教学风格的教师心理基础中，知识结构的特点是知识的系统性强，概念理论知识占的比重大；有准确、敏锐的判断能力；思维逻辑性强，善于概括和推理，讲究方法；教师的教学追求是科学的态度、理智的力量。这种教学风格在教学过程中的表现是内容组织合乎系统的逻辑，层次清楚，线索分明，教学语言具有论证性的说服力。选择的教学方式有利于自己这些优势的发挥。

艺术型　构成这一类教学风格的教师心理基础中，知识结构的特点是知识有相当的广度和深度，事实材料占比例较大；有细腻、准确的感受能力；善于演绎和分析，思维敏捷而灵活；爱好文学艺术；教师的教学追求是精神的感染，情感的陶冶。这种教学风格在教学过程中的表现，是内容组织富于艺术性效果，体现着艺术辩证法，主次分明，详略得当，重点渲染。教学语言具有形象性、鼓动性和感染力。选择的教学方式有利于自己情感优势的发挥。

教学风格细分，则两类中又可分出若干种。不过，无论怎样分，都是相对意义上的。实际上，教师的教学风格多是混合型的，而独特性使它们又各不相同，这些风格很难说有优劣高下之分，倒是常有异曲同工之妙，只要能取得好的教学效果，什么样的教学风格都是应当肯定的。

教学方法　在师生共同的教学活动中为完成教学任务所采用的手段，其中包括教师所采用的教的方法，也包括在教师指导下学生所采用的相应的学的方法。教学方法不仅对提高教学质量有重要意义，而且对学生的全面发

展也是十分相关的。教学掌握科学的教学方法是一个教师必备的条件。

教学方法不是单独存在的，而是受若干因素制约的。①教学方法受着教育目的制约。因为教学方法是为教学内容服务的，所以教学方法在不同的社会中，就为不同的教学目的服务。反之，为实现不同的教育目的，所采用的教学方法自然也不会相同。这就是教育的阶级性所决定的。②教学方法受着教学内容的变化而变化。③教学方法受着科学技术的发展而不断改进和发展。

目前，在我国中小学数学教学中，常用的教学方法有：讲授法，谈话法，自学辅导法，读读、议议、讲讲、练练法，单元结构法，引导发现法，发现法，阅读指导法，练习法，讨论法等等。

在教学中恰当地运用教学方法是很重要的，那么怎样判断教学方法运用的是否恰当呢？主要判断标准有：①能激发学生的学习欲望，调动学生学习的积极性和主动性。②保证学生能正确而系统地掌握教材。③有利于培养学生的技能和技巧。④有利于培养学生的能力，发展学生的智力，发展学生的创造精神。

教学计划　由国家或教育主管部门所制定的关于各级各类学校教学和教育工作的指导性文件。这个文件是根据一定的教育目标和各级各类学校的具体培养目标而确定的。它体现了国家对学校教育和教育工作的重要依据，它决定着教学内容总方向和总结构，它对有关学校的教学、教育活动，生产劳动，课外活动和社会活动等方面作出全面的安排。地方教育行政机关、学校领导和教师对国家制定的教学计划必须认真执行，不经上级批准，不得擅自修改。教学计划一般由以下内容组成：学科设置；各学科教学顺序；教学时数；学年编制；学周安排及其它各种活动等。教学计划同教学大纲、教科书互相联系，它们共同反映教学内容。如1986年国家教育委员会颁布的《义务教育全日制小学初级中学教学计划（初稿）》见表

教学目的　即为什么教？广义的教学目的，即各科教学的总目的与教育目的相同。狭义的教学目的有时指各科教学的目的，但经常是指一章教材，单元教材或一节课的教学目的。教学目的具有概括、深刻、明确的特征，它规范着教学方向和应达到的质量标准，指导教学全过程。调节全部教学活动，使其不发生偏离。

教学目标　就是平常所说的教学要求。不过它要具有更加具体、更加明确的特点。通常是用具体的行为术语作为表述要求的用语。教学目标可以大致分为方向目标与达成目标两种。前者起指向目标的作用，例如“培养……能力”这是一类要花多少课、多少周、甚至多少个学期才能达到的大目标。后者是指一节课或几节课所要达到的目标，例如“说出……定义”。一本教材，一章教材，一个单元教材的完整的教学目标体系，应是教学的依据，也是评价的标准，因为学生对知识技能的学习可以通过目标的达成度来衡量。

教学机智　教师在课堂教学中，面对变化的教学情境，随机变应、灵活处

全日制小学、初级中学“五·四”制小学教学计划（初稿）

科目 \ 周课时 \ 年级		一	二	三	四	五	上课总时数	与现行五年制计划比较	占上课总时数百分比
思想品德		1	1	1	1	1	170	－10	3.7%
语文		11	11	9	9	9	1666	－206	36.5%
数学		5	6	6	6	6	986	＋166	21.6%
社会				2	2	2	204	＋60	4.5%
自然		1	1	2	2	2	272	＋56	6.0%
体育		2	2	2	3	3	408	＋48	9.0%
音乐		3	3	2	2	2	408	＋48	9.0%
美术		2	2	2	2	2	340	＋52	7.5%
劳动				1	1	1	102	＋30	2.2%
并开科目		7	7	9	9	9			
周总课时		25	26	27	28	28	4546	－88	
活动	自习	1	1	2	2	2			
	班队会	1	1	1	1	1			
	体育活动	2	2	2	2	2			
	兴趣活动	2	2	2	2	2			
周活动总量		31	32	34	35	35			
集体教育活动和机动时间		全年两周							

全日制小学、初级中学"五·四"制初级中学教学计划（初稿）

科目 \ 周学时 \ 年级	一	二	三	四	上课总时数	与现行教学计划总课时数比较	占上课总时数百分比
思想政治	1	1	2	2	200	=	5.1%
语文	5	5	5	5	670	+70	16.9%
数学	5	5	4	4	604	+38	15.3%
外语	4	4	4	4	536	+36	13.6%
历史	2	3		2	234	+64	5.9%
地理	3	2			170	=	4.3%
物理			3	2	166	+2	4.2%
化学			2	2	132	+36	3.9%
生物	2	2	2	2	204	+4	5.2%
体育	3	3	2	2	330	+136	8.5%
音乐	1	1	1	1	134	+34	3.4%
美术	1	1	1	1	134	+34	3.4%
劳动技术	2	2	2	2	268	+266	6.8%
总并开科目	11	11	11	12			
选修课			2	3	160	+164	3.4%
周总课时	29	29	30	30	3952		
活动 时事政策 / 班团队活动	1	1	1	1	134		
课外活动	4	4	4	4	536		
周活动总量	34	34	35	4622			

全日制小学、初级中学“六·三”制小学教学计划（初稿）

科目 \ 周课时 \ 年级		一	二	三	四	五	六	上课总时数	与现行六年制计划比较	占上课总时数百分比
思想品德		1	1	1	1	1	1	204	=	4.1%
语文		10	10	9	8	7	7	1734	－204	34.9%
数学		4	5	5	5	5	5	986	－170	19.9%
社会					2	2	2	204	＋68	4.1%
自然		1	1	1	1	2	2	272	＋68	5.4%
体育		2	2	3	3	3	3	544	=	11.1%
音乐		3	3	2	2	2	2	476	=	9.6%
美术		2	2	2	2	2	2	408	＋68	8.2%
劳动				1	1	1	1	136	＋34	2.7%
并行科目		7	7	8	9	9	9			
周总课时		23	24	24	25	25	25	4964	=	
活动	自习	1	1	2	2	2	2			
	班队会	1	1	1	1	1	1			
	体育活动	3	3	3	3	3	3			
	兴趣活动	2	2	2	2	2	2			
周活动总量		30	31	32	33	33	33			
集体教育活动和机动时间		全年两周								

全日制小学、初级中学“六·三”制初级中学教学计划（初稿）

科目＼周课时＼年级		一	二	三	上课总时数	与现在教学计划总时数比较	占上课总时数百分比
思想政治		2	2	2	200	=	6.4%
语文		6	5	6	566	－34	18.1%
数学		6	5	5	534	－32	17.1%
外语		5	4	4	434	－66	13.9%
历史		2	2	2	200	＋30	6.4%
地理		2/3	2		153	－17	4.9%
物理			2	2	132	－32	4.2%
化学				3	96	=	3.1%
生物		2	3		170	－30	5.5%
体育		3	3	2	268	－63	8.6%
音乐		1	1	1	100	=	3.2%
美术		1	1	1	100	=	3.2%
劳动技术		1	2	2	166	＋166	5.3%
总并开科目		11	12	11			
选修课							
周总课时		31/32	32	30	3119	＋53	
活动	时事政策班 团队活动	1	1	1	100		
	课外活动	3	2	2	234		
周活动总量		35/35	35	33	3453		

置的表现。教学机智是教师知识和能力的综合体现。它要求教师首先要善于在突如其来的教学情境面前能迅即察觉，并能深入地了解其产生的原因，发展过程与未来趋势，从而当机立断，采取符合实际的，合乎情理的措施。很明显，教师如果没有一定的知识水平，没有一定发展水平的注意力、观察力、思维力是不可能做到的。教学机智还要求教师具有高度的事业心和责任感，有良好的个性心理品质。不言而喻，不热爱教育事业，不负责任，就根本谈不上教学机智的问题，如果教师不善于控制自己的情感，遇事紧张，急躁，也谈不上教学机智的问题。教学机智是教师长期学习，实践修养的结果，是教学经验的结晶。它在数学教学中常常表现为：合理设计课堂教学层次，源于教材，又不拘泥于教材；妥善处理难点；在关键时刻，构造并使用简明生动击中要害的反例；当学生提出的问题发人深省，对于深入理解教材具有一定价值时，因势利导，不失时机带领学生进行探讨，将学生思维的焦点引向知识的深处；根据学生的反馈信息，临时地部分地改变原定教学计划，变换或追加新的问题；根据学生的反应速度，及时调节教学节奏，等等。

教学过程 教学实施过程。即教师根据一定社会的要求和学生的认知水平、身心发展的特点，借助于一定的教学条件，有计划有目地指导学生积极主动地进行学习的过程。在这个过程中，要求学生掌握系统的文化科学基础知识和基本技能，发展智力，培养能力，增强体质，并形成一定的思想品德。对教学过程的探讨具有悠久的历史。最初人们对它的认识只限于从现象上加以直观地描述。随着科学技术和教育科学理论的发展，人们对教学过程的基本规律和特点的认识不断深入。在历史上中国和外国的许多教育家提出了关于教学过程的许许多多理论，这些理论虽有历史和阶级的局限性，但其中有不少有益的见解。马克思主义产生后，对教学过程才获得了科学的理论指导，教学过程的理论才有了新的发展，转入了一个新阶段，现代教学论对教学过程的认识日趋深刻、全面。

根据教学过程的一般理论，指导数学教学，使之有计划地实现数学教学大纲所规定的教学内容、教学目的要求的实施过程，就是数学教学过程，这个过程称为特定学科的教学过程，这个过程是由数学学科的自身特点而确定的。

教学关键 教学活动中解决问题的着手点，即对进一步学习其它知识起决定性作用的那些知识和技能。对教学关键，教学中必须把它抓住，集中力量，选用适当的最有效的方法，使学生切实学好练好。关键还是攻克难点，突出重点的手段。一堂课的重点确定了，难点找准了，采取什么方法解决这些问题呢？就是关键。关键也可以象重点、难点一样，分散到每个教学环节和具体步骤中去，把大关键划为一个个小关键来解决。

教学设计 教学工作中最基础的环节。即预测教材内容、学习环境、教师行为所引起的效果，并规划自己的教学行为，亦即形成设想。这里的

"设想"指的是教案中所记述的教学过程。不过，实际的教学不可能全凭教师设计好的计划进行，因为教学设计中存在着许多不确定的因素。如何设计好教学，是广大教学工作者需要不断探索的课题。从现代教学论来看，下述几点尤其为人关注。①明确教学目标；②悉心研究教材；③学生初始能力的诊断和测量；④搞活教学组织；⑤最佳教学措施的制定；⑥实施教学评价。

教学系统　通常是指由教师及教导人员、学生、教材和其他教学条件组成的系统。教师在教学系统中起主导作用，是系统运行程序的设计者，控制者，是知识、技能的传授者，学生学习的引导者。学生是教学的对象和教育的客体，又是学习和自我教育的主体，教材则是教师教和学生学的客观依据和评价标准。在教学系统不断运行中，学生在教师有目的有计划有组织的指导下，积极主动地掌握教材中所述的基础知识和基本技能，发展智力和体力，陶冶一定的审美观点，培养一定的思想品德，这就是教学系统的特定功能。

教学评价　依据教学目的，根据教育学和心理学的理论，用科学的方法和手段，对教学效果、教学任务完成情况，以及学生学习的质量和发展水平进行分析，作出价值判断。教学评价的作用一方面在于促进教育目标的实现，另一方面是为了调动教师的积极性，学生的积极性以及保证各类学校的各科教学达到一定水平的作用。教学评价的范围很广，它包括课程设置的评价，教学目的的评价，教材的评价，教学方法的评价，教师教学工作的评价，学生学习质量的评价，学生课外活动的评价等等。各种评价的因素应该是全面的。如，对于学生质量的评价，不仅要对学生的学习成绩进行好坏、优劣、高低的判断，还要分析从测量中反映出来的问题，诸如学习的兴趣、态度，学习的习惯，学习的意志，学习的环境，乃至健康状况，从定量和定性的结合上阐明对学习结果的影响，由此做出教学上进一步指导或弥补的决策。

教学规律　列宁说："规律就是关系……本质的关系或本质之间的联系"。所谓教学规律就是教学过程中的内部联系或本质联系。由于教学过程的复杂性，其中有哪些本质的联系目前还存在着不同的认识。苏联巴班斯基认为教学规律可以概括成九条：①教学过程制约于广泛的社会进程和社会主义社会的需要；②教学过程与包括在完整的教育过程中的教养、教育和发展过程相联系；③教学过程取决于学生的实际学习能力；④教学过程取决于其进行的外部条件；⑤教和学的过程在完整的教学过程中是相互联系的；⑥教养的内容取决于教学任务，它反映了社会的需要、科学发展的水平和逻辑性，实际的学习能力及其他教学条件；⑦激发、组织和检查学习活动的方法和手段取决于教学任务和内容，当然也取决于教学目的；⑧教学组织形式取决于教学的任务、内容和方法；⑨在相应的条件下，教学过程的所有成分间的相互联系能保证取得巩固、有意识而积极的教学效果。

我国的一些学者认为支配教学过程的基本规律有三条：①教学认识过程简约性的规律。表现为学生认识的对象以系统的知识为主。学生在教学过程中的认识活动是在教师引导下，在特定的教学环境中进行的，它既可以从生动的直观开始，也可以从抽象的理论开始，有时还需要从有领导的实践活动开始。②学生的发展以认知教材为基础的规律。表现为教学和发展是相互制约的。教学中的发展要以教材为主要中介。教学中的发展必须通过有组织的认知活动才能实现。③教和学相互依存的规律。表现为教学过程中，教和学相互依存的关系首先是建立在人类世代交替这一客观需要的基础上的。教和学之间是互为影响的一种双向关系。

教学质量 教学水平高低，效果的优劣。现代教学论认为，衡量教学质量的标准应当有三条：第一是知识标准，即要使学生掌握系统的科学文化基础知识，形成基本技能和技巧；第二是发展标准，即要发展学生的智能、体力和个性品质；第三是教育标准，即使学生形成科学世界观的基础和共产主义道德品质。此外，巴班斯基还提出一条时间标准：学生和教师应遵守学校卫生学和相应文件所规定的课堂教学和家庭作业的时间定额，不能采用延长时间加重负担的办法完成教学任务。

教学单元 教材的相对独立部分。一门学科的教材，常分为大小不同的若干单元，即性质相同，相近而有内在联系的教材，组成一个相对完整的整体，分编节目，安排作业，以便连续在一段时间内进行教学。单元和单元之间有一定的联系。

教学相长 教和学的相互促进。《礼记·学记》：学然后知不足，教然后知困，知不足然后能自反也；知困然后能自强也；故曰教学相长也。现在中国教学中教学相长还意味着师生之间的相互推动、共同提高。

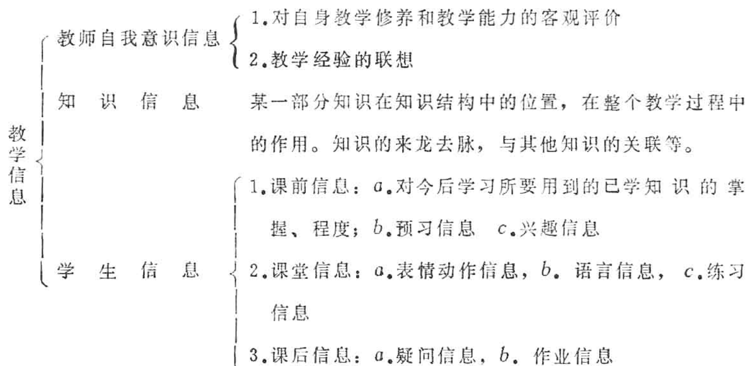
对此，老教育家段力佩认为，学生也是教师的老师。学生存在的知识缺陷，往往是教师知识的弱点；在教学中，学生对某一问题听不懂，教师作了解答后学生仍然不懂，一般地说，这恰好是说明了教师对这个问题还没有完全领会。这就是说，学生帮助教师找出了知识的簿弱环节，起到了老师的作用。同样，教师进修的结果，也必然要到学生中去检验，从教学质量的高低，说明教师进修成绩的好差。

教学要求 教学大纲的主要组成部分。是对各项知识教学、技能训练，能力培养和思想教育在掌握方面作出的具体规定。数学教学中，把教学要求划分了四个层次，每个层次都使用了相应的表述用语：第一个层次是“了解”“认识”。指的是了解单个概念、命题的涵义。比如，“了解”勾股定理，是指知道勾股定理是直角三角形两个直角边平方的和等于斜边的平方。第二个层次为“理解”、“弄懂”、“领会”。指的是达到了理性认识，知道概念或命题的来龙去脉，以及它和其它概念或命题之间的联系。如“理解”勾股定理是要求不仅会证明它，而且了解怎样想到这样证明以及它的作用。第三个层次为“掌握”、“熟悉”。指的是变成了

自己认识结构的一部分，成了自觉的知识，有了运用的技能。比如“掌握”勾股定理就是能够运用勾股定理去解决一些问题。第四个层次为“牢固掌握”、“熟练掌握”、“灵活运用”。指的是形成了能力，运用自如。此外，对技能和能力的要求，还使用了逐步提高的词语和限制性词语。例如，“进一步”，“不要求”，“简单的”“一些”。这四个层次是互相关联的，后一个层次的要求包含了前一个层次的要求。每一个层次的要求也有深浅不同之分。教学要求有时也指一节课的具体要求。

教学重点　在教学内容的逻辑结构特定层次中占居相对重要地位的基础知识。在教材中它是客观存在的统一的。一般从以下几个方面确定：第一，教学重点应是某部分教材的核心内容；第二，教学重点应是学习其他内容的基础；第三，教学重点应是应用广泛的部分。第四，不应把教学重点单纯地理解为知识技能上的重点，还应考虑训练学生智力活动方法的重点。教学重点的实质，是概括程度最高或较高一级的内容，而其中又必然蕴涵着广阔的智力活动领域。

教学信息　通常是指教师为了控制教学过程所必须掌握的信息。对于教学信息，我国学者马欣给出了如下的分类：



教师获得“自我意识信息”可称为“知己”，获得“知识信息”和“学习信息”可称为“知彼”。全面掌握教学信息，即可对教学程序作出设计，并随时调节，达到控制教学过程的目的。

教学语言　指教师在教学中讲授教材，激发动机，启发思维，影响情感等方面所运用的语言。不同学科的教学语言，其要求不尽相同。数学教学语言的基本要求是：

（1）科学性　首先教师切忌讲违反科学原理出现知识性错误的话。例如“定理成立，逆定理不一定成立”。其次，教师讲解要符合由浅入深，由表及理，由具体到抽象，由特殊到一般，由已知到未知的认识规律。三是言必有据，不可信口开河。

（2）精确性　数学是一门严谨的科学，教材中用来表示定义、定理的语言都是精练的确切的。数学教学语言的精确性首先表现在严谨与准确上。例如，直线倾斜角定义中“向上（右）的方向与x轴的正向所成的最小正角”这一句话就不能少一个字，也无须添一个字。再如“等边对等角，大边对大角”由于省略了“在同一三角形中”这一状语成分，就会造成混乱，以致学生在证题时常常因此产生错误。精确性的第二个含义是措词要恰当，语言要规范，要讲究语法修辞。有“因为……”就应有“所以……”与之对应；“非要……”之后要接“不可……”部分之间，段落之间的过渡词语，关联词语，尤其是“或”与“且”之类的逻辑联接词的使用都十分讲究。那种不加思索，脱口而出的病语应当极力避免。精确性的第三个含义是要避免绝对化，要有发展的观点，否则将会造成被动，闭塞学生思路。例如在分母有理化时，有些教师片面强调“分母一定要有理化”，其实分母是否要有理化要视具体情形而定，有时需要分子有理化，而分母并不有理化。当然精确严谨不是绝对的，不能脱离学生的实际。

（3）启发性　启发性的数学教学语言首先表现在符合思维逻辑，其次是引人入胜，激励思维。给学生以发人思考意境，促使学生的求知欲由潜伏状态转入活泼状态。启发性的另一个表现是形象直观富有趣味性，如果能将抽象的概念变得具体，深奥的道理变得形象，这样的描述显然会印象深刻，经久难忘。

（4）思想性　语言是思维的主要表现形式，任何语言都是一定的思想的反映，所谓纯知识性的教学语言并不存在。政治、语文是这样，数学等自然科学也同样是这样。每位数学教师有责任也应当紧密结合教材内容，通过自己的教学语言，有目的、有计划地对学生进行辩证唯物主义观点的教育，潜移默化，教书育人，培养学生学习科学、热爱科学、献身四化的可贵品质。

教学速度　即教学进度的快慢。在单位时间里教授和学习教材内容的份量。教学速度应根据教材的主次和难易来确定。对于重点、难点的内容一般是放慢进度，以保证教学的质，对于次要，容易的教材加快进度保证教学的量。多次单调的重复练习和复习旧课，把教学进度拖得很慢，会使学生失去兴趣，进度过快，学生没有思考的余地同样也是不可取的。

教学原则　教学工作必须遵循的基本要求和指导原理。它主要阐明，在教学中应当怎样遵循教育目的，正确掌握和运用教学过程的客观规律进行教学活动，加速教学进程，大面积提高教学效果。教学原则是教的客观规律和学的客观规律的反映，所以它也是指导学生学习活动的基本原理。

根据教育目的和教学过程的客观规律制定的教学原则，是长期教学实践经验的总结。由于古今中外各个流派的教育家对教学过程的规律认识不同，各个时代教学实践所制定的任务要求不同，因而在教学原则的概括上呈现出多样性和差异性。

我国是社会主义国家，我国的教

育学根据社会主义教育目的和马克思主义教学论所揭示的教学过程的客观规律，批判地继承了教育史上教学原则遗产，制定出中小学常用的教学原则，主要有：①科学性和思想性统一原则；②理论与实际结合原则；③积极主动性原则；④传授知识和发展智力统一原则；⑤直观性原则；⑥循序渐进原则；⑦巩固性原则；⑧统一要求与因材施教结合原则。等等。

教学原则贯穿于整个教学工作中，它对制定教学大纲，教学计划、选编教材，选择教法和安排教学组织形式等都起着指导作用。正确运用教学原则，是完成教学任务，提高教学质量的重要保证。

教学效果　通过教学，在学生身上所发生的变化。包括：学生对基础知识、基本技能的掌握、能力的发展以及良好个性品质的形成。学生的收获和提高是教学效果最直接的反映。影响教学效果的因素是多种多样的，包括教师的修养、教学水平、教学态度、教学方法、教学手段、学生的基础、学习态度、学习方法、师生关系、环境影响等等。

教学难点　学生理解、接受比较困难的教学内容。教学难点的确定一般根据下列几个方面：第一，知识由旧到新，要新观点，新方法，这期间所出现的概念、方法往往就是难点。例如，函数、轨迹、集合等概念的出现、反证法，同一法的开始使用。第二，知识本身抽象，而学生概括能力相对地说较弱。例如，数列极限的定义，异面直线的有关问题。第三，知识实质比较隐蔽，而学生认识停留在表面。例如，算术根的概念。第四，知识内部结构比较复杂，学生推理论证能力跟不上。难点在教学上有其双重性，它可以成为发展智力的泉源，也可能构成发展智力的绊脚石。因此，确定难点并不是目的，重要的是确定后如何处理。值得注意的是难点有时也是重点。

教学难度　通常是指教学内容的复杂性，同时也理解成学生的努力程度。教学应该有一定的难度，如果教材和教法使学生面前没有出现应当克服的障碍，那么学生的发展就会萎靡无力。但是，难度也必须有一定的分寸，如果提供的教学内容和教法并不是学生经过努力后所能掌握的，那么教学也将变得毫无吸引力。

教学控制　教学过程的控制。分两个环节，一是确定教学目标和实现教学目标的途径，即备课；二是把教学活动引入并保持在计划要求的轨道上，即调节。调节的方式一般以反馈调节为主，辅以带补偿的调节。控制的内容可分为：

（1）教学目标的控制　即教学目标的确定、调整、修订等。

（2）教学内容的控制　根据教学目标、选择、确定教学内容，确定和调整教学内容的数量、深度和范围。可称定量控制。

（3）教学结构及程序的控制　控制和调整各教学阶段之间的联系，包括联系的有无，联系的内容和方式，联系是否正确，是否同步，各阶段衔接关系如何等。可称定序控制。

（4）教学速度及训练强度的控制　要以学生的输出为标准，包括数

量、速度、正确率、难度等方面。可称定度控制。

（5）教学方法的控制 教师在课堂上选择恰当的教学方法，创设出教学的最佳环境。教师情绪高，学生兴趣浓，极易产生"教学共鸣"。可称定法控制。

教学控制的基本方式是反馈控制，但不排除有的老师采用前馈控制亦能获得成功。这必须课前作出周密的安排，对于各类学生各有何反应，有何难处与出错之处都了如指掌，并在教学过程中，对学生头脑中正在孕育的错误，通过提醒、暗示等手段，防患于未然。采用这种控制方式的教师必须有相当高的教学水平和极为丰富的教学经验。

教学策略 教育实践工作者（特别是教师）对课堂教学的系统决策与设计。包括教学内容的选择与呈现、教学方法与教学辅助手段的选择、课堂管理和相互作用的策略，还包括教学实施过程和之后所接受的反馈信息而对教学策略本身的修订。教学策略同教师的教育观念、教学经验和教学风格是紧密联系在一起的。因此，对于教学策略，有着许多不同的理解和看法。比如，教学策略即教学模式；教学策略即教学理论的实施；教学策略是教师教学风格的一个组成部分；教学策略就是教学方法的选择和应用；也有把教学策略看成是教学方法和理论的选择与优化问题。这些观点是分别从不同的角度来探讨和说明教学策略，难以避免其局限性。

教师中心论 教师在教育过程中占什么样的地位，发挥什么作用的问题上，一种与学生中心论截然不同的观点和学说。这种理论以赫尔巴特为代表。赫尔巴特曾尖锐地抨击十八世纪启蒙时期产生的"自然教育"的思想，他认为"把人交给'自然'，甚至把人引向'自然'，并在'自然'中锻炼只是一种蠢事。"他形象地把人的自然本性比作一只大船，若要经得起一切风浪的变化，只能等待舵手去按照环境指导它的航程，指挥它到达目的地。对于学生来说，教师起了这种舵手的作用。他认为，学生的心智成长全仰仗于教师对教学形式、阶段和方法的刻意求工和定式指导。为此，他十分强调教师的权威，宣称："在教育的其他任何职能中，学生是直接在教师的心目中……学生对教师必须保持一种被动状态"，并说"按照方法培养心智的艰巨任务，从总体上讲应留给教师"。

持教师中心论的人，从哲学理论上一般都是外因论者，而从心理学理论上分析，很多是渊源于行为主义理论。一般行为主义者都认为不应当从人的内在心理去寻求对人的行为的解释，而应当从决定行为的那些外部条件来解释人的行为。因此在教育过程中，教师只需要通过包括他的奖赏、惩罚在内的外部刺激就可以控制学生的学习。从一部分现代行为主义者看来，教育本质上是一种行为矫正问题，一名教师就是一个行为工程师，他完全可以按照他的预期要求去形成学生的一定行为。教师的职责就是把条件反射程序设计施之于人，使学生作出期待中的反应，避免不期待反应。他们重视的只是环境变化和行为

变化之间的函数关系，把学生完全视为一种因变数，认为他们在教育过程中是一种完全消极被动接受外来影响的客体。

教学与发展　教学与发展的关系是心理学和教育学都研究的重要问题。事实上，每一种教学的理论都包含有（不管他是否意识到）一定的有关发展的理论主张。其中一种观点为：儿童的发展过程不依赖于教学过程。在这种理论中，教学被看成是纯粹的外部过程，这一过程应当这样或那样地适应儿童的发展进程，但是它本身并不积极参与儿童的发展，它不会改变儿童发展中的任何东西，与其说它推进儿童的发展过程和改变发展的方向，还不如说它利用发展的成果。这种理论的典型代表是皮亚杰，在他的理论里，儿童的推理和理解，世界的表象，对自然的因果关系的解释，对思想的逻辑形式和抽象逻辑的掌握，这些过程都被研究者看成为似乎是不受任何来自儿童的学校教学方面的影响而由自己本身来进行的。机能的发展与成熟，与其说是教学的结果，不如说是教学的前提。教学是建筑在发展之上的，实质上丝毫也不会改变发展中的任何东西。另一种观点，可以概括为教学也就是发展。这种观点的代表是詹姆斯、桑代克。他们把教学与发展混为一谈，把两种过程等同起来。第三种理论（考夫卡等人）试图把上述两种观点结合起来。根据这一理论，发展是两种实质上不同的，然而是联系着的，彼此相互制约的过程为基础的。一方面，成熟直接依赖于神经系统的发展过程，另一方面，按照考夫卡的说法，教学本身同样也是发展的过程。在这一理论中有三个方面是新的：第一，两种观点结合起来这一事实本身就已经说明，这些观点并不是对立的，相互排斥的，而是实质上它们间有共同的东西。第二，构成发展的两个基本过程是相互依存、相互影响的。成熟过程为一定的教学过程作准备并使其成为可能；教学过程激励着成熟过程并使其推向前进。第三，扩大教学在儿童发展进程中的作用。在以上三种理论的基础上，苏联心理学家维果茨基运用区分儿童发展的两种水平的原理，对教学与发展的问题，提出了更正确的解决办法。第一种水平是现有发展水平，由已经完成的发展程序的结果而形成，表现为儿童能独立解决智力任务。第二种水平称为最近发展区，说明那些尚处于形成状态、刚刚在成熟的过程正在进行。这一水平表现为：儿童还不能独立地解决任务，但在成人的帮助下，在集体活动中，通过摹仿，却能够解决这些任务。儿童今天在合作中会做的事，到明天就会独立地做出来。教学创造最近发展区，然后最近发展区转化到现有发展水平的范围之中。“发展过程并不是与教学过程同步的，发展过程跟在建立最近发展区的教学过程的后面”。“只有那种走在发展前面的教学才是良好的教学”。“教育学不应当以儿童发展的昨天，而当以儿童发展的明天为方向”。这就是维果茨基所做的结论。

赞科夫在前人的基础上，进行了长时间的“教学与发展问题”的实验，提出了“一般发展”的概念。所

谓一般发展，就是不仅发展学生的智力，而且发展情感、意志品质、性格和集体主义思想。是指儿童个性的发展，它的各个方面的发展，还应包括身体的发展。并且从理论与实践的结合上解决了“在什么样的教学论体系下才能在学生的发展上达到最理想的效果？”

我国近几年来的理论研究和教改实验，丰富了教学与发展的理论。例如：在教学规律的研究中，提出了教学的发展性规律；研究了非智力心理因素在教学过程中的作用；进行了小学教育综合整体实验，如华东师大教科院小学综合实验组的实验“要求在教育工作中把思想品德、知识、能力和体质作为一个整体来培养学生，……促使学生在德、智、体几方面，在知、情、意、行等心理特征方面得到全面的和谐的充分发展”。

教案的运用　教案是上课的具体执行计划、方案。有了教案，上课就有了遵循、依托，可以加强教学的计划性、科学性。但是，上课不能完全死背教案，即使是写好的讲稿，也不能照读。因为教学是师生双边活动的统一体。教师或学生任何一方的情况有特殊的变化，都会引起教学的整体变化。在上课执行教案的过程中，可能出现种种情况，因此，教师在教学过程中要根据具体情况灵活处理。任何时候都不能死守原教案。否则，教学进度和教学效果都会受到很大影响。

由于认识的局限性，原订的教学方案在实践中会出现某些不符合实际的情况，这是不足为奇的。重要的是上课之后，要“静思回味”，认真思索，总结执行教案的情况，找出教案与实际执行的差异，教与学双方的得与失及其原因，写好“教后记”。这样经常坚持下去，会总结出许多好经验，教学不断改进，教学质量会不断提高。

教师主导作用　在教学过程中，教师按照社会的要求，有计划、有目的、有组织地对学生施以教育影响，使学生身心朝着特定方向发展。教师的这种主导作用是社会赋予的，是教学中教育者与受教育者的关系决定的。所谓“主导”其实就是矛盾的主要方面。从统一的教学过程的矛盾双方看，教师的教是矛盾的主导方面。这是因为教师是教学过程的领导者和组织者，教学活动的总体效果取于教。美国教育学家、心理学家布卢姆的“掌握学习”理论认为：“只要有合适的学习条件，绝大多数学生在学习能力、学习速率和继续学习的动机等方面将变得十分相近。”他们探讨了造成学生个别差异的三个变量，即学生基础知识和能力的程度、学生主动参与学习的程度以及教师的教学适合于学生的程度。可见，学生学习上的差异和学习水平，是由学生的学习史和他们所接受的教学质量决定的。

教师主导作用的实质，在于变教为诱，变教为导。我国著名的教育家叶圣陶指出：“教师教各种学科，其最终目的在达到不复需教，而学生能自为研索、自求解决。故教师之为教，不在全盘授与而在于相机诱导．必令学生运其才智、勤于练习，领悟之源广开，纯熟之源之功弥深，乃为

善教者。”可以说，这段话准确地论述了如何发挥教师的主导作用问题。

教师自编考试 仿照标准考试的试题形式，由教师根据自己在教学各个阶段的需要，自行设计与编制的考试。这种教师自编考试是目前学校应用最多和教师最乐采用的考试。它能配合教学进度检查教学目标的到达度，以便及时取得反馈信息，改进教学，提高质量。教师自编考试能促使教师在更广阔的范围内研究教育评价。教师在具体编制考试的过程中，要分析教材内容，确定单元教学目标和具体行为目标，这对于教学指导活动具有重要的意义。每个教师都应具备编制考试的知识和能力。

教育目标分类 布卢姆教学理论研究的基础。布卢姆认为完整的教育目标分类应当包括三个主要领域：由知识的掌握、理解及智力发展诸目标组成的认知领域；由兴趣、态度、价值观与正确的判断力、适应性的发展诸目标组成的情感领域；由各种技能和运动技能诸目标组成的精神运动领域。明确了在各自领域达到最终目标的过程中，应当形成顺次达到目标的系列。

这种目标分类同动植物学的分类一样，将教育目标分大、中、小三类，分成若干层次，是按渐次具体的方式进行的。拿认知领域来说，把术语和事实等“具体事物的知识”置于最下层，在它上面是“关系和法则的知识”，然后是能够在新情境中运用这些知识的“应用能力”。更高层次的认识能力，依次为“分析能力”、“综合能力”、“评价能力”。它表明了这样的目标达成系列：不掌握“个别的知识”，就难以掌握“关系和法则的知识”，而不掌握“关系和法则的知识”就难以掌握“应用能力”。这样就按由低到高的顺序排成了六级：知识、理解、应用、分析、综合、评价。每一级再分为若干亚级。形成了一个完整的分类体系。在教学目标的描述上规定了共同使用的行为术语，克服了过去对教学目标的描述过于抽象，笼统的弱点，为实际的贯彻、评价提供了方便。

精选、明确各门学科的教育目标，并使之结构化，一般称之为“目标分析”。它是教学研究和教学改革首要的基础工作。通过目标分析至少要明确：各门学科整个课程的结构；各门学科的年度教学计划和学期末、学年末必须达到的目标；各教学单元的目标结构。

布卢姆的教育目标分类，受到许多国家教育界的广泛重视，有人称之为“现代教育评价的重要基石。”继布卢姆之后，许多学者提出了不同的教育目标分类。如N•E•格朗伦德把教育目标分为：知识、理解、应用、思维技能、一般技能、态度、兴趣、欣赏、适应九类。日本的広冈亮藏把学力分为知识、理解、思考、判断等认识能力，技能鉴赏、表现等情感能力，趣味、关心、态度、习惯等态度能力。

教育实验效应 在教育实验过程中无关变量及其交互作用对实验结果的影响。例如，实验研究者往往对自己的实验结果抱有某种期望，这些期望常常通过某种方式传达给被试，必而影响他们的行为。这种现象被称为“实

验者偏见效应”。它是在实验者本身并未察觉的情况下发生的，并不是实验者有意安排情境来产生所期望的结果。在教育实验中，如果研究者强烈期望他的改革方法优于传统方法，很可能就会得到预期的结果，这种结果的产生可能不是改革方法本身，而应该归结为实验者偏见效应。因此，教育实验效应的研究是必须引起重视的。在教育实验研究中，著名的实验效应有：霍桑效应，约翰·亨利效应，皮格马利翁效应、安慰剂效应和实验者偏见效应等。

教育实验效度 教育实验的有效性。一项实验当且仅当其结果是来自于对自变量的处理并且这些结果能在实验环境外加以推广时才能认为是有效的。如果确认某项实验结果是来自对于某自变量的处理而不是其他变量的作用的话，就称这实验是内效的，实验的内效性反映了对实验结果的解释，因此，提高实验内效度的方法就是加强对实验的设计和过程的控制，尽量消除实验因素外的影响。实验的有效性还反映在实验结果可推广的程度上，称为外效度。一个成功的教育实验，其实验控制程度与实验推广范围两方面都应该是令人满意的。一个实验结果不能解释的实验是没有用处的，即使有可能广泛的普遍应用。另一方面，进行一项实验而发现其结果无法象实验目的所期望的那样普遍应用，同样也是令人失望的。在实际工作中不可能同时存在都尽善尽美的内部效度和外部效度，但研究者应力求一种充分的平衡，通过足够的控制使实验的结果能够解释，同时保持足够的真实性使实验结果充分地推广到预定的教育情境中去。

教学目标分析 精选、明确一门学科或一章、单元教材的教学目标，并使之结构化。它是教师备课中最重要的工作之一。这项工作的一般步骤是：首先确定教学目标的分类层次以及每个层次使用的表述用语。例如，教学大纲使用的是了解、理解、掌握、熟练掌握四个层次，布卢姆划分为知识、领会、应用、分析、综合、评价六个层次。山东省教学研究室编写的《初中数学教学目标分类指导》用的是识记、理解、应用、综合四个层次。其次根据大纲确定教材中每个知识点及其细目的学习水平（即应达到哪一个层次）。最后精选每个知识点在各层次的具体目标（最好是行为目标）形成目标体系。教师备课中的目标分析的依据是教学大纲和教材。

教学原则体系 教学原则是根据教育目的和教学过程的客观规律制定的。它是教学实践经验的总结。同时它也受着认识论和方法论的影响。因此，古今中外的教育家，提出了许多不同的教学原则体系。建国以来对我国教学论和实践有过较大影响的教学原则体系有：

（1）苏联教育家凯洛夫教学原则体系：自觉性和积极性原则；直观性原则；教学的理论联系实际的原则；教学的系统性和连贯性原则；教学的巩固性原则；教学的可接受性原则；班级教学中个别指导的原则等。

（2）苏联教育家赞科夫教学原则体系：以高难度进行教学的原则；

以高速度进行教学的原则；理论知识起主导作用的原则；使学生理解学习过程的原则；使全班学生（包括差生）都得到发展的原则等。

（3）美国教育家布鲁纳的教学原则体系：动机原则；结构原则；程序原则；反馈原则等。

（4）苏联教育家巴班斯基的教学原则体系：教学与生活、共产主义建设实践相联系的原则；教学的方向性原则；教学的科学性原则；教学的系统性，连贯性原则；教学的可接受性原则；为教学创造最优条件的原则；各种教学方法最优结合的原则；各种教学形式最优结合的原则；学生的自觉性和积极性原则；教养、教育和发展成果的巩固性和效用性原则等。

教育评价的方法　不同的划分标准，有不同的评价方法。教育评价的方法按照评价基准来划分有三种，即相对评价、绝对评价和个体内差异评价。如果按照考查的范围来划分，可以分为分析评价法与综合评价法。如果按评价的主体来划分，可分为自我评价与他人评价。如果按照是否采用数学方法来划分，可以分为定量评价法和定性评价法等。

教育评价的要素　中小学教育评价的要素是构成中小学教育评价的主要成分。它包括以下几个方面：①评价的目的。指出为什么评的问题。②评价的对象和评价内容。不同的评价对象，涉及不同的评价内容，应有不同的评价标准，应建立不同的指标体系，这是任何评价必须首先明确的。③具体的评价方法。它包括如何制定评价的指标体系，如何实施评价，如何搜集和处理评价信息等。④评价人员由哪些人组成。⑤评价的时间和周期。⑥评价对象的背景条件。任何评价对象都处在一定的环境中，受很多条件的制约。我们不能只看实际效果，不管背景条件，进行“一刀切”的评价。

教育测量的要素　教育测量和其它测量一样，也具有以下三个要素：①测量单位。没有单位，数量的多少便无法表示，数量化的分析便无法进行。但是，教育测量所使用的一些单位（如考试的分数单位）和物理测量单位不一样，教育测量中使用的单位的价值不是绝对相等的。如考试成绩中59分与60分之间的差异，与69分至70分之间的差异并不相等。②参照点。要测定事物的量，必须有一个计算的起点，这个起点即为参照点。参照点有两种，一种是以绝对零点作参照点；一种是以人为零点作参照点。在教育测量中，多以人为零点为参照点。以人为零点起计算的考试分数，不能以倍数作比较也不能作代数运算。如甲生数学考试得80分，乙生得40分，丙生得40分，我们不能说甲生的数学程度是乙生数学程度的2倍，或说甲生数学程度是乙、丙两生数学程度的和。③量表。它是测量的工具，是表示量数的方法。如尺子是度量长度的量表。教育测量中所使用的量表多以文字试题的形式出现，也有以图形、符号、操作要求的形式出现的。这种量表主要有百分量表、等级量表、T量表等。

教育测验的特点　教育测量的特点主要有：①教育测量一般是间接测量，

依据人的外显行为，间接地测量人的心理活动的特点和水平。如，以学生回答试题的情况，间接地对其知识水平、能力状况做数量化的测定。②教育测量的测量单位是相对的，参照点是人为的。如，甲生在某校得70分，乙生在另一学校得80分，并不能仅从这两个分数判断乙比甲优。任何测验的分数，都只能在确定的相应群体中，才能正确理解它的含义。③教育测量的精确性较差，其误差难控制。各种偶然因素都有可能导致测量结果的变化。

教学方法的选择　教学方法是多种多样的，没有一种教学方法是万能的。教学过程是千变万化的，每堂课都有各自的任务、特点。因此，教师要从具体情况出发，恰当地选择和灵活地运用各种教学方法，顺利地完成教学任务。选择教学方法的依据是：

（1）教学具体任务　任务不同，教法就不同。一般地，传授知识时，多用讲授法、谈话法、演示法等。培养技能时，多用练习法，实验法等。连续完成几种任务的课型，要交替运用不同性能的教法。

（2）教学具体内容　方法是为内容服务的，不同内容，就需用不同教法进行教学。如数学课的教学，较多运用练习法；语文课的教学较多运用读书指导法。

（3）学生的年龄特征　不同年令段的学生，具有不同的生理和心理素质，需要采用不同的教学方法进行教学。如低年级学生注意力不持久，具体形象思维占主导，教学中主要采用谈话法和演示法；较高年级学生，由于抽象思维能力的发展，自控能力不断增强，教学中就可较多的采用讲述法和讲解法。

（4）个人和班级特点　教学方法既应适应学生个人的差异，又应适合班级的一般特点。不同学生、不同班级，就需要使用不同的教学方法，即使运用同一种教学方法，也应有不同的特点。

（5）实际条件　要从实际出发，因地制宜，把需要与可能结合起来。要充分利本地、本校条件，发挥教师自我优势，扬长补短，积极创造条件，展示教学方法的威力。

教学生学会“反思”　世界著名数学家和数学教育家弗赖登塔指出：“反思是数学思维活动的核心和动力”，“通过反思才能使现实世界数学化”。所谓反思指的是理论发展和解题思维过程（概念形成的过程，定理发现的过程，论证定理或解题的思考过程，法则、方法和技巧使用的条件和背景的缘由）的再现，旨在通过这种思维过程的再现，澄清理论或解题方法是在怎样的数学思想或数学观念的指导下想出来的。这一点正是学习数学中最本质最要紧的东西，是学习数学理论或解题方法的精华，是培养数学思维能力的核心。反思的涵义是广泛的，这里也包括学生对自己学习过程、学习方法的反思。反思的进行应该是经常的，解完一道题，上完一节课，学完一个单元，一章教材之后，都应该引导学生反思。引导的办法是给学生创设问题情境。例如，一节课下来，教师可引导学生思考这些问题：①这节课的主要内容是什么？

②这节课的重点和难点在哪里？搞懂了吗？③这节课中出现了哪些典型的思想方法和处理数学问题的技巧？④这节课中的概念是如何引入的？还有没其它的定义方式？⑤本课中的结论是怎么推得的？结论能否推广？能否换一种方式表达？⑥本课用了哪些旧知识？这些旧知识起着什么作用？⑦以前是否见过类似本课的思想方式和处理技巧？这种方法能否再推广？能否用来解决以前的旧知识问题？⑧你发现新旧知识是通过什么关系联系起来的？⑨你能举出一个用课本的结论来解决的问题吗？长期下去，学生定会养成反思的习惯。

教学生学会学习　即培养学生独立学习的能力。这种能力主要表现为：学生在教师的指导下，自觉地、主动地不断总结自己的学习活动的规律．并且有效地组织影响学习活动的各种内因和外因，以成功地完成学习任务，促进学习者德育、智育、体育诸方面的全面发展。怎样教学生学会学习是心理学和教育学专家所共同关心的问题。基本看法如下：

（1）提高学生的主体意识　使学生意识到自己就是组织、指导和监督学习活动的主体。养成对自己的学习与工作或活动进行计划、检查、反思的习惯。

（2）帮助学生掌握智力劳动的一整套方法　包括教会学生通过多种途径获取知识的方法，例如，怎样学习教科书，怎样使用参考书，怎样提问等等，教会学生观察的方法、分析、综合、比较、抽象、概括、判断、推理的方法，记忆的方法。

（3）要不断指导学生总结自己的学习活动规律，引导他们把自己的学习过程本身作为认识思考的对象。包括知道自己在什么时候知道什么和不知道什么，预计自己操作的成绩，有计划地分配时间和精力，检验自己的结论或学习的后果等等。也就是要给学生一套次认知技能。

（4）学生独立学习能力的形成，是一个长期的实践过程。总的来说要经历完全依靠教师，基本依靠教师，相对独立，基本独立和完全独立五个发展阶段。具体实践中又与课程、章节、单元的教学进程相关联。一条基本的原则就是：在不同的发展阶段应采用不同的教学方式，所采用的教学方式，要适合学生的学习能力，并能充分发挥和发展学生的学习能力。

（5）在教给学生学科知识的同时，还应教给该学科的研究方法。

此外，学生独立学习能力的形成还与师生关系、教学民主化、个性化的程度、学生学习动机有关。

教学过程本质论　教学过程的本质问题，是教学论的基本问题之一。长期以来，我国教学论工作者致力于教学过程本质的探讨，到目前为止，有代表性的学说主要有如下几种。

（1）认识说　认识说认为，教学过程是一种在教师指导下学生学习前人已经认识了的知识、技能的认识过程。“认识说”源于苏联教育家凯洛夫编写的《教育学》，在我国曾产生过重大影响，至今在教学实践中仍有很大市场。这一学说试图以马克思主义认识论为依据，来揭示教学过程的本质，是一个很有价值的探索，也

确实对当代中国的教学实践起过一定的积极作用。但是，“认识说”把教学过程仅仅局限于认识世界的过程，忽视了教学过程中学生改造其主观世界的实践活动方面，陷入了机械唯物主义的认识论，导致了形而上学。在教实践中，把教学过程仅仅看作认识过程，仅仅局限于知识、技能的传授，势必会轻视发展智能、完善个性等教学的基本任务。

（2）认识——发展说　这种学说认为，教学过程是教师有目的有计划地引导学生掌握文化科学基础知识和基本技能，发展认识能力，逐步形成辩证唯物主义世界观基础和共产主义道德品质的过程。在教学过程中，学生对客观世界的认识，由不知发展到知，由知之不确切不完全发展到比较确切比较完全。同时，他们的体力、智力和情感意志、思想品德等也得到发展。所以，教学过程实质上是教师指导下的学生个体的认识过程和发展过程。它针对“认识说”在实践上忽视学生智能发展这一局限性，提出了发展的观点，是一大进步。

（3）双边活动说　这种学说认为，教学过程是由教师的教和学生的学共同组成的双边活动过程。将教学过程看作是一个活动过程，为进一步科学地把握教学过程的本质奠定了认识论上的基础。但是没有将教和学分出主次，而是等量齐观。

（4）哲学指导说　马克思主义认识论认为：人类的一切活动都既是实践的活动，也是认识的活动。教学过程，作为人类社会的一种特殊活动过程，同样包括了两个方面：①反映与被反映的认识关系；②改造与被改造的实践关系。由此，可以说：教学过程是学生在教师的精心组织和指导下，对人类已有知识经验的认识活动和改造主观世界、形成和谐发展个性的实践活动的统一过程。这种学说确立了学生在教学过程中的主体地位，学生不仅是认识活动的主体，而且也是实践活动的主体；说明了教学活动的特殊性，这里不仅是教学过程中学生在教师的组织和指导下对教学内容的认识活动与一般的人类认识活动有着本质上的区别，而且学生改造主观世界的实践活动与一般人类实践活动也有着本质的差别。学生的实践活动，主要是改造自己的主观世界，发展智能，形成全面发展的和谐个性，而一般的人类实践活动却是改造客观世界的支配和利用。当然，不可否认，人们在改造客观世界的同时，也改造了自己的主观世界。同时，这种学说还肯定了教学过程中学生的认识、实践两种活动的相互作用和教师在教学活动中的作用。

教学过程最优化　苏联当代教育家巴班斯基提出的教学理论。他运用辩证的系统论观点分析教学过程中的理论和实践问题，把教学论的研究建立在辩证法和系统论基础之上。

所谓“最优化”，就是“在教养、教育和学生发展方面，达到在当时条件下尽可能好的成效，而取得的成效师生所用于课堂教学和课外作业时又不超过学生所在学校卫生所规定的标准。”最优化的基本标准就是“尽可能大的成就和师生以消耗合理的时间去取得这些成效”。要实现教

学过程最优化，教师必须做到：

（1）综合设计，明确地提出教养、教育和学生发展任务，并结合班级特点给予解决。

（2）合理安排教学内容，实现三方面要求：一是具有明确的方向性，即指向顺利地解决课堂教学所拟定的教养、教育和发展任务。二是分清主次，形成迁移，应该划定出教学内容中最重要、最基本的成分，将学生注意力集中到这些成分上去。在教师强调重点内容的同时，要因势利导地引导学生学会举一反三地发现课题中最本质的东西。三是科学地安排作业，数量适中，不增加学生负担。在学习效益方面，保证学生从中获得最大收益，养成用触类旁通的方法解答同一类问题的能力。这就效益好。要注意因材施教，针对差生和优生分别布置作业，以区别对待，保证在各自的基础上都有所提高。总之，教学内容上要有综合的目的，其中又必须划出重点，选择数量最合理的练习，以实现教学过程的最优化。

（3）灵活运用教学方法　教学有法，教无定法，有规可循。这就是说，教学没有固定的模式。教师应该根据课题内容的特点及其难度、课堂教学各个阶段的教学和教育任务、学生学习方法运用情况，灵活选择教法。此外，在选择教法时，还要注意有利于激发学生的学习兴趣、义务感和责任心等。

（4）从班级实际出发，根据学生特点，将每一课的教学任务具体化　为此，要求教师：①要充分熟悉共产主义教育的总任务、所教学科自身的任务和各种教学方式方法。②教师要有较好的素养和教育机智。③教师要了解所教的班集体的特点及每个学生的学习能力。

（5）教师要重视研究学生，做到教书育人。

（6）确保课堂的学习纪律。自觉地遵守学习纪律，是实现教学过程最优化的重要保证之一。

（7）要因材施教，区别对待学生　要重视研究后进生（差生），慎重对待后进生；也要注意研究优生，正确对待优生。优生和后进生不是固定不变的，二者均存有向自己相反的方面转化的可能，要研究这种转化是非常必要的。

教为主导学为主体　教学是一种师生共同活动的过程，既有教师的教，又有学生的学，正确处理好“教”与“学”的矛盾是推动教学不断发展，完成教学任务的先决条件。我国古教育专著《学记》中曾指出“斆学半”、“教学相长”，说明古代教育家就已认识到这一对矛盾。

应怎样认识“教”与“学”的关系呢？在教育史上曾有过两种主张：传统教育理论认为，教师是教学过程的主宰，主张教师中心，片面强调教师的意志、权威，把教学看作是向学生头脑中灌注知识的活动，错误的认为教师向学生灌的越多，学生学的越好，学生时刻处于消极被动的状态，失去了主动性和独立思考精神；相反实用主义教育理论，则主张儿童中心，一切教育计划、课程、教材和措施等，都要以儿童的兴趣为依据，教师被降到助手或顾问的地位。这两种

理论，都是形而上学的把教与学，教师和学生对立起来，割裂了两者的统一和联系，违反了教学过程的客观规律。

我国是社会主义国家，教育必须为无产阶级政治服务。就我国社会主义教育理论，在教与学这对矛盾中，既强调教师在教学过程中的作用，也重视学生在学习中的地位。在教学过程中，教师掌握着教的主动权，就知识水平来说，教师处于知之较多的一方；学生则处于成长发展时期，需要教师的指引，要使学生由不知到知，由知少到知多，由不会到会，由生疏引向熟悉，必须由教师发挥主导作用。就学生的思想品德教育来说，在很大程度上也取决教师的觉悟、才能和品格，这也体现了教师的主导作用。再就教师对学生心理特点的掌握、教学规律的运用，使得教师能够对学生的发展起主导作用。总之，教师的主导作用体现在教学工作的各个方面：贯彻教育方针，执行教学计划，落实教学大纲，确定教学目的，组织教学活动，调动学生学习积极性，完成教学任务等。

就教学要实现学生知识、能力、思想品德的转化来说，学生是学习的主体，学生自身的积极性、主动性是教学成功的内因，是决定性的因素。外因必须通过内因才能起作用。学生对客观世界的认识，对书本知识的掌握，是学生大脑能动的反映过程。没有学生主动感知、思维，对教材加工消化的功夫，单凭教师的灌输，学生的认识是无法实现的。教师的主导作用和学生的主体作用（主动性、积极性）是互相联系，互相制约，相辅相成的。“教为主导，学为主体”科学地概括了“教”与“学”两者的关系。

教学手段历史沿革　教学手段的发展，经历了几个重要阶段：

（1）原始的口耳相传、示范、模仿、练习阶段　主要是用口语，也包括教学双方的形体，动作、表情等。这个时期的教学手段只局限于人本身。

（2）文字和书籍阶段（限于手工抄写）　包括使用竹简、木简和刻刀。这是教学手段史上的飞跃发展阶段。这种教学手段的采用，引起了教学模式的变革，传授书本知识的教育模式由此而生，打破了教学只传授直接经验的局面。

（3）采用印刷术和纸的阶段　印刷术和纸的发明使教师能用同一教材教更多的学生，扩大了教学规模，提高了教学效率，使班级授课成为可能。

（4）专门为教学而设计的非自然物东西的阶段，即特别设计的各种教具　文字和书籍用于教学虽然使教学发生了飞跃，但是文字的东西往往是抽象的，如果不与形象的事物结合，学生就难以理解教学内容。为了帮助学生理解教学内容，于是，教育家们便设计各种教具。例如，18世纪瑞士教育家裴斯泰洛齐发明了“算术箱”。德国教育家福禄倍尔创制了六种儿童玩具等。目前仍在使用的黑板、粉笔都是这一阶段的产物。

（5）一般电化阶段　随着电的发明，人们创造了一些利用电的教

具。如幻灯、影视录象带、实验室及语音设备等。这个阶段，教学手段走向现代化，称为“电化教学”。电化教具比用机械原理制作的教具显示出更大的优越性。

（6）电子计算机阶段　这种教学手段比电化教具更先进、更优越。电化教具只是人们器官的延长，而计算机却有人脑的“智能”：不仅能记忆、检索，还能感知、分析、综合、判断。因此，计算机在教学上的应用将引起教学的重大变化。

教学方法分类系统　各种教学方法按照一定的分类标准进行分类，而形成的具有一定逻辑联系的序列。由于分类标准的不同，也就得到了不同的分类系统。现仅就学生认识活动的不同形式为分类依据，对我国中小学常用的教学方法作一分类：

（1）以语言传递为主的教学方法　通过教师和学生口头语言活动以及学生独立阅读书面语言为主的教学方法。

①　讲授法 { 讲述法，讲解法，讲读法，讲演法。 ②谈话法。③讨论法。④读书指导法。

（2）以直接知觉为主的教学方法　指教师通过对实物或直观教具的演示、组织教学性的参观等使学生形成正确认识的方法。①演示法。②参观法。

（3）以实际训练为主的教学方法　①练习法。②实验法。③实习作业法。

（4）以陶冶为主的教学方法　即寓教学内容于各种有益的活动情境之中，能收潜移默化之效的方法。

教学方法的最优化　传授知识的方法最佳方案。巴班斯基说：“现代教学的鲜明特色乃是教学方法的丰富多采，乃是有目的选择每一个课题的主要教学方法，所选的方法要能很好地完成相应的教学和教育任务。”

教学中，一般来说，对重点、难点的知识教师要讲解，中等难度的问题可采取探讨启发法，容易简单些的内容可先由学生自学然后在课堂上讨论；要检查学生掌握知识的情况，可以采用提问或测验的方法等等。总之，教学方法的选择取决于具体教学内容和教学目的，以及学生运用各种学习方法的潜在的可能性。在选择教法时，是否有利于激发学生的学习热情也应成为必须考虑的一个因素。例如，初中代数中的“函数”概念，是一个十分重要而又比较抽象的概念，学生接受起来有一定困难。但是任何复杂、高级的概念都是以比较简单的初级概念为基础的，要使新概念被学生理解和掌握，应尽可能依靠学生已有的概念和知识。教师的讲解应揭示概念的本质，才便于学生加深理解和记忆。因此，在讲函数概念时，可以采用讲授加讨论的方法，由教师给出常量和变量的概念，然后引导学生讨论，理解这两个概念。在此基础上，教师总结函数概念，然后让学生举例解释，并逐个加一分析，进一步说明常量和变量的相对性，即相对于“某一研究过程”来说的。从而，使函数的本质“在某一变化过程中，两个变

量之间的一种对应关系”通过学生讨论和教师分析，揭示的具体、形象，易于接受，启迪思维，把较难学的知识变得较易学了。

教育评价的基本程序 教育评价是一个连续的活动过程，虽然不同类型的评价其对象各不相同，但评价的大致程序是基本相同的。其程序可分为四个环节：①确定评价对象、内容、目的原则 这一环节主要是解决评价谁，评什么，为什么评，依据什么原则进行评价等问题，它是整个评价过程的灵魂。②制定评价手册 这一环节主要是建立指标体系，确定评价的步骤。方法，为实施评价提供依据，这是评价成败的关键。③实施评价 这一环节是依据评价手册对评价对象运用科学方法做出价值判断的过程。④做出决策 这一环节是教育行政部门及评价对象根据评价结论，调整教育工作的方针、政策，提出改进工作意见的过程。这一环节是整个教育评价过程中的重要环节，是教育评价的最终目的。上述四个环节是教育评价的基本结构。在这一程序中，各个环节之间密切相连，缺一不可，既不能相互取代，又不能前后颠倒，每个环节都具有自己独特的职能。

教学方法的年级变化 每一种教学方法都有自己的教育、心理和生理的理论，都有自己的程序、结构，都有自己的特定作用等。不同年级的学生，都有其不同的知识经验和接受能力。因此，教学方法在各个年级的运用是有变化的，这种变化也是有规律的。苏联教育家巴班斯基提出的变化规律如表所示：

教学方法	运用的强度（从低年级到中高年级）
口述法	
叙　述	无本质变化
谈　话	递　减
直观法	递　增
实际操作法	递　减
归纳法	递　减
演绎法	递　增
再现法	递　减
探索法	递　增
独立工作法	递　增
教师控制下的学习活动	递　减
教学讨论	递　增
激发兴趣	递　减
激发义务感	递　增
日常检查	递　减
专题检查	递　增
教学速度	递　增
方法的多样化	递　减

教学过程最优化的标准　教学过程最优化的准则。它是一种标志，根据这一标志来比较评价几种教学过程方案，从中找出一种最好的，但这种最好的是从一定准则看的。体现在教学过程中的最优化的准则是多方面的，它可以是在形成知识，技能技巧和形成某种个性特点方面，在提高学生教养方面，取得最好的效果；也可以是为达到预期的目的，使师生化费的必要时间最少；还可以是为出现一定的结果，使师生化费的精力最少，等等。根据教学过程的特点，同时符合以下两个准则的教学过程就是最优化的教学过程：①教学过程的内容，结构和活动逻辑能保证有效地和高质量地完成对学生的知识传授、能力培养、思想教育的任务，使之符合数学教学大纲提出的要求，使每个学生的成绩都能达到及格以上。②不超出教学计划规定的讲课时间和学生完成家庭作业的时间。

教学过程最优控制原则　教学过程最优控制没有一般公式，只能提出一些最优控制原则，这些原则主要是指以下几条。

（1）目标具体原则　它包括两方面：一是课堂教学中教师要把具体目标明确地告诉学生，使学生成为认识的主体，发挥具体目标的定向作用、激励作用、评价作用。学生为实现学习目标，实行自我控制，调节学习状态，产生教学共鸣，取得最优效果。二是及时修订教学目标。由于主、客观原因，教学目标不符实际的情况是时有发生的，果断、及时地修正课堂教学具体目标适合学生实际，通过控制实现它，会大大提高师生的积极性的。

（2）方案整体原则　教学方案整体化包括有：①师生和教学内容必须作为一堂课整体考虑。②教学过程的控制系统(对目标的输入)，教学目标、教学效果的输出（包括反馈）也必须作为一个整体考虑。③教学整体化思想必须贯彻于教学的始终，贯彻教学各个环节。

为了实现教学控制的整体化，要重视教学过程中教师讲课提纲和学生学习小结的控制作用，发挥教学整体性功能，这是教学过程整体化的主要骨架。同时，要加强教学结构化和程序化思想，使教师讲的内容、步骤和方法，也应使学生了解，以指导学生学习和反作用于教师教学，并注意教学具体环节的具体性。

（3）重点突出原则　实行教学过程最优控制，必须使学生尽快接触教学中最本质、最重要的内容，并为解决这些问题，展开教学活动。做到讲有重点，练有中心，使学生有充分时间把精力集中到教学内容最本质、最重要的问题研究上，求得教学高效益。

（4）教法灵活原则　课堂教学中学生接受信息的方式有听教师讲课、自学、讨论等。实行教学过程最优控制，必须根据教师、学生、教材特点，灵活选择教学方法，把三种方式合理加以组合。如采用讲——看——练，看——讲——练，看——议——练等方式。例如讲椭圆一节课可以用讲——练法；讲双曲线一节课可以用看——议——讲的方法；抛物线

一节课可以用发现法结合练习的方法。总之，要根据具体情况，以取得最好的教学效果为原则。

（5）信息反馈原则 作为教学过程最优控制系统，及时取得反馈信息，对于取得最优效果是非常重要的。要及时取得反馈信息，就需创造条件增加学生学习信息的输出。学生学习信息输出，一般是通过学生的口头或书面表述和实际操作表现出来。教师取得反馈信息有观察学生动态、必要回答、书面和板演练习，作业批改、试卷评阅等。但务须注意，取得反馈信息一定要及时，否则不会实现教学过程的最优控制。

（6）效果评价原则 实现教学过程的最优化，必须对教学效果的输出给予评价，师生都要进行自我调节、自我控制、自我评价。效果评价的方式有典型问题分析、作业试卷讲评，自我总结等。通过效果评价，可以提高教与学的控制水平，不断改进教学，提高课堂教学质量。

教学组织形式历史变革 教学组织形式是随着社会经济、科学文化水平及人才培养目标要求的变化而发展变化的。在欧州古代学校里，主要采用个别教学形式。资本主义工商业的发展和科学技术的进步，要求扩大教育对象，丰富教学内容，从而要求改革教学组织形式。16世纪在欧州有的国家尝试班级授课制。17世纪在乌克兰兄弟会学校中兴起了班级制教学组织形式。捷克斯洛伐克教育家夸美纽斯总结了前人和自己的实践经验，对班级授课制最早从理论上给出论述。19世纪中叶，班级授课制在西方学校中是普遍采用的教学组织形式。18世纪末至19世纪初，还出现过英国的导生制（即贝尔——兰开斯特制）。导生制就是先将较高年级成绩优良的学生集中起来讲授训练，然后将这些学生担任导师去教其他学生，这种形式是班级授课制的变体，由于质量得不到保证，导生制很快就消失了。20世纪初，一些资产阶级教育家为适应学生的个别差异，对班级授课制进行改良和改革，出现过分组教学、温纳特卡制和道尔顿制等形式。20世纪70年代后，美、英等国常采取外部分组和内部分组的形式。二次世界大战期间，因战争破坏了正规教育的进行，30年代在英国出现了开放教学这种教学组织形式，至60～70年代开放教学在美国流行起来（主要在幼儿学校和初等学校）。20世纪50年初，美、英等国为了解决师资不足、提高教学质量，又提出了协作教学的组织形式。

在中国古代学校教学也是采用的个别教学的形式。1862年清政府在北京开办的京师同文馆开始采用班级教学，这是中国教育上班级授课制的开始。20世纪初，在中国极少数学校里曾试验过分组教学，至20年代有少数学校试验过道尔顿制；30年代曾在极少数学校试验过温纳特卡制。1958年曾广泛采用过现场教学这种教学辅助形式。目前，我国中小学仍广泛采用班级授课制为基本组织形式，辅之以分组教学和个别教学组织形式。在山区，牧区和边远地区，交通不便，人口居住分散稀少，有实行复式教学形式，这种形式是班级授课制的一种特殊的组织形式。

教学过程最优控制的内容　要实现教学过程的最优化，教育者要对教学过程实行最优控制，以取得教学工作的最大效果。教学过程的最优控制包括以下几个方面的内容。

（1）教学目标的控制。教学过程最优控制首要的是确定课堂教学目标，尤其是要把课堂教学目标具体化。课堂教学目标包括知识和技能、智力和能力及思想教育内容。课堂教学目标具体化是课堂教学的灵魂。它有定向作用，便于控制教学过程；它有激励作用，便于选择教学方法，调动学生学习的积极性和主动性，并做到教与学同步；它有评价作用，便于测量和评价教学效果。为了使教学目标具体化，知识和技能是根据大纲和教材确定，而智力和能力，思想教育则要根据学生的实际情况而定。控制教学目标就是包括教学目标的确定，调整修订等过程。

总之，保持教学目标的正确性，要以下一个程序的要求衡量上一个程序的质量，上一个程序要为下一个程序服务。

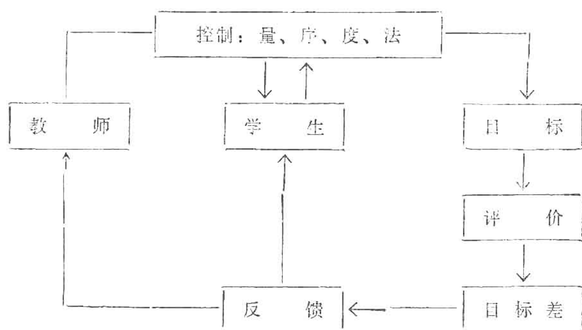
（2）教学内容的控制。教学内容主要指根据教学大纲和教材，在一堂课里要选择能促进学生发展的恰当的数量和质量，简称“量”。成功的教学都是少而精的数量和质量。控制教学内容就是根据教学目标，选择、确定教学内容，确定和调整教学内容的数量、深度和范围。这就是定量控制，它是教学过程最优控制的基础。

（3）教学结构及程序的控制。教学结构及程序简称“序”。同一个教学内容的教学程序，不同的教学结构安排，会产生不同的教学效果。成功的课堂教学都有最优的定序控制的特点。控制教学结构及程序，就是控制和调整各教学阶段之间的联系，包括联系的有无，联系的内容和方式，联系是否正确，是否同步，各阶段衔接关系如何等。这就是定序控制。它是教学过程最优控制的条件。

（4）教学速度及强度的控制。教学速度及强度简称“度”。教学速度与训练的强度要根据教材的内容及学生年令特征、程度确定，如果失控，导致教学效果不高，会直接影响教学质量的提高。控制教学速度及训练强度，就是要控制教学过程各阶段的教学活动的质量，要以学生的输出为标准，包括数量、速度、正确率、难度等方面。这就是定度控制，它是教学过程最优控制的标志。

（5）教学方法的控制。教师选择恰当的教学方法进行教学，创设出教学的最佳环境，教师情绪高，学生兴趣浓，易于产生教学共鸣。这种控制称为定法控制。简称为“法”。

另外，教学过程最优控制还有评价（比较）和反馈。图示如下：



教学过程最优化的具体方法　选择课堂教学最优方案要求教师先做好一系列有逻辑联系的工作。

（1）通过观察、谈话、研究资料、研究班上每个学生，以便确定学生的现实学习可能性及其教养水平。

（2）综合制订课堂教学、教育和发展的任务，根据学生特点，使任务具体化。

（3）使教学内容最优化，突出其中的重点。

（4）最优地选择教学方法、手段和形式。

（5）对学生要因材施教。

（6）给学生创造最优化的学习条件。

（7）对教学过程和结果做分析和自我分析，弄清出现的缺点和原因，并在教学过程的新的循环中加以消除。

培养问题意识　“学贵知疑”，“于无疑处有疑，方是进矣”。这是中国古代一些教育家的名言。这些名言都强调学生在学习过程中积极地发现疑问与提出问题的重要性。联邦德国的教学理论很重视培养学生具有问题意识，他们认为这是上好课的关键之一，是发展学生智力，调动学生学习积极性的重要途径。

培养学生具有问题意识，教学中应主要做到如下两条。

（1）教师应把培养问题意识作为教学目标，把提问本身看作是一种能力　在教学中，教师要认识到“准确地提出实质性的问题是人类智慧的结晶”。

（2）要创设问题情境　因为只有这种情境才能使学生自然地在观察、比较和思考中产生问题。

例如，判断下列四个命题中哪个是正确的？哪个是错误的？

①如果一个圆的内接多边形是等边的，那么它也是等角的。

②如果一个圆的内接多边形是等角的，那么它也是等边的。

③如果一个圆的外切多边形是等边的，那么它也是等角的。

④如果一个圆的外切多边形是等角的。那么它也是等边的。

这样设计问题和提出问题，要比直接问“什么是圆的内接正多边形？什么是圆的外切正多边形？”能更好

地创设学习情境，加深对这两个概念的理解。

培养学生创造力的方法 如何培养学生的创造力？苏联教师总结出五条方法。这五条方法是：

（1）如果学生回答问题是死记硬背的，那么，教师不要表示赞同，而要求学生拿出例证。

（2）解决学生在学习中的争论，请教师不要用直接告诉学生答案的方法。

（3）教师听学生回答问题，要注意抓住学生表述中的每个思想，不要放过任何一个为他们揭示某种新东西的机会。

（4）教师切莫忘记学生的兴趣、动机和渴望，这是教师教学的依据之一。

（5）要重视学生的“幻想，使学生养成灵活思考问题的习惯。

接受学习与发现学习 美国认知心理学家奥苏伯尔从他的有意义言语学习理论出发，分析了在言语讲授条件下的“接受学习”与“发现学习”在实质、过程及在学生智力与认知功能中的主要作用等方面的根本区别。奥苏伯尔认为，新知识是通过两种学习方式即“接受学习”和“发现学习”而获得的。由于课程里许多学科都有一定的组织体系，大多数的学习材料是以言语或文字形式呈现的，因此课堂教学的组织常以接受学习的方式为主。在接受学习中，要学习的全部内容是以现成的或多或少是以定论的形式呈现给学生的，学习任务不依靠学生本身的独立发现。学生只需要将学习材料加以内化，以便以后某个时刻这些材料能够被提取、运用。而发现学习的主要特点是要学习的主要内容不是直接向学生提供的，学生必须置身于一定的情境中，首先有所发现，然后才能内化。可用两个式子表示它们之间学习过程的差异：

接受学习：呈现教材→内化

发现学习：呈现教材→发现关系→内化

奥苏伯尔认为，接受学习更适合大量材料，特别是理论性材料的学习；发现学习更适合正常生活中解决问题的学习。但这两种类型的学习形式在某些功能上又是交叉重叠的。发现学习较之接受学习的心理过程要复杂一些，一般要在学习者达到了较高的认知成熟程度才有可能。

奥苏伯尔指出把接受学习和机械学习等同起来是错误的，同时分析了导致机械学习的原因：①对认知发展不成熟的学生灌输过分概括化和抽象化的术语。②任意地把一些毫无关系的事实罗列起来倒给学生，而不是把它们系统地组织起来或者没有用学生可理解的原理作解释。③没有把新的学习任务同过去已学过的东西联系起来。④考查学生的学习只是衡量认识零散知识的能力，或对同类事实的再现能力，或把原学习的知识原封不动地叙述出来的能力等等。他强调指出，在有意义学习条件下，接受学习是积极的。具体来说，学生进行有意义的接受学习不是简单地将新学习的内容在自己的认知结构中走一下过场，它至少要进行以下活动：①在把新知识吸收到认知结构中去的时候，需要对新旧知识之间的适应性作

出判断。②新、旧知识存在分歧或发生矛盾时，需要进行调节。③新命题需要转化为个人经验，使之与学生个人的知识经验背景、词汇、观念结构即整个认知结构趋于一致。④若找不到调节新旧知识的分歧和矛盾的基础，就需要对原有的认知结构进行再组织，以便接受或产生更有概括性、容纳性和包摄性的概念。

奥苏伯尔既没有否认和降低发现学习的作用和价值，更没有把接受学习当作解决学习问题的灵丹妙药，而是主张它们之间互相帮助，互相协调、共同为促进有意义言语学习服务。

控制 在获取、加工和使用信息的基础上，控制主体使被控客体进行合乎目的的动作。其基本特征可以从三个方面来理解。

（1）控制是控制部分（即控制主体）对被控客体的作用 这种作用表现为：使被控对象进行合乎目的的变化，并进入所需要的状态，也就是使被控对象表现出一种对运动的选择性。

（2）控制具有明确的目的性 对某一系统进行控制，就是为了保证该系统在变化着的外部条件下能实现某种既定目标，即使系统表现出某种有目的的行为。控制的这种目的在行为特征中表现为两个方面：一方面是，当系统已处于所需要的状态时，就力图保持原有状态的稳定；另一方面是，当系统不是处于所需要的状态时，则引导系统由现有状态稳定地变到一种预期的状态。在这里控制就是将被控客体引入符合这一目的状态的过程。

（3）控制是获取、加工和使用信息的过程 信息在控制过程中的作用表现在两个方面：一方面，是要根据各种有关信息才能编制出为使系统与外界环境保持平衡状态的各种指令；另一方面，系统在运行中会碰到干扰，从而使系统偏离控制目的所要求的状态，这时需要掌握干扰信息或系统状态信息，将它们转换成抵消或纠正偏差的控制指令，以保证系统目的的实现。所以控制也就具有了两个方面的内容，即确定系统状态变化的轨道（确定目标和实现目标的途径；用调节的办法使系统的运动保持在这一轨道上。

基本图形分析法 这种方法是上海市杨浦区教师进修学院徐方瞿于1979年提出的一种教学方法，主要应用于中学平面几何课的教学，把几何的基础知识和解题的分析方法结合在一起，而以分析方法的训练为主。这种教学法先在上海市眉卅中学和贵阳中学试验后，已扩大到上海市区县的12所中学，现在已影响到上海市以外省市的部分中学。

常模参考性考试 在较大群体范围内取样的基础上，以常模为参照标准来解释考生分数的一种考试（简称NRT）。常模指的是一群类型相同的人（每个考生均是其中的一员），在考试中所获成绩的平均水平（表现为全体考生的平均分与标准差）。这种考试采用了一种相互比较的手段，将一个考生的成绩与他人的成绩进行比较，从而确定其在这一群体中所处的位置或等级。通常学校中的学业成绩考试就属于这类考试。这种考试的主要功能是在学生中分类排队，用于

选拔或在校内编班、编组。由于常模参考性考试着重在个人间的比较，所以希望全体的得分从高到低，范围要广。得分的范围越广，即变异性越大，则越能显示出个别差异。它要求予期的成绩应成正态分布。

逻辑联系性 数学中的诸概念或者是在经验或实践的基础上加以简单化，理想化产生的，或者是在纯逻辑理论发展过程中产生的。其中多数概念都是在原始概念（或低级概念）的基础上形成的，并给以逻辑定义，以语言形式使之固定下来。因此，没有一个学科象数学中诸概念那样具有如此精确的内涵，具有如此丰富、严谨的联系。在某一个数学分支中，诸概念形成一个结构严谨的概念体系，构成这一分支的骨架，将概念之间的逻辑联系清晰地表达出来。

商议教学法 美国教育界正在采用的一种语文教学法。它也适用于数学某些内容的教学。这种教学法是将教师讲课的时间限制在五分之一以内，而把其余的时间留给学生议论。一班学生按六人分成若干个小组，对学习内容展开自由讨论，教师或与学生环坐一起，或在学生背后，倾听学生的议论，从学生不受拘束的讨论中，可以发现学生在智力发展上，在掌握已有知识和接受能力上的差异，以便因材施教。同时，由于全班学生在认识上的已知总和，有可能超过教师，所以运用这种教法有助于学生互学，取长补短，也有利于教学相长。从长远来看，这种教法对培养学生独立思考，以及分析问题和解决问题的能力也大为有益。例如立体几何的概念教学，数学定理证明的教学以及总结复习课的教学都可借用这种教法进行教学。

情感性教学 包括下列几层涵义:

（1）教师对所从事的教育事业和施教的儿童充满热爱的情感。

（2）教师教学中不是冷漠地“客观主义”地向学生传播知识就了事，而是要满腔热情地用自身的爱憎去影响和感染学生。

（3）教学中，施教者要善于激发学生的感情，使学生不只是从理智上，而且从道德、美感上受到熏陶。

情感性教学的价值在于：①情感可促进记忆的持久，促进学习中思维和想象的积极参与。因此，情感性教学对认知有促进作用。②对促进情感知觉和理智知觉的和谐的作用。而当人们的无意知觉与有意知觉趋于和谐时，学习的效果最佳，这时注意力最集中，思维想象处于最活跃状态，精神系统的活动能达到最顺畅的境界。③对学习热情的激励作用。④对学生的意志行为的影响作用。⑤师生之间互相感染、交融的作用。

综合课 在一节课内完成两项以上教学任务的课叫做综合课。这种课型特点任务不单一，有时在用一定的时间复习旧知识的基础上讲解新知识；有时是在讲解新知识之后，留出足够练习时间练习；有时是边讲边练，讲练结合。综合课在中学数学课中采用得最普遍，这是由中学数学教材内容及学生年龄特征所决定的。综合课的一般结构是：①复习提问。目的是为讲解新教材作准备。②讲授新教材（教法可根据学生及教材具体情况而定）。

③课堂练习，巩固所学知识，初步培养基本技能。④布置课外作业。

综合评价法 即对评价内容的整体进行评价。它不是把评价内容分解为若干个项目，而是凭直观、印象对整体进行评价。综合评价法从表面上看，似乎没有分解评价内容，实际上，分析评价的过程是在头脑中进行。

提高记忆力的科学方法 要提高记忆力，应做到五个“必须”：必须有兴趣，兴趣是记忆的原动力；必须有识记的明确目标；必须树立“一定要记住”的信念；必须注意力高度集中，乃至达到忘我境地；必须下苦功夫，爱因斯坦说：成功＝艰苦劳动＋正确方法＋少说空话。强化记忆的方法有“六要”：要在理解的基础上记忆；要重视复习工作，复习包括整理线索、找出重点、难点、规律、关键，内部知识以及同其它知识的联系，学会应用和创造性应用；要注意全部学习方法、部分学习方法以及两者结合的方法；要正确采用集中学习和分散学习法；要重视笔记；要做“练习”，用做练习题的形式回忆和应用学过的知识，完成推理和运算等过程，强化记忆，发现遗忘，及时补课。

掌握学习 这是一种学习方式。这种学习方式是学习者在最佳教学和足够时间条件下，掌握所学材料。倡导掌握学习的著名代表是美国心理学家B·S·布卢姆。掌握学习的基本思想是：只要有适合的教学条件、足够的时间，一个人能学会的东西，几乎所有的人都能学会。布卢姆提出有助于掌握学习的条件是：①学习者要有清醒的明确的教学目标；②学习者必须具备该项学习的知识，技能；③学习者必须具有掌握该项学习任务的意愿；④教师对要学生学习的材料提供必要的线索，对学生的学习成就给以强化、反馈和校正；⑤鼓励学生互教互学，适当发挥“小先生”的作用。

掌握学习的一般步骤是：①确定教学内容和要求；②实施教学计划；③测定学生是否掌握了教学内容；④根据学生存在问题给予再学习的机会；⑤有针对性的再讲述有关内容。

掌握学习的指导思想，是否定“学生成绩不及格是学校教学不可避免的现象”的论调，力图证明每个学生智力水平都可以达到很高水平，都能完成学习任务。其具体做法是：教师需将教学内容分为以一、二周为周期的教学单元。每个单元结束后对学生进行一次“诊断测验”，通过测验的学生自己做补充练习。没有通过测验的学生，教师再针对他们没有掌握的问题进行补充讲解。第二次重新学习后，再进行针对性测验，直到“掌握”为止。然后才开始第二单元的教学。

布卢姆研究结果证明：若能正确运用此法，可使80%的学生掌握80%的教学内容。由此可见，掌握学习对解决教学质量低劣问题有较大作用。目前，在美国相当部分地区的中小学教学中被广用此法、收到了较好的效果。但是，掌握学习对学生学习的独立性、灵活性和创新精神的培养尚看不出助益之处。

最近发展区 苏联心理学家维果茨基在研究学龄期的教学与智力发展问题

时提出的概念。维果茨基认为在评价儿童发展的水平时，至少应当确定儿童的两种发展水平。第一种，称之为儿童的现有发现水平。指的是由一定的已经完成的儿童的发展系统的结果而形成的儿童心理机能的发展水平。从实质上说，在借助于测验确定儿童的智龄时，几乎经常接触到的就是这样的发展水平。但是，这种现有发展水平还不能十分完全地判定儿童发展直到今天为止的状态。维果茨基举了一个例子：研究了两名儿童，并且判定他们两人的智龄都是七岁。这就是说这两个孩子能解答相当于七岁儿童的题目。但是当我们试图把这些孩子在解答测验上往前再推进一下，那么他们之间便出现很大的差别，其中一个儿童借助于启发性的问题、例题、示范，便容易地把距离他的发展水平两年的测验题解答出来，而另一个孩子却只能解答出超过他半岁的测验题。这两个儿童的智力发展是相同的吗？从现有发展水平来说是相同，但是从最近的发展可能性来看，他们却有很大的差别。维果茨基把儿童“在有指导的情况下借成人的帮助所达到的解决问题的水平与在独立活动中所达到的解决问题的水平之间的差异，称为儿童的最近发展区。最近发展区反映着那些现在仍处于形成状态，刚刚在成熟，刚刚在发展的过程。也可以说现有发展水平反映着儿童发展的昨天，而最近发展区反映着儿童发展的明天。那种在成人帮助下，在集体活动中儿童今天所作的事，明天他就会独立地去完成。

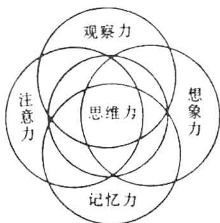
“最近发展区”的概念，给处理教学与发展的关系带来了新的意义。“教学与其说是依靠已经成熟的机能，不如说是依靠那些正在成熟中的机能，才能推动发展前进。教学创造最近发展区，然后最近发展区转化到现有发展水平的范围之中”。也就是教学应引起与推动儿童一系列内部的发展过程，这些内部的发展过程现在对儿童来说只有在与周围人的相互关系以及同伴们的共同活动的范围内才是可能的，但是由于经过了内部发展进程，后来即成为儿童自身的内部财富。维果茨基这样总结了他的关于教学与发展问题的思想：只有当教学走在发展前面的时候，这才是好的教学。“教育学不应当以儿童发展的昨天，而应当以儿童发展的明天作为方向”。

最佳选择题 亦称唯一型选择题，是最常见的一类选择题。这种试题的特点是，在给定的4—5个备选答案中，有且仅有一个备选答案是正确的。例如，“函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象（ ）。（A）关于y轴对称；（B）关于原点对称；（C）关于直线$x+y=0$对称；（D）关于直线$x-y=0$对称。”

量表 就是用数量来表示一些对象和事件的某些特征。如，运动员佩戴的号码；用数字1与2标志性别男与女；用1和0表示电流的通路和断开等。描述数据资料的量表，主要有以下几种：称名量表，顺序量表，等距量表（又称区间量表），等比量表（又称比率量表）。以上四种量表，如按传统的大致分法，前二者可统称

为品质量表，后二者可归纳为数量量表。

智力 通常称智慧。学习、记忆、思维、认识客观事物和解决实际问题的能力。智力由观察力、想象力、思维力、记忆力、注意力五个基本因素组成。其结构模式如下：在这个结构模式中，五种智力因素相互交织、相互制约。思维力是智力活动的核心，所以把它放在中间，其他几个因素都是围绕这个核心而又相互勾连在一起。



智力技能 也叫智力活动技能。通过练习而形成的智力活动方式。所谓智力活动，就是指“在头脑中进行的”活动，也可以说成是以词的形式在“心里”完成的动作。就活动的对象说，它同实践活动是有区别的。实践活动的对象是具有一定的物质形式的客体，智力活动的对象则是这种客体在头脑中的映象。它是一种观念的活动。就活动的进行来说，它既不象实践活动那样，可以看到在头脑外部实现的动作，也不象言语活动那样，可以觉察到对映象进行加工改造的思考过程。它具有内潜性。就活动的结构说，它不象实践活动那样，每个操作都必须实际作出，既不能高度省略，也不能高度简缩，而它是可以高度省略，高度简缩的，甚至往往觉察不到活动的过程。智力活动的这些特点给智力技能的培养带来了困难。因而也引起了许多心理学家的重视和研究。其中苏联心理学家加里培林的理论有一定的影响。

加里培林认为，智力活动是一个从外部的物质活动向内部的心理活动的转化过程，即内化的过程，并且认为，智力活动是分阶段形成的，一般来说要经历下列五个阶段：①活动的定向阶段，即预先熟悉任务，知道做什么和怎么做，从而在头脑中建立起活动的定向映象。②物质活动和物质化活动阶段，即借助实物、模象或图表等为支柱而进行智力活动的阶段。③出声的外部言语活动阶段，这是指不直接依赖实物而借助出声言语进行心智活动的阶段。④不出声的外部言语阶段，即以词的声音表象、动觉表象为支柱而进行心智活动的阶段。⑤内部言语活动阶段。即心智活动简化、自动化，似乎不需要意识的参予而进行活动的阶段。

智力活动按阶段形成的理论，对智力技能的培养有一定的参考价值。

智力发展阶段 发展本是连续不断地进行的。在发展过程中存在着无论从质上量上都显示出相对稳定的时期和急剧变化的时期。所谓发展阶段，是以发展变化比较显著的时期大致地区分发展过程的。

皮亚杰是坚决主张阶段论的心理学家。他经过长期研究儿童个体思维的发生和发展，将婴儿期至青年期的智力发展阶段区分为：①感觉运动阶

段（出生—2岁）：从汲奶开始，实际上是身体的一部分或整个身体运动的感觉运动的图式形成的时期。②前运算阶段（2—7岁）：感觉运动内化了，表象功能开始出现。这时，儿童可以凭藉表象，模仿成人作扮角色游戏，进行思考想象等。③具体运算阶段（7—12岁）：可以在具体情境中进行逻辑运算。④形式运算阶段（12—16岁）：可以进行形式的命题运算的阶段。

布鲁纳与皮亚杰在智慧发展过程上所采用的术语尽管不同，但这种描述的实质却有惊人的相似。布鲁纳分为三个主要阶段。第一阶段叫表演式再现表象阶段。四、五岁前的幼儿，主要是依靠动作去对付世界。儿童此时能从“做中学”，但注意很不稳定，难以进行反省思考。教师想向这个阶段的儿童灌输概念，即使采用高度直观的方式，仍有较大限制。第二阶段叫肖象式再现表象阶段，儿童开始能在头脑中借助经验的意象来进行尝试，解决问题。这种“内化的”的意象有使概念符号化的作用，不过还不能充分界说概念。这个阶段通常在五岁至七岁时出现。到了十三、四岁左右，儿童就进入了发展的第三个阶段，即象征式再现表象阶段。此时，儿童不再为经验过的或在面前的事物所束缚了。他开始能够提出命题，把概念组成有层次的结构；他能够想到各种可能的变化和可供选择的途径，甚至会推演后来通过观察或实验得到证明的潜在关系。所以，进入这个阶段的儿童有能力对某些具体观念加以形式的或公理化的表达。

我国心理学界多数人认为，思维的发展大致经历四个阶段：①动作思维阶段。动作思维是凭借直接感知，并在实际操作的过程中进行的。它的结构比较简单，动作既是思维的起点，也是思维的结果。大约三岁以前的儿童以动作思维为主。②形象思维阶段。形象思维是凭借事物的知觉形象和表象进行的。思维形式为表象联想和想象。也就是说，儿童可以摆脱具体的事物或直接动作，而凭借具体形象的联想进行思考。儿童大约3岁左右开始，逐步由动作思维向具体形象思维过渡。③形式思维阶段。形式思维是通过分析、综合、比较、抽象和概括获得概念，形成判断，进行合乎逻辑的推理的思维活动。小学儿童的思维是以具体形象思维为主要形式逐步向形式思维为主要形式过渡。在这个过渡阶段中，形式思维在很大程度上，仍然直接与感性经验相联系，仍然具有很大成分的具体形象性。④辩证思维阶段。辩证思维是凭借辩证概念，并按照辩证逻辑的规律而进行的思维。从整体、联系、转化的角度去思考问题；全面地、动态地去考虑问题；能越出日常经验的狭隘界限去把握客观现实的本质和内在的规律性的联系。初中学生的思维以形式思维为主向辩证思维过渡，高中学生的思维则是辩证思维的形成阶段。

智力活动按阶段形成的理论　该理论的代表人物是苏联的加里培林。理论的基本观点是：“智力活动是外部的、物质活动的反映”，“是外部物质活动向反映方面——向知觉、表象和概念方面转化的结果”。这种转化过程

是通过一系列的阶段来实现的。在每个阶段上都产生新的反映和活动的再现以及它的系统的改造。智力活动的过程，需经五个基本阶段。

（1）活动的定向阶段　也就是了解、熟悉活动，使儿童知道做什么和怎么做，从而在头脑中建立起活动的定向映象。

（2）物质或物质化活动阶段　这个阶段也叫做“活动以物质或物质化形式形成的阶段。这两种活动，都是用手来完成的，都是外现的活动。所不同的主要是动作的客体。在物质的动形式中，动作的客体是实际事物，是对象本身，在物质化的活动形式中，动作的客体不是对象本身，而是它的代替物，如模型、蓝图、图解、图样、标本，以至记录等。这些东西模拟出实物的某些本质的特性和关系，使学生能够进行外部活动，把它们加以对比、测量、移动和改变等等。加里培林认为：“任何新的智力活动在最初都应当不是这活动本身，而是作为外部的一物质或物质化的活动而形成。”

（3）出声的外部言语活动阶段　出声的外部言语活动的特点是活动离开了它的物质或物质化的客体，以出声的外部言语形式来完成实在的活动。这一阶段的活动，是由外部的物质活动向智力活动转化的开始，是智力活动形成的一个重要阶段。

（4）不出声的外部言语阶段　这一阶段同前一阶段不同之点，在于活动的完成是以不出声的外部言语形式来进行的，但并不仅仅是“言语减去声音”。要求对言语机制进行很大的改造。不出声的外部言语形式的活动的形成，是活动向智力水平转化的开始。

（5）内部言语活动阶段　是活动达到智力水平的最后阶段，也就是名符其实的智力活动的形成阶段。加里培林认为，由外部言语开始转化为内部言语时，是由言语表述本身的简化开始的。如果在指向别人的言语中，保存完整的言语表述是完全必要的话，那么，在这个已经没有这种指向的阶段上，言语表述本身就简化了。在意识中所剩下的是这种言语表述的很少的不固定的片断。同时，加里培林认为：“真正的内部言语，其特征并不是词的成分的片断性，而是这样一种情况，它的进行是自动化的而且基本上处于自我观察的界线以外”。因此，真正的形成了的智力活动过程是自己觉察不到的。

程序教学　使用程序教材的一种自动的教学方式。又称机器教学或自动教学。程序教学源于1924年，这年美国教育心理学家S·L·普莱西设计出第一台教学机器，用来实地教学。1954年，美国实验心理学家B·F·斯金纳以普莱西的练习机器为基础，根据从动物实验中引出的操作条件反射和积极强化的理论，设计了教学机器和程序教学。60年代，中国、苏联、日本、英国及一些欧洲国家，也先后对程序教学进行实验研究。

进行程序教学的一般步骤是：教育者根据对学习过程的设想，将教材分解为许多小项目，按其逻辑顺序排列起来，编成程序教材，其中每一个项目都提出问题，要求学生做出解答

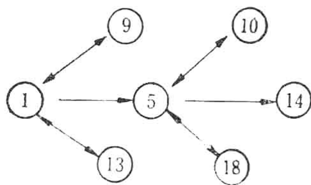
反应或完成选择反应。然后教师给出正确答案，让学生自己核对、纠正，得到正确答案，再进入下一项目的学习。如果答错了，学生可以反复，再思考，再学习，重新寻求正确的答案，不强求与其他同学进度相同。

学习程序的编制原则是：①小步子原则；②积极反映原则；③及时反馈原则；④自定步调原则；⑤低错误率原则。

程序教学的编制形式分直线式和分支式两种。

（1）直线式 每次呈现一个问题，要求学生做一个解答，即一题一答。做对了就进行下一步的学习，答错了就进行就由机器呈现正确答案，然后进行下一步学习。其模式为①⟶②⟶③⟶④⟶。

（2）分支式 其模式为



学生完成①单元的学习后，进行检查（多重选择反应），如果答对了，就进入单元⑤的学习；如果答错了，就让学生学习补充材料⑨或⑬。学完后，再回到①重选答案，直到选对了答案以后才能进入新单元⑤的学习。

程序教学的优点是：①学生学习目的明确，循序渐进，有利于提高学生学习的积极性；②自定学习步调，利于因材施教；③学习效果及时反馈，能增强学习动力；④学生手脑并用，有利于培养学生的自学能力；⑤有关键刺激和问答引导，可以减少错误，提高学习效率。

程序教学的缺点是：①从动物实验中引出的程序学习理论，对于人类学习中的理解、概括、迁移等，不能完全适应；②程序教学是机械化的，难以培养学生的灵活性、综合性和创造性；③编制程序及教材的劳动量过大。

程序教学机 程序教材，能够显示问题，分析反应，指出正误、并提示下一步如何学习的机器。程序教学机是20世纪50年代美国心理学家B•F•斯金纳所创制。程序教学机上有一斜面，上面有两个窗口，一大一小，大窗口呈现教材和问题，小窗口呈现问题的正确答案。两个窗口下是学生写答案处，上面有一块能移动的玻璃，当学生写出答案后，即刻盖住，小窗口就会呈现出正确答案。教学机器的构造，通常包括输入、输出、储存和控制四部分。其主要功能：储存和呈现教材，并向学生提出问题；接受学生的反应和答案，并即刻指出反应和答案的正误；根据学生的反应和答案，调整与改变教学程序。如果学生一直答对，成绩优良时，便可跳越过一些同类型的题目。如果学生答错时，它就反复呈现类似的题目，直至答对，再呈现新的教学内容。控制学生的学习行为，如在显示一个问题时，学生看不见前后问题或陈述，在学生未作出答案以前，不显示答案；进行计分、计时、报出成绩。应用程序教学机教学，可将教师从批改作业、指导

练习繁重的劳动中解脱出来，从事于教学研究。又因为程序教学机能适应学生的个别差异，所以它适于自学，优生可以加快学习进度，差生亦可以调慢学习进度。

等级相关 相关的计算方法之一，是按照数据在数列中所处的等级顺序来计算相关系数的一种方法。计算所得结果叫做等级相关系数，用符号r_ρ表示。等级相关系数的计算公式为

$$r_\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}。$$

式中，D为二列成对等级的差数，N为成对等级的个数。当数据较少（$N<30$），又不明确其次数分布是否为正态，或当数据以等级形式出现，或者只需计算出相关系数的近似值时，便可采用等级相关。如，计算下表中15名学生数学成绩与物理成绩之间的等级相关。具体计算步骤为：①按x变量大小排成等级顺序，称之为R_1。若在变量x中有相同的数值时，可将这些数值所占的等级相加，除以相同的数值的个数，作为相同数值的等级。②排列第二列变量y的数值等级R_2。相同数值的等级仍按上述方法计算。③对于每个人的成对等级，求出等级差D，用不着考虑D的正负符号。④将D平方，得D^2。⑤求ΣD^2。⑥按公式计算r_ρ。

学号	x	y	R_1	R_2	D	D^2
1	31	32	7	9	2	4
2	23	8	11.5	14	2.5	6.25
3	40	69	4	1	3	9
4	19	21	14	12	2	4
5	60	66	1	3	2	4
6	15	41	15	6.5	8.5	72.25
7	46	57	3	4.5	1.5	2.25
8	26	7	10	15	5	25
9	32	57	6	4.5	1.5	2.25
10	30	37	8	8	0	0
11	58	68	2	2	0	0
12	28	27	9	11	2	4
13	22	41	13	6.5	6.5	42.25
14	23	20	11.5	13	1.5	2.25
15	33	30	5	10	5	25
						$\Sigma D^2 = 202.5$

$$r_\rho = 1 - \frac{6\times 202.5}{15\times 224} = +0.64。$$

等级排列 把整列后的数据按数值大小，依次确定等级。它是数据资料整理的方法之一。如10名学生的数学成绩经整列后，可进行等级排列：

分 数 (x)	等 级 (R)
89	1
86	2
84	3
73	4
72	5
71	6.5
71	6.5
70	8
66	9
57	10

进行等级排列时，若有相同的分数，则将这些分数所应占居的等级相加，再除以相同分数的个数，以所得商数作为相同分数的等级。如10个数学分数中，有两个71分，按整列的结果，它们所占的等级应分别为6和7，这时$\frac{6+7}{2}=6.5$应作为两个相同分数（71）的等级。

等距变量 具有相等单位，但无绝对零点的变量。如，华氏或摄氏温度计测出的气温度数就是等距变量。等距变量因缺乏绝对零点，所以不能做倍数比较。如上午8点钟的气温是3°C，中午12点钟的气温是6°C，却不能说中午的气温是上午气温的2倍。学校中各学科的考试分数也属于等距变量。学生考试得零分，并非他对这门学科一无所知。考试分数是不能做倍数比较和相加运算的。一个考试成绩为80分的学生，其知识水平并不是考试成绩为40分的学生的知识水平的2倍，更不等于两个考试成绩都是40分的学生的知识水平之和。

等值性信度 用两个等值的试卷，在最短时间内对同一组学生进行测验，两次测验成绩的相关，计算所得的相关系数，叫做等值性信度系数。求等值性信度系数的方法是：①在编制测验时，同时编制几份等值的测验试卷。所谓等值的测验试卷，即测验的题型、题数、测验的内容、难度、区分度必须相同，但又不能有相同的试题。②施行平行测验。即先使一组学生接受其中的一个试卷（A）的测验，然后在最短时间内，再使这些学生接受其中的另一个等值试卷（B）的测验。③求得两次测验分数之间的相关，即等值性信度系数。计算等值性信度系数的公式为

$$r_{AB}=\frac{\sum xy}{NS_xS_y}。$$

式中，r_{AB}为等值性信度系数，x为测验A的成绩的离均差（$X-\overline{X}$），y为测验B的成绩的离均差($Y-\overline{Y}$)，N为参加测验的人数，S_x为测验A成绩的标准差，S_y为测验B成绩的标准差。

集中量数 用以描述在数据分布中，大量数据的集中趋势的量数。如，某班数学考试成绩的分布，60分以下的极少，60—70分的较少，70—80分的最多，80—90分的又较少，90分以上

的则更少。这种数据向某点集中的趋向，叫做集中趋势。代表集中趋势的量数，叫做集中量数。集中量数是一组数据的代表数值，可以用来说明一组数据的部分全貌或它的典型情况。集中量数可以用来进行组间比较，以判明一组数据与另一组数据的数值差别。描述集中趋势最常用的集中量数有算术平均数，中数，众数等。

循序渐进原则　教学要按照科学知识的逻辑系统和学生认识活动进行，使学生系统地逐步地掌握基础知识和基本技能，促进智力和能力的发展。

循序渐进原则提出的理论根据是：①科学知识的严密的逻辑系统和学科教学内容相应科学的体系，是使教学内容具有一定的逻辑系统性。②学生认识活动的规律。如从具体到抽象，从现象到本质，从简单到复杂等。③古今中外宝贵的教学与学习经验的总结与概括。

贯彻循序渐进原则，应该做到以下几点：①教师要严格按照教学大纲和教材进行教学。这是因为：教学大纲和教材是根据国家教育目的，培养目标和各学科知识体系的内在规律编写的。教师要全面熟悉本学科的教材，掌握教材的逻辑结构，保证在教学中使本学科的教学内容的纵横联系。教师要熟悉其它学科的教学大纲和教材，保证各学科间的联系，渗透和统一。如有些概念、原理和技能往往在一些相近的学科中以不同角度和形式反复出现，加强各科教材间的这些联系，可使一些基本概念在相互印证和相互补充过程中得到加深和巩固。这是符合现代化科学的整体化发展趋势的。②教师传授基础知识时，要采取与学生相应的年令阶段、能够接受的形式进行教学。为此：教师教学尽可能的根据学生的认知特点、水平，将学科知识结构安排成某一阶段，采取学生能够普遍理解的形式进行教学，确保教学内容的深浅度适合于学生的认识发展水平，提高教学效益。教师要指导学生有计划，有系统地巩固知识、技能和技巧，适量布置作业，经常检查和评定学生成绩，将学生所学的知识系统化、综合化，不断纠正和补充学生认识中的缺陷和不足。教师要培养学生循序渐进的，坚持不懈的学习习惯。③教学活动要遵循着由近及远，由浅入深，由已知到未知，由易到难的顺序进行。因为学生的认识活动是由点滴积累，逐步提高，由量变到质变的过程，所以只有按照这样的规律组织教学，才能使学生学得牢固扎实。教学中绝不能采取搞突击、搞运动的方法进行，否则，会造成单纯的追求教学进度和分数指标，损伤学生的认知发展。④教师教学要注意系统性，分散重点、难点、关键。抓住主要矛盾，这样教法就会条理清楚，层次分明，重点突出。学生学起来就会以纲带目，纲目清晰，举一反三，触类旁通，达到掌握知识，发展智力，培养能力的理想效果。

道尔顿制　一种教学组织形式，也是一种教学方法。它是由美国H·H·帕克赫斯特于1920年在马萨诸塞州道尔顿中学创立的。20世纪20年代以后曾在一些国家试行，中国也在一些地方进行过实验。实行道尔顿制的措施

是：第一，设置各种作业室作为替代教室。在作业室里按学科性质陈列参考书和实验仪器等教学和学习用具，并设教师一至二人指导学生学习。第二，把教学内容制成各科的分月作业大纲，各科教师与学生订立“学习工约”。第三，学生按照自己的兴趣、能力自由支配时间，在各科作业室自学，并可与教师和学生研究讨论。第四，学生的学习成绩和进度分别由教师和学生记入进行表内。学生完成工约后，经教师考试合格，继续学习下月的工约。进度快的学生可以提早更换工约，因而可以缩短毕业年限。

道尔顿制强调按自己的兴趣、能力和需要主动的学习，因而在适应学生个别差异，培养学生独立工作能力方面有一定作用。但是，掌握不好，安排不当，容易形成教学上的放任自流。

温纳特卡制　一种教学组织形式。它是由美国教育家C·W·沃什伯恩（旧译华虚朋）于1919年在芝加哥温纳特卡镇公立学校实验的教学组织形式，是适应学生个性的形式之一。20世纪30年代在一些国家中很盛行。在中国一些地方也有过实验。

温纳特卡制主张把课程分为两部分。一部分是使学生获得将来生活必需的最低限度的读、写、算和史地等方面的知识技能。这部分是由教师指定教材，按学科进行个别教学，以学生自学为主。另一部分是发展学生社会意识活动。目的是培养学生集体生活习惯和互相合作精神，发展创造能力。这一部分是在教师指导下，通过艺术、运动、集会以及商店、编辑、出版等团体活动进行。采用这种教学组织形式的步骤是：第一，确定学习目的；第二，编写供学生自学习和校正的教材和学习指导书；第三，准备检查学生学习的诊断测验；第四，使用诊断测验检查并记录学生学习成绩和进度。

温纳特卡制虽有重视学生自己学习、校正的积极因素，但又易带给学生偏科的学习倾向。同时由于学习进度不一，学生深入学习某一学科有一定的难度。

填空题　亦称完成题。提出一个不完整的陈述，要求考生自己把缺少的部分填写完整的试题。这类试题通常是以一句话、一段文章、一个公式、算式或一个图形等，略去其中一些词语或数字符号，留出一处或几处空白，让考生把空白填补起来，达到文意完整。填空题一般属于再生式的客观性试题，偏重于知识记忆的考查。但是有时也可以用以考查推理、判断、计算等较高层次的能力。拟定这类试题，必须注意以下几点：①答案必须清楚明了；②答案可用一个词语、符号、数字、公式来表示；③题目措词简单明白，不致引起不同的理解；④题目的空白不可太多，否则会失去意义上的连贯性，使考生无法理解题意。

填空选择题　选择题的一种题型。这种试题的题干是一个不完整的陈述句，句中留有位置不定的多个空白处，在每个空白处要求考生只填一个正确答案的代号。备选答案（选择支）有的设在题后，有的设在每个空白处。但当备选答案设在题后时，一

个备选答案可以被重复选用。例如，“一次函数 $y=kx+b$ 的图象在一、二、四象限，则____（(A) $k>0$；(B) $k<0$；(C) $k=0$），____（(A) $b>0$；(B) $b<0$；(C) $b=0$），这时，函数是一个____（(A) 增函数；(B) 减函数；(C) 增函数还是减函数视自变量 x 的取值区间而定），函数的奇偶性是____（(A) 奇函数；(B) 偶函数；(C) 非奇非偶函数）。”

暗示教学 又译为启示法或启发式教学法。暗示教学法是指运用暗示手段，激发学生的心理活力，提高学习效果的一种方法。它是由保加利亚医学博士乔治·洛扎诺夫首创的。1955年洛扎诺夫用暗示疗法使一个记忆衰退的病人恢复并增长了记忆力。经过九年实验，洛扎诺夫建立了暗示教学理论和暗示教学法。暗示教学在苏联、美国、加拿大、日本等国都进行过实验，取得较好的效果。近年来，在中国一些地区也进行实验研究。

暗示教学是研究现代心理学和生理学理论的基础上提出来的。暗示教学的理论认为，人类具有巨大的生理潜力和心理潜力，人有可暗示性，在一定条件下，人接受暗示后，可以提高积极性和学习效率。暗示教学理论特别强调无意识心理活动的意义。在人的大脑中，始终交织着有意识和无意识的两种活动，一切有意识的活动都是以无意识活动为基础的，只有当两种活动处于最和谐状态时，才是人的活动最顺利最有效时刻。如果能有效地使用暗示，就能使两种心理活动达到高度协调，从而使人的生理，心理潜力得到最大限度的发挥。应需注意，感情也是无意识心理活动的重要组成部分，它对于有意识的心理活动有着直接影响，理智和情感，有意识心理活动和无意识的心理活动同环境以及出现在环境中不断变化的情境息息相关，并受其制约。因此，教学中创设一定的情境，是发挥学生心理潜力的必要条件。

暗示教学的原则是：①愉快而不紧张。使学生应该感受到学习是满足求知欲的一种乐趣，愉快、轻松，其乐无穷，而不应使学生感到枯燥乏味、紧张、恐惧等情绪。②有意识和无意识统一。由于情感调节理智，无意识调节有意识，所以随着知识的增加，教学过程必须在充分利用有意认知能力的同时，加强调动无意认知能力，达到有意识和无意识统一。③暗示相互作用。暗示有多种手段，如利用权威、暗示可接受性的动员，两重交流水平，利用语调、节奏等，这些暗示手段的相互作用，关键是建立师生之间的相互信任、相互尊敬的关系。

暗示教学的具体做法是：①上课时常常伴随着音乐声，这是暗示教学的主要特点。每一堂课教师介绍完全文后，即开始音乐会。音乐会有积极的和消极的两种。积极的音乐会上，学生的注意力集中教师的讲解；消极的音乐会上，学生随意听教师讲解，轻松愉快的欣尝音乐，陶醉于美的旋律中，学生在无意中学到了应学的知识，记得牢，效率高。②运用权威。这是使学生乐于接受的力量，这是暗示可接受性的主要因素，也是一种暗

示的手段。实验证明，权威有增加谈话者的暗示力和听话者的记忆力的作用。③正确地设置教学的外部环境，使学生处于创造力的“假消极状态”以诱发学生的潜在能力。④运用电影、电视、戏剧、舞蹈等综合艺术形式，激发学生的学习潜力。即把教学内容的基本原理和教学手段结合起来，使学生产生丰富的联想和想象，从而提高学习效率。

暗示教学把学生作为学习的主体，有利于提高学习效率和智力、能力的发展，这是积极的一面。但是，暗示教学实施起来需要有较好的教学条件，实践难度较大。考虑到中国民族文化传统，习惯特点，运用暗示教学尚需做大量的工作才行。

简答题　要求直接写出结果的一类试题。简答题有两种陈述方式：一是直接疑问句；一是不完全陈述句。考生在试题末尾所附空白处填写答案。简答题不允许学生自由回答，不要求写出解题过程，答案只能是一个确定的数、式子、词语或词组。简答题用以测量学生对重要知识的记忆和简单应用的能力。但这类试题难于测量分析、综合和评价等高层次的目标，评分时难以排除主观因素影响，做到客观评卷。简答题的编写原则是：①一个简答题只能有一个答案，并且答案必须具体简短。②应先以直接疑问句编制试题，只有在改为不完全陈述句后，可使题意更加明确时，才可使用不完全陈述句式简答题。③简答题不宜测量零碎的知识，要尽量用它测量知识中的基本概念、公式、法则、定理等。答案空格长短要一致，否则会给考生提供正确答案的线索。不可直接从教科书或其它参考书上原文抄写试题。

微格教学　是一种小型的教学练习。香港一些教育学院在师范训练方面的一门的课程。这种教学是由学生讲5—10分钟的课，每次讲课，都练习一种教学技巧或者一种教学技巧中的一、二种方法。讲课时，用闭路电视录像，尔后放录像，让学生在教师指导下，反复详细观察自己的教学，再由其他同学和指导教师一起分析讲课情况。

新授课　以传授新知识为主要教学任务的课称为新授课。其目的是使学生学习新知识，掌握新方法。它是中学数学课中最常见的一种课型。新授课的一般结构如下：①复习提问。②讲解新课（其方法可根据学生及教材的具体情况而定。③巩固小结。④布置课外作业。这四步以“讲解新课”为核心。教学时间主要用于这个环节，其它环节都应围绕着讲授新课进行。“复习提问”可根据教材内容而定，提问时其内容必须与新教材有密切联系，有时也不一定提问，开门见山的讲解新课，其它环节只须用较少时间即可。当然不同年级，在时间安排上要有所不同，一般地说，高年级讲课时间可稍长些，低年级讲课时间可短一些，适当增加小结时间，以利巩固新知识。

数学　数学是研究客观世界中的数量关系和空间形式的科学。它的特点是：高度的精确性、高度的抽象性和应用的广泛性。数学的内容大体分为两类，一类是纯粹数学，即暂时撇开

具体内容而以纯粹形式研究事物的量的关系和空间形式。另一类是应用数学，即着眼于说明自然现象，解决实际问题，从而把量的关系与空间形式同事物的质联系在一起来研究。纯粹数学研究从客观世界中抽象出来的数学规律的内在联系。它大体分为三类，即研究空间形式的几何类，如微分几何、拓扑学等；研究离散系统的代数类，如近世代数，数论；研究连续现象的分析类，如微分方程、函数论、泛函分析。应用数学是研究如何从现实问题中抽象出数学规律以及如何自己把已知的数学规律应用于现实问题的。20世纪60年代以来，随着社会生产和科学技术的巨大进步，数学得到全面的发展，产生了许多新理论，如模糊数学、突变理论、非标准分析等。

数据 在统计工作中，对客观事物进行观察和测量所得到的结果，一般是用数值来表示，这种数值叫做数据。在调查和实验研究中，通过观察和测量可以得到各种不同的数据，也就是可以取得各种不同的量。这些数据之间往往有差别，其中有的量在运动中不起变化，即保持一定的数值，这种量叫做常量（或常数）；但另外一些量，在不同的时间、不同的条件下，都可能发生变化，即可取不同的数值，这种量叫做变量（或变数）。变量如按是否连续来分，可分为离散变量和连续变量两种。

数学记忆 以数学材料为对象的记忆。主要有以下四种形式。

（1）对数学本质问题的背景事实、具体数据的记忆。这种记忆在一定阶段、一定时期内是必要的，因为了解这些背景事实、具体数据有助于理解数学问题的本质。

（2）对数学定义、命题（包括公式、法则）的形式的记忆。

（3）对数学定义以及数学命题所揭示的有关概念性质和对象之间本质关系的直觉性保持，这种记忆伴随有抽象思维的高级形式。因为，由具体直观到一般抽象，这只是抽象思维的第一阶段，在理解了抽象的意义之后，把它迁移到自己熟悉的、联系密切的、浅显直观的事物中去，这便是抽象思维的第二阶段。正是通过思维的这一阶段，才能实现数学抽象意义的直觉性保持。例如，对于许多数学定义、定理，许多人往往不能很快用语言完整地表述它们，但却能立即判断所呈现的概念、命题是否符合有关定义、定理。这种对定义、定理的记忆就是一种直觉性保持。再如，用二次函数的图象来记忆一元二次不等式的解集，用特殊的直角三角形记忆特殊三角函数值。

（4）对数学问题的类型和解决这些问题的概括的模式的记忆。

以上四种数学记忆形式在数学记忆中的地位是不同的。事实上第3种和第4种形式是数学记忆的核心，它们决定着数学记忆品质的优劣。数学能力强的学生，其数学记忆突出表现为第3和第4种形式，而数学能力弱的学生的数学记忆往往是第3、第4种表现形式不明显。这说明，数学能力强弱的学生之间的一个显著差别并不是他们一般记忆能力的差别，而是记忆选择性上的差别，这种差别导致

能力强的学生表现出对数学本质的东西的很强的记忆力，而数学能力弱的学生则对数学本质性的东西记忆很差。

数学学科 数学教学的科目，如代数、几何、三角等。它是依据一定的数学教学理论组织起来的科学的基础知识体系。数学学科与之相对应的数学科学既有区别又有联系。数学学科的内容来自与之相对应的数学科学，教学中对这门科学应有所反映。但是，数学学科是为了数学教学的需要而编订的，它所吸取的内容不是数学科学中的全部，而是在数学科学中被公认的科学概念、基本原理、规律和基本事实，并能反映出数学科学的最新成果。它的内容一般是科学上有定论的、比较稳定的、基本而重要的基础知识。数学学科的体系不完全相同于对应的数学科学的体系，这是因为数学学科体系要符合教育原则，照顾到学习者的身心发展水平和该阶段的教育目的和任务。

数学教材 数学教材有广义和狭义两种含义。从狭义来说，数学教材是指根据数学学科的任务，编选和组织具有一定广度和深度的知识和技能的体系。它一般以教科书的形式具体反映出来。从广义来说，是指教师指导学生学习的一切教学材料，它包括有教科书、讲义、讲授提纲、教学参考书及图表、教学唱片、录音、录象等辅助材料。一般地说，数学教科书、讲义及讲授提纲是数学教材整体中的主要部分。随着现代科学、文化、教育的发展，数学教材的形式，正日益多样化，其主要趋势是把教科书和现代化教学手段结合起来，从而使数学教材的效果大大增强。

数学教育 智育的重要内容之一。其任务是授予学生从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识并形成学生的基本技能，发展学生的智能。数学基础知识是指教材中的概念、法则、性质、公式、公理、定理等，以及由其内容所反映出来的数学思想和数学方法，所要形成的基本技能是：按照一定的程序与步骤进行运算、作图或画图、判断、推理、论证。所要发展的智能内容主要是指培养学生的运算能力，空间想象能力，逻辑推理能力，运用数学知识分析问题和解决问题的能力。

数学教学 教学是指教师传授和学生学习的共同活动，是学校进行智育、德育、美育和体育的主要途径。通过教学，学生在教师有目的、有计划和有组织的指导下，积极主动地掌握系统的文化科学技术知识和技能，发展智力和体力，陶冶审美观点，培养思想品德。数学教学是指数学学科内容的教学，它的主要任务是授予学生数学基础知识，形成学生的数学基本技能，发展学生的智力，除此以外，还包括进行爱国主义教育、辩证唯物主义观点的教育、审美教育以及培养学生良好的个性品质。数学教学是实施数学教育的主要途径。

数学课课型 即数学课的类型。它是根据不同的教学任务或在一节课内主要采用的教学方法来划分课的类型的。按照在一节课内完成教学任务的多少可划分为单一课和综合课。在一

节课内主要完成一种教学任务的课称为单一课。单一课主要有：以传授知识为目的新授课；以巩固知识为目的复习课；以培养技能为目的练习课、实验课等。在一节课内完成两个或两个以上教学任务的课称为综合课。综合课适用小学，特别适用于小学低、中年级，这是由小学教学内容和小学生身心等特点决定的。按一节课主要运用的教学方法可分为：讲授课、演示课、练习课、测验课、讨论课、复习课等。教师正确的划分课的类型，有利于教师清楚地理解每堂课的教学目的任务，根据实际创造性的组织安排教学工作，更好地完成教学任务。

数学理想化 数学中通过理想化形成的概念，是思维中的产物。例如，几何学中的许多原始概念是理想化的结果。在自然界中不存在没有大小的"点"、没有宽度的"线"、可以无限延伸的平坦的"平面"。这些概念都是理想化的结果。如果没有点、直线、平面的概念，就没有几何学。为了建立数学体系，常在实在的研究对象中，引入"理想"的元素，这是理想化的一种手段。如虚数作为"理想"中的元素引入代数学，便使得最简单的方程 $x^2+1=0$ 有解。由于有了虚数和复数，每一个一元 n 次方程至少有一个根的命题成立。又如几何中，过两点有且仅有一条直线，两直线至多有一个交点，如果把两平行直线看成是在无穷远点处相交，那么对偶原理便成立。当然，无穷远点属于"理想"元素。它与有原始现实模型的普通的点具有不同的属性。

理想化的概念虽然产生了思维想象，但并不是纯粹荒诞不径的产物，它们服从于数学理论的建立和研究，经得起实际需要的检验，它们和整个数学一起，为揭示现实数量关系和形式起着作用。从某种意义上说，通过理想化形成概念，是人类想象能力高度发达的体现。

数学教科书 亦称数学课本。它是根据数学教学大纲和教学法的要求编写的，是系统地反映数学学科内容的教学用书。数学教科书一般包括：目录、说明、课文、练习、习题、复习题及全章小结等，其中课文是主要内容。随着科学技术的发展，有的数学教科书配有录音磁带、录象磁带、幻灯等音象资料。还有的数学教科书配有练习册、指导书或报告表等。数学教科书是数学教学内容的具体体现，是实现一定教育目的重要工具，是教与学的主要材料，也是考核数学教学质量的主要标准。我国现行的数学教科书是根据各级各类学校的数学教学大纲编写的。以中学数学教科书为例，除人民教育出版社编辑出版的通用的中学数学教科书外，还有北京师大数学系编写人民教育出版社出版的《中学数学实验教材》、中国科学院心理研究所卢仲衡主编地质出版社出版的《自学辅导数学教材》等。

数学个别教学 个别教学理论在数学学科教学中的运用和体现。个别教学是教师分别对个别学生进行教学的组织形式。中国和欧洲古代学校主要采用这种教学组织形式。19世纪末至20世纪初，为了克服班级教学的缺点，适应学生个别差异，一些教育家又曾主张用个别教学代替班级教学，如道

尔顿制、温纳特卡制等。20世纪50年代，为适应经济和科技的迅速发展的需要，工业发展国家强调培养高级科学技术人才，个别教学又得以重视起来。目前，我国仍以班级授课为基本形式，个别教学作为辅助形式。数学个别教学能根据学生的不同认知水平、能力、特长等，分别进行有针对性的教学和教育，是实行因材施教，培养数学尖子和辅导后进学生的好形式。但是，个别教学教育面太窄，教学效率太低。

数学公式教学　公式是中学数学贯穿始末的重要内容。公式教学本身是教学研究中的一个重要课题。下面列举的是公式教学中应注意的问题，属于经验的总结，有一定的参考价值。

（1）公式的引入　公式的引入若能把学生深深吸引住，将会激起学生的求知欲，使学生处于积极的思维状态，从而引导学生自觉地去探索新的知识。公式的引入，除了由课题直接引入外，还有多种方式。例如，通过实际问题引入公式，会使学生感到生活中处处存在数学，通过矛盾引入公式，能克服知识的负迁移，消除学生的一些错误猜想，由探索发现引入公式，是常用的方法，有利于培养学生的探索能力。

（2）公式的推导　引入公式后，就要对公式的证明。只注意公式的应用，不重视公式的推导，不是好的教学方法。教师应充分利用公式的推导帮助学生积累数学活动的经验。掌握由公式的证明所出现的数学思想和方法。获得公式的精确意义。

（3）公式串联　重视公式串联的教学，能使学生对公式有系统的认识，了解所学公式在教材中的地位，加深对公式的理解和记忆。中学数学中三角公式的串联就是例证。

（4）公式的变式　对公式进行适当变式，可帮助学生提高运用公式的能力。例如 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)/(1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)$ 的变式就有两种，它们在解题中各自有其广泛的应用。

（5）公式的特例　公式教学中，应注意对公式中的数学对象的特殊情况进行分析，导出特例，这样在某些情况下应用起来会更方便。例如，两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 间的距离公式，在直线 AB 与 x 轴或 y 轴平行的情况下就变成了 $|AB|=|x_1-x_2|$ 或 $|AB|=|y_1-y_2|$，给应用带来方便。

（6）公式的几何解释　数形结合在数学教学中的作用是众所周知的。公式教学中，若能结合公式的特点，进行一些几何解释，给出几何意义是最为理想的。

（7）公式的记忆　教师应该引导和帮助学生设法记住公式。常用的公式记忆法有：直观形象记忆法，理解记忆法、系统记忆法，对立记忆法，区别记忆法，辨别特征记忆法，口诀记忆法。

（8）公式的应用　应用是公式教学的主要目的。也是公式教学中的难点。涉及到学生的观察能力，联想能力，恒等变形能力。教学中应特别引导学生注意公式的适用范围和条件，公式的逆向应用，公式的变式应用，代数式的拼凑变形，各科公式的

串通应用等等。

（9）公式的推广 公式教学中，教师应适应引导学生作一些推广的探索。这有助于开阔视野，触类旁通，提高学生的探究水平。

数学认知结构 认知结构，又称图式。皮亚杰发生认识论中的重要概念。皮亚杰指出，知识来源于主客体的相互作用，在相互作用中，每个人都建立了一个反映事物间稳定关系的内心结构，即认知结构。皮亚杰认为，在整个认知发展过程中，人们面临新事物时，获取知识，解决问题的方式只有两种：①将新信息吸收到已有的图式之中，称为同化；②修改或新建图式以适应新信息，称顺应。在认知变化的过程中，同化说明成长，一种量的变化，而顺应说明发展，一种质的变化。这两种心理过程结合在一起进行多次循环，乃是智慧的适应和解决问题能量发展的原因。因此，学生的学习实际上是一个不断的建构过程。皮亚杰提出的“认知结构”，还只是一个假说，近期很难得到生理解剖学的证实。对于数学认知结构的含义，我国学者一般理解为“主体对客观知识结构反映的产物”，“它是学生头脑里的知识结构”。学生在掌握知识的过程中，产生以下三个结果：①数学理论的内化；②数学技能的形成和内化；③数学活动经验的逐步积累。内化了数学理论、数学技能和数学活动经验构成了数学认知结构的基本元素。这些基本元素，以及这些元素的组织方式就是数学认知结构。

这里所谓的数学活动经验是指：①对具体数学理论或数学技能的应用背景和条件的概括。例如，学生掌握了“换元法”的具体步骤，他就获得了换元技能，而在什么背景和什么条件下应用换元技能更为有效，这就是一种活动经验。活动经验和理论、技能是不同的。获得了某种理论、技能，未必就获得了相应的活动经验。因为，理论、技能应用的具体背景和条件是多变的复杂的，理论、技能本身可以在其中某一具体背景下被获得，但如果没有一定的概括，相应的活动经验就难以获得。②对数学活动中的一般活动方式、方法的概括。例如，遇到一个数学问题，先要干什么后要干什么，再后要干什么等等，这也是一类数学活动经验。

学生心理中的认知结构到底是什么样子？这个是无法“看见”的。只有通过学习过程中的口头作业、书面作业或动手操作过程来“观察”到，并加以分析和描述。我国学者胡克英认为最好的描述就是“竖成线，横成片”的模式。”竖成线”指的是系统结构中纵向结构（逻辑联系形式）。“横成片”，指的是系统结构中的横向结构。纵向前后沟通，横向左右逢源和触类旁通。

数学教学，从某种意义上说，就是形成学生的良好的数学认知结构。新的认知结构的形成既是数学活动和智力发展的成果，又是继续开展数学活动和进一步发展智力的基本前提：业已形成的认知结构，乃是进一步学习、探索新知识、新技能的前提；是便于知识、技能迁移的条件；也是便于记忆中保持和检索已知导向新知的“智力库”。因此，认知结构又叫做

“推理框架”。

数学双基教学　数学双基教学是数学的基础知识和基本技能教学的简称。数学的基础知识是指数学的基本概念、原理、公式、法则、定理、数学思想方法等及其所构成的数学教育体系。数学基本技能是指形成复杂技能所必备的起始的技能。中小学数学教学一定要切实加强双基教学。这是因为:

（1）中小学数学教育是基础教育，要为学生德、智、体、美、劳几方面进一步发展奠定基础。其中包括为学生将来建造知识大厦打下良好基础。

（2）由于数学基础知识本身的性质和特点决定的　数学基础知识不仅是本学科知识赖以发展的基础，也是其它科学知识领域中，高深知识赖以发展、建树的起点、根基。这个根基打得越牢、越宽、越容易掌握高深知识。可以说，在当今科技飞速发展的今天，数学已渗入到各个学科领域中，成为可以驾驭一切学科知识的基础知识。

（3）数学基础知识在实际生活、生产和科学实验中具有广泛地适用性，比掌握具体的数学类型题更实用，更经济。

（4）数学基础知识具有相对的稳定性，它比实用性、技术性知识变动、过时的速度要慢得多。

正是由于这些原因，近几十年来，经过国际新数运动，数学双基教学仍普遍重视，并成为现代数学教育改革教学内容的一个突出的特点。“加强双基、培养能力”是在总结我国数学教学重视双基的宝贵经验的基础上，结合数学教育改革方向，从全国数学教学实际，为培养出四化建设所需要的人才提出来，并已成为广大数学教育工作者共同探讨的课题。

数学成绩评定　根据数学教学目的、任务对教学效果作出价值判断的手段，又是提供数学教学活动所需信息的途径。数学成绩评定可以提供反馈信息。它的功能有二：第一是调节功能。数学成绩评定既可反映学生的学习成绩，又可反映教师的教学效果，教师和学生都可以依据评定来调节教与学的活动。第二是动力或机动功能。通过信息反馈，激发学生学习的积极性。评定成绩可采用等级制（如甲、乙、丙、丁）和百分制记分法。评分和评语相结合会收到更好的效果。数学成绩评定，除评定学业成绩外，还可以评定学生学习的努力程度、进步状况，指出学习中的优缺点，努力方向。同时还要注意评定学生的智力发展状况，即不仅要看学生的答案是否正确，还要视其思维过程是否科学，评定态度要正确，执行标准要客观公正，不可将对学生的情感来替代评定标准，贻误学生。

数学作业设计　数学课作业题目的确定、层次、系统和结构的安排。数学课作业的安排是保证数学教学质量的重要组成部分。数学课作业是一种有目的、有计划、有指导的教学活动，这种活动是使学生通过作业练习将数学知识转化为技能、技巧、达到培养学生分析问题、解决问题的能力。因此，教师教学必须精心设计作业练习题。作业练习题的设计要注意以下几

点：①作业练习要有重点。要根据每节课的教学要求和具体内容编选练习题。对某些重点知识，特别是在学生掌握知识的转折点上，要设计足够数量的练习题。②作业练习题的编排要有一定的顺序，要循序渐进，注意沟通题与题之间的内在联系。如理解新知识的初步练习，可设计带有模仿性的题；为巩固提高已有的知识，可设计把新旧知识相联系的稍有变化的题；为进一步理解新知识，并能灵活应用，可设计带有综合性的题，或较灵活的有一定难度的练习题，等等。题目的编排一定要从学生实际出发，能使优生发挥其才能，差生也能达到教学大纲的基本要求。③作业练习的形式、种类要灵活多样，能激发学生的学习积极性，提高学习兴趣。题型除常见的运算、证明及应用题外，还可设计填空题、判断题、改错题、选择题、作图题、趣味性数学题等。④使学生及时了解自己作业练习的结果。学生作业练习结果的及时反馈，可使学生坚持正确、纠正错误，不断提高学习的动机水平和学习效果。教师要注意培养学生自己检查、分析评价作业练习结果的好习惯。这不仅是为了培养学生正确的学习态度和认真负责的精神，也是培养学生独立学习能力所需要的。

数学直观教具 数学教学中为学生认识、理解和掌握数学知识所提供感性材料的实物、模型、图表及电化教具等教学用具。数学直观教具的种类主要有以下几种：

（1）实物。就是与教材内容有关的客观事物的原形，直接呈现在学生面前，供学生观察、听、闻、尝、触摸等，使学生直接感受、认知。如学视图时直接看实物，学测量时实地进行操作等。

（2）摸拟实物。包括标本、模型和其它复制品等。如立体几何教学中常用的柱、锥、台、球的模型等。

（3）描绘事物形象的图表。包括图画、照片、地图和统计表等。如函数图象等。

（4）再现事物形象及其过程的现代化设备。如电影、电视、幻灯、投影仪及计算机辅助教学等。

恰当而正确的运用直观教具，能够提高学生的学习兴趣，丰富感性知识，减少学习中的困难，正确形成概念，发展学生的观察力和思维能力。

数学知识结构 所谓结构就是事物的联系。知识结构就是知识的要素之间以一定的联系构成的体系。联系的方式和程度的不同，就构成不同的知识结构。根据认知心理学理论，学习是认知结构的组织与重新组织。主体是通过一系列的认知活动来构成自己的认知结构的。而认知结构的构成与知识结构有直接关系。好的知识结构可以简化知识，可以产生新知识，有利于知识的利用，是形成良好的认知结构的保证。对数学知识结构来说，必须区分学科数学知识结构和科学数学知识结构两个概念。所谓学科数学知识结构，是指作为教学科目的数学内容的结构。它一般以教材的方式呈现，教学时往往还要由教师进一步调整和完善。所谓科学的数学知识结

构，一般以专著的方式呈现，按逻辑主义的观点，即以量的公理、原理出发，用演绎的方法，逐步展开。按布尔巴基学派的观点，数学的各个分支，尽管差别很大，都可以归结为代数结构、拓朴结构与顺序结构。“新数学”运动失败的教训之一就是不能混淆二者的界线。关于两者之间如何联系，是探讨中的问题。一般认为：第一，学科数学知识结构要以科学数学知识结构为指导。首先，其内容应具有科学性。其次，要注意反映科学数学现状，一些新的结论和目前迫切需要的知识应列入，并大体反映科学数学结构的特征。另外，学科数学知识结构同科学数学知识结构，不是简单的内容相似，更重要的是追求精神，思想和方法的一致。第二，学科数学知识结构是一个多功能的开放体系，不仅要反映科学知识结构，还要考虑学生的认识过程和结构。它要考虑到可接受性，强调数学思维，注意探索性，还要增加趣味性。

数学法则教学　法则即规律，是客观事物内部的本质的普遍的必然联系，它决定事物发展的过程和基本趋势。规律表现为客观事物发展过程中的必然性、普遍性和重复性。客观事物的本质的必然的联系，具有必然性，表现为事物发展过程中所具有的某种确定不移的秩序。只要具备了一定的条件、规律就发生作用，反映事物本质特征的现象就重复出现。事物的本质所反映的必然联系，是同一类事物和现象共有的，规律发生作用的范围也在同类事物范围内，并毫无例外地普遍地发生作用。数学中的法则（表现为公式规则、程序、严格的运算顺序）则是某些数学对象之间关系的规律性的反映。准确地执行这些规定，任何一个建立了这个规定的那种类型的问题都可以得到解决。在数学教材中，法则的导出常通过两种途径：一是从众多的特例中运用归纳法抽象概括而成，例如加法运算法则；二是服从理论体系的需要，经逻辑推理推导而得，例如对数的运算法则。在中学阶段随着年级的升高，后者所占的比例越来越大。在数学法则的教学中一般要做好三个方面的工作：导出法则，帮助学生熟悉和掌握法则，法则的灵活运用。法则的教学，最终要使学生形成技能，达到熟练，即运算的自动化，此时操作者无须考虑每一符号的含义，每一步运算的依据，仅对符号表达式进行形式操作，思维过程出现简缩、跳跃、越层现象。神经劳动的消耗减少和内部言语过程的进行较少需要操作者的意志努力。似乎不需要意识的参与而进行。其间有一个过程，这个过程主要是通过练习达到的。对于这个过程的理解和指导，加里培林的智力活动按阶段形成的理论在教学中具有一定的参考意义。

数学学科特点　数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学。数学知识的特点首先是它的高度抽象性。数学中的任何一类概念，一个数、式、形和一条规律等，都是抽象概括的结果。正如恩格斯所指出的，数学是一种关系的发现并用抽象的符号来表示这种关系，如自然数只有一套，但却可以用来数一切东西。$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$，可以表示

天地间万事万物的这种数量关系。数学的思考方法也是抽象的，数学命题的证明是运用概念通过推理、计算，所以数学结论具有逻辑的严密性，任何一个数学命题只有从逻辑推理上严格地加以证明，才能最终在数学中成立。数学这种推理的严密性，使得每个懂得它的人都认为是无可争辩的确定无疑的，因而产生了结论的确定性。数学也是系统性很强的学科，任何一个数学概念，数量关系和空间形式都可以按不同的关系归类，形成联系系统。数学知识之间有一种特定的必然的逻辑关系——知识的内在规律和联系。例如在实数范围内当 $b\neq 0$ 时，$a\div b=\frac{a}{b}$。数学知识还具有应用的广泛性，它能够被广泛地运用到实际生活和各个科学领域中。

数学定理教学 数学中的判断，通常称之为命题。定理作为一种真命题，是证明新命题的根据。在具体解决数学问题的过程中，处处离不开定理，定理是组成数学教材的主要内容之一。数学定理的教学过程，一般可分为五个步骤：①设计好定理的引入；②弄清定理的条件和结论；③掌握定理的论证过程；④熟悉定理的应用规律和范围；⑤把握定理间的内在联系。这五个环节是紧密相连的，教学中不能把它分离开来，特别要重视在整个教学过程中的综合作用。定理之间的内在联系是整个教学过程中的主线，以它带动其他各个环节。要把握住这根主线，首先要弄清定理的来龙去脉。所谓弄清来龙去脉，就是弄清定理怎样由比它更特殊、更具体的系列命题的探索、讨论中得来的。其次，要了解定理是如何由作为基础的一批命题推导出来的。再次是对与所教定理有等价关系一系列命题也要尽量明确。比如原命题与逆否命题的等价，原命题和满足充要条件的逆命题的等价等。最后应指出通过该定理的变换、引伸、推广，能得到哪些主要命题。最后，要明确定理的主要应用。其中把定理按概念的性质和判定归类，在几何教学中我省有着成功的经验。

当前，数学定理的教学中普遍存在的困难是来自逻辑方面的。主要包括命题联结词的意义及运用，量词否定律的运用，选言命题的否定，联言命题的否定等。下面略作说明其逻辑依据。

命题可分为简单命题和复合命题两种。所谓简单命题是指不可分的命题，如 $2+3=6$，$2>1$ 等；复合命题是指可以分解为若干个简单命题的命题。例如，6是2的倍数且6是3的倍数。简单命题组成复合命题需用“词”联结。这种“词”就称为命题联结词。中学数学中用到的命题联结词有五个，即“非”、“或”、“且”、“若…，则…”、“当且仅当”。其中最重要的是“非”、“或”、“且”。如果用 P、Q 表示两个命题，那么 $\overline{P}$ 表示 P 的非，也可用 $\neg P$ 表示；$P\vee Q$ 表示 P 或 Q 称为选言命题；$P\wedge Q$ 表示 P 且 Q 称为联言命题；$P\Longrightarrow Q$ 表示若 P 则 Q 称为假言命题，$P\Longleftrightarrow Q$ 表示 P 当且仅当 Q 称为等价命题。选言命题和联言命题

的否定分别有法则：$\overline{P\vee Q}\Longleftrightarrow\overline{P}\wedge\overline{Q}$，$\overline{P\wedge Q}\Longleftrightarrow\overline{P}\vee\overline{Q}$。命题又有全称命题和特称命题之分，可分别表示为

$$(\forall_x)\ P(x)\quad 和\quad (\exists_x)\ P(x)$$

前者表示对于 x 的取值集合中的每一个 x，$P(x)$ 都成立。通常全称命题中采用"凡是"、"一切的"、"每一个"、"任何的"等词，它们相当于这里的符号"$\forall_x$"；后者表示对于 x 的取值集合中至少有一个 x，使得 $P(x)$ 成立。通常特称命题中采用"有的"、"存在"等词，它们相当于这里的符号"$\exists_x$"。对含有量词的命题 $(\forall_x)P(x)$ 及 $(\exists_x)P(x)$ 的否定运算有法则：

$$\neg((\forall_x)P(x)) = ((\exists_x)\neg(P(x))),$$

$$\neg((\exists_x)P(x)) = ((\forall_x)\neg(P(x)))。$$

数学复式教学　把两个或两个以上年级的学生编在一个班里，由一位教师分别用不同的数学教材，在同一节课内对不同年级的学生进行教学的一种组织形式。这是班级教学的一种特殊形式。数学复式教学的特点是：第一，教师讲课和学生自学或学生独立作业交替进行。具体过程是教师对班中一个年级的学生讲课的同时，组织班中其他年级的学生自动作业或自学教材，两种教学活动有计划地交替进行。第二，一个班中几个不同年级，学科内容不同，头绪多，讲授时间少，教学任务重，对教师备课和授课的要求高，第三，编班、排座位、编制课程表复杂，因而安排要求是合理，科学，便于教学。编班是以尽量减少各年级间的相互干扰为原则，具体形式有单班复式编制，双班复式编制和多班复式编制三种。学生座位排列横列式、纵列式、块块式、活动式及相背式等。课程表编排要把教学内容讲授时间长的和学生自己作业时间长的相互搭配，把高年级和低年级的学科相互搭配，尽量减少声浪冲突。第四，充分发挥学生小助手作用。复式教学重视培养小助手，辅助教师组织教学，加强课堂常规训练。

复式教学的优点是节省师资、教室和教学设备，适用于人口居住分散、交通不便的山区、牧区和师资缺乏的农村。但是，这种教学组织形式难度大，教学关系错综复杂，很难处理，教师负担重。

数学班级教学　又称**数学班级授课制**或**数学课堂教学**。把年龄、程度相同或相近的学生编成有固定人数的教学班，由教师根据教学大纲规定的课程内容和课时数，按照课程表同时向全体学生进行教学的一种教学组织形式。数学班级授课是一定历史条件下的产物。是随着班级授课制的产生而产生。是我国目前中小学数学教学的基本组织形式。其优点是：

（1）分班级授课是集体组织形式，有利于集体成员的互促、提高；有利于教师主导作用的发挥。

（2）一位教师对几十名学生进行教学，扩大了教育对象，提高了教学工作效率，有利于大面积提高教学质量、大面积培养人才。

（3）统一教学要求，统一学时，保证了教学有计划、有组织、有

目的进行。保证了教学质量的提高。

（4）按课程表进行教学，各学科轮流交替，能扩大学生知识领域，提高学习兴趣，增强学习效果，相对地能减轻学生的疲劳。

但是这种授课制是有很大局限性的，不便于适应学生的个别差异。因此，在班级授课制的同时，在中小学数学教学中，强调因材施教、开拓第二课堂，以弥补它的局限性。

数学课的结构　一节数学课的基本组成部分及各部分之间的关系、联系、进行的顺序和时间的分配等。数学课的类型不同，其结构也不同。数学综合课的一般结构是：第一，组织上课（组织教学）。使学生对上课作好心理上的准备，激发学生学习兴趣和求知欲，把学生注意力、积极性，自觉地引入学习情境中。这就是组织教学。任何一堂课都需要组织教学，而且组织教学要贯穿于每堂课的始终。第二，检查复习。其目的是对学生已学过的知识进行巩固和加深，了解学生掌握旧知识的情况，查漏补缺，为学习和掌握新知识作准备。同时要严格培养学生对学习的责心感和按时独立完成作业的习惯。第三，学习新知识（新授），这是综合课的主要部分。为完成这部分的教学任务，教师必须恰当地选择教法，发挥个人教学优势与特长。第四，巩固新知识。理解、消化、巩固当堂所学新知识，检查存在问题，及时加以解决。第五，布置作业。目的是巩固、深化新知识，培养学生运用知识分析问题和解决问题的能力以及独立工作的能力。

数学单一课型的结构，是依据教学任务的不同而不同，其结构形式，一般归结为：第一，组织上课（组织教学）；第二，明确上课的目的要求；第三，教师讲授、示范，指导学生活动；第四，总结布置作业。课型结构不是固定不变的，教师要根据一节课的教学目的、内容、方法、教学对象、学科特点设计课的结构。判断一节课的结构设计是否合理、优劣，标准是教学效果。

数学能力结构　数学能力是一种特殊的特力，它是与数学活动相适应，保证数学活动顺利完成所必须具备的心理条件。由于数学活动常分为数学学习和数学学术研究两种类型。因此相应的数学能力也呈现出不同的水平。一种是数学学习能力，即能较为迅速、容易并透彻地掌握数学知识、技能的那些独特的心理特征，另一种是数学研究能力，它是创造具有社会价值的新成果的创造性的能力。通常所说的数学能力是指前一种。

苏联克鲁捷茨基在他的专著《中小学数学能力心理学》中所论述的关于数学能力结构的一般轮廓如下：

（1）获得数学信息。对于数学材料的形式化知觉的能力，掌握题目的形式结构的能力。

（2）加工数学信息。①在数量关系和空间关系方面，以及在数和字母符号方面进行逻辑思想的能力；用数学符号进行思维的能力。②对数学对象、关系和运算的迅速而广泛的概括能力。③简缩数学推理过程和相应的运算系统的能力；以简缩的结构进行思维的能力。④数学活动中心理过程的灵活性。⑤力求解法的简洁、清

楚、经济和合理。⑥迅速和随意地改变心理过程的方向，从正向思维序列转到逆向思维序列的能力（数学推理过程的可逆性）。

（3）保持数学信息。数学记忆（对数学关系、类型特征、论证或证明的模式、解题的方法以及探索的原则等的概括记忆）。

（4）一般的综合成分（数学气质）。克鲁捷茨基认为下列成分在数学能力结构中虽然有用，但不是必要的，他们是否出现在结构中决定了数学气质的种类。①作为暂时特征的心理过程的敏捷性。②计算能力（迅速而精确地计算的能力，常指心算）。③对符号、数和公式的记忆。④对空间概念的能力。⑤把抽象的数学关系和函数依赖关系视觉化的能力。

数学教材编排　数学教材编排的方式一般有两种形式。

（1）直线式编排。按数学学科的一定系统前后一贯地排列，一步一步地衔接，后面不再重复前面已有的内容，后面部分成为前面部分的继续。这种直线式编排的方式的优点，可以节省学习时间；缺点是，若学生对某一部分内容一时不能透彻地理解，因不再重复可能造成学习上的困难。

（2）圆周式（或称螺旋式）编排。按数学学科内容在各个教学阶段重复出现，逐步加深程度和扩大范围的编排方式。这种编排的优点是，能逐步深入地科学地说明所学的概念和原理，揭示数学知识间的内在联系；缺点是所用的教学时数较多。数学教材的编排是由许多因素决定的，如数学学科在整个教学学科中的地位、作用；数学学科在自身整体体系中的地位、作用；教育阶段的划分；学生的认识水平和学生的年龄特征等。随着教育改革的深化，教材改革和教材建设已进入一个新阶段，数学教材编排将如何改革，已引起广大数学教育工作者的重视和探究。不过，从目前我国使用的中小学通用数学教材或一些数学实验教材来看，多数数学教材编排，都是不同程度地将两种编排方式结合起来运用。

数学概念教学　中学生获得数学概念的形式，可以说主要是概念的同化。所谓概念的同化，是利用学生认知结构中原有概念，以定义的方式直接向学生揭示概念的关键特征。使新旧知识相互作用，新知识纳入原有认知结构的过程。在教学中，学生以概念同化的形式获取概念大致有以下几个阶段。①观察一组实例，抽象出共同的属性。②给出新概念的定义，通过分析其逻辑意义，初步领会新概念的本质属性。③例举概念的肯定例证和否定例证，使概念的内涵和外延进一步明显精确。④新概念与已有认知结构中适当的观念建立联系（归属关系，总括关系，并列结合关系），同时新概念与有关概念进一步发生分化，融会贯通，形成一个统一的整体。⑤用自己的语言重新表述新概念的意义。⑥进一步运用概念，使概念的认识上升到抽象的具体。

概念教学，从心理学角度来说，应注意以下问题。

（1）在概念体系下学习概念。教师要有效地进行概念教学，必须了

解：新概念与已有概念体系及整个知识系统中有着何种逻辑联系？学生接受新概念的原有概念体系是否完善？学生的认知水平如何？对于须进行归属学习的概念，应明确属种概念之间的联系和质的差别，以便在已知概念包摄下较快掌握新概念的意义。同时，新概念的意义的获得又进一步分化了已有概念，使得对旧概念的认识更加具体、充实、明确。倘若新概念与已有概念是相关归属关系，就必须进行螺旋式教学。倘若新概念是在旧概念基础上形成的高级概念，那么，就应该了解学生对相关的低级概念掌握程度如何，学生抽象概括能力怎样？以采取适当的教学手段，适应新概念的学习。奥苏伯尔认为，学生原有知识的稳定性、清晰性与新概念的可联系性和可辨性是制约学生对新概念能否获得清晰、稳定、精确分化的意义的重要认知结构变量。

（2）学习材料的组织和呈现

概念的学习以不受过多的无关特征的干扰为好。概念的本质特征越明显，学习越容易、有效。如有过多的无关因素夹杂在内，学习者的注意力就为这些无关特征所吸引，接受概念就比较困难。我国心理学的一项实验研究证明采用“直接揭露概念本质”与“变式图形”相结合，或交替使用，无论是对概念的词的正确叙述，对概念图形和非概念图形的正确判断和问题的正确解决均有利于几何概念的掌握。关于学习材料的组织奥苏伯尔提出了两条基本原则：其一、逐次分化原则。这就是说，起初提出最一般性、囊括性的概念，然后逐次分化为特殊的细节的概念。通过下位概念，逐次下伸到诸项各别的事实。其二，综合贯通原则。这就是说，新的概念要有意识地同即习的内容调合起来，统一起来。即从横的方面加强教材中概念、原理、课题乃至章节之间的联系。

（3）明确概念的有效措施。数学概念常用定义揭示其本质属性，用数学语言给概念命名。因此，在概念的学习中，准确领会定义的逻辑意义，正确掌握名称、符号的语义内容，是明确概念的重要环节。学生理解某一概念的定义的逻辑意义时一般经历两个过程：一是知觉表达定义的语法结构与词义；二是把理解了的词义与知识结构中原有概念建立联系，使个别孤立的词意综合起来获得整体定义的意义。对于难于理解的概念，教学中必须运用肯定例证和否定例证。运用比较、运用变式、运用划分等手段，帮助学生建立起清晰、精确、稳定的意义。要提倡学生运用自己的词汇语言阐述概念的含义。对于表示概念的名称或符号，教学中必须防止学生将概念与符号脱节、符号与符号之间混淆，因此，教学过程中，要自始至终给表示概念的符号赋于具体内容，提醒学生注意符号的意义。

数学意义学习　学生学习数学是指学习用文字符号或数学符号表示的概念、公式、法则、定理。根据学习材料的内容及其与学习者认知结构的关系，可以把学习分为机械学习与有意义的学习。

机械学习是指学生并未理解由符号所代表的知识，仅仅记住某个数学

符号或某些词句的组合。例如关于函数的一般符号 $y=f(x)$，学生可能知道这是函数符号，也知道 y 代表因变量、x 代表自变量。但它真正的含义并未十分清楚，遇到如 $y=f(x)=x^2$ $(x\in R)$ 与 $u=f(v)=v^2$ $(v\in R)$，认为是两个函数。或者会背函数的定义，但不知其意义，这些都是机械学习。若学习是机械的，保持和再现必定也是机械的，即靠死记硬背。

意义学习则是学生能理解由符号所代表的知识，并能融会贯通。再以函数为例，不仅理解函数的定义的文字意义，而且能理解函数的数学符号的意义。还要与映射概念，具体的基本初等函数融会贯通。这样的学习才是有意义的学习。若学习是有意义的，则保持和再现才能是有意义的。在数学学习中提倡的是有意义学习，但并否定，在个别情况下的机械学习。

美国教育心理学家奥苏伯尔认为，有意义学习过程的实质，就是符号所代表的新知识与学习者认知结构中已有的适当知识建立非人为的（非任意的）和实质性的（非字面的）联系。所谓实质性的联系，指用不同语言或其他符号表达的同一认知内容的联系。例如对数概念“$\log_a b$”，“求以 a 为底 b 的对数就是求 a 的多少次方等于 b”，“$a^{\log_a b}=b$”三者表示的是同一个意思，这三者的联系就是实质性的联系。如果把 $a^{\log_a b}=b$ 看作是 a 与 $\log_a$ 抵消就等于 b，那就是字面上的联系而不是实质联系。建立“实质性联系”和“非人为联系”与建立“字面的”和“人为的”联系是区别意义学习与机械学习的两个标准。又如把三倍角的正弦，余弦公式与“山无司令”“司令无山”联系进行记忆，这就是“人为的联系”属于机械学习。

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

山　无司令

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

司令　无山

如何进行有意义的数学学习呢？

（1）学习材料要具有逻辑意义。这就是学习材料本身可以与有关的概念、定理、法则、原理建立非人为的和实质的联系。就数学而言，除个别如 π、e 等常数外，绝大部分都是具有逻辑意义的，而且比别的学科更为突出，这是数学意义学习的有利条件。

（2）如果学习材料本身具有逻辑意义，而且学习者认知结构中又具备了适当的知识基础，那么这种学习材料对于学习者就构成了潜在意义。例如微积分本身是具有逻辑意义的，但对小学生来说，不构成潜在意义，而对于中学生或大学生来说就构成了潜在意义。

（3）学习者必须积极主动地使这种具有潜在意义的新知识与他认知结构中有关旧知识发生相互作用，结果，旧知识得到改造，新知识就获得实际意义，即心理意义。也就是说学习者必须有进行有意义学习的心向。

意义学习的核心是认知结构中起固定作用的观念。也就是学生原有的知识状况是决定新的学习的最重要的一个因素。奥苏伯尔十分强调这一因素，他说“如果我不得不把全部教育

心理学还原为一条原理的话，我将会说，影响学习的最重要的因素是学生已经知道了什么，根据学生原有的知识状况进行教学”。在教学法中强调新旧知识联系，新知识在旧知识基础上进行，新知识是旧知识发展就是这个道理。旧知识即认知结构中对新知识起固定作用的适当知识，是否清晰，是否巩固将决定新知识学习的质量。新旧知识的结合点，往往就是教学的重点，也往往是启发点。

数据的上下限 一个数的上下限，是指位于这个数的上下各半个测量单位的那些点。如果用整数秒来测量时间，那么测量单位是1秒，因此，33秒的上下限分别是33.5秒和32.5秒，在33秒的上下分别占半个测量单位（0.5秒）。如果测量可以精确到十分之一秒，其记录值应为33.0，那么该值的上下限便是33.05秒和32.95秒。

数学教学指导书 亦称数学教学参考书。它是按照数学教科书的内容编写的辅导教师教学的参考用书。它根据数学教科书的主要内容即课文，提出教学目的，分析课文的地位和作用，阐明重点、难点，预习的提示，习题的标示，教具和教法的建议，对优秀生的补充习题，对后进生的辅导要点，供教师教学参考的注释，习题解答，教师进修资料等。我国现行的数学教学指导书，是根据人民教育出版社编辑出版的通用数学课本各册内容编写成的：小学数学教学参考书；初级中学数学教学参考书；高级中学数学教学参考书。1988年7月上海教育出版社出版了中小学教学指导书（上教版）编辑委员会组织编写的中学数学各科的教学指导书；1988年9月人民教育出版社出版了中小学教学指导书编辑委员会组织编写的初、高中数学教学指导书。

数学思想方法教学 数学思想方法和数学基础知识（概念、公式、法则、定理）是数学内容的两个有机组成部分，也是数学教学的内容构成。尽管数学思想方法具体反映于基础知识之中，但数学知识的教学是不能代替数学思想方法的教学的，二者既有质的不同又有量的差异。首先数学知识是认识的结果，数学思想是认识活动中的基本观点，数学方法为数学活动提供思路、逻辑手段和操作原则，它们之间存在质的差异。反映在教学中，知识教学是信息的传递，而思想和方法的教学是形成观点和技能的训练。其次，数学思想方法与数学知识的质的规定性，必然决定着其量的不同。同一数学思想概括着许多不同的方法和知识，同一数学一数学方法引出许多数学知识。所以，从量上讲数学知识最丰富，思想方法相对较少，知识的教学量也大于思想方法的教学量。此外，数学知识教学是数学活动结果的教学，重在记忆理解，而数学思想方法教学是数学活动过程的教学，重在思辨操作，掌握技艺；数学知识是一条宏观线索，教学中容易认识和把握，而数学思想方法是隐含于数学知识之中的一条微观线索，不易发现和把握。所以数学思想方法教学难于数学知识的教学。就如何进行数学思想方法教学的问题，我国数学教育工作者做了大量的研究，取得了明显的成果。下面是张雄同志提出的关于数学思想

方法教学的一个原理、四条原则。

（1）一个原理——渗透综合原理 数学思想方法产生数学知识，数学知识又蕴载着思想方法，二者的辩证统一性，决定了它们在教学中的统一性。数学思想方法的教学总要依附于数学知识的教学，而数学知识的教学又丝毫不能离开数学思想方法。如果二者对立起来，纯粹追求数学思想方法的教学，就会犯形式主义的错误，成为缺乏基础的无稽之谈。而知识教学虽隐含着思想方法，但若不有意识地把数学思想方法作为教学对象，学生掌握知识时并不一定注意思想方法。因此，数学思想方法的教学应该遵循渗透综合原理，即以数学知识教学为主体，在知识教学的过程中，有意渗透、综合必要的思想方法并使之明确化，从而通过知识传授过程达到思想方法教学之目的。

（2）四条原则——分析原则、概括原则、指示原则、审美原则 分析原则：采用渗透综合原理，首先对教材中所反映的数学思想方法要明晰。这就有必要对定理的推证和习题的解答，从思想方法角度作认真的分析，弄清解决某一问题，证明某一定理或某章节知识中都集中反映了那些数学思想方法，而每一数学思想和方法又具体分散在哪些知识点和章节中，要求达到何种程度。这种以数学思想方法为线索分析教材的思想就是这里所说的分析原则。它不仅体现于教师的备课之中，更重要的是在课堂教学中落实。概括原则：许多数学思想方法常常是数学知识发生过程的提炼、概括或升华。因此，教学中把知识揭示的本质规律从思想和方法的角度作提炼、概括，形成观点、意识。这是由知识向思想方法的转化过程，也是“由厚到薄”的过程。这是概括原则的一层意思。另外，由于同一内容可以表现不同的思想或方法，而同一思想或方法又分布在许多不同的地方，因此单元小结或总复习时，应十分注意用思想和方法来统摄，概括和联系教材，这是概括原则的另一层意思。指示原则：数学思想方法对数学知识的学习和数学问题的解答都起着积极的指示作用，在一定程度上有着决定意义。只有善于利用这种指示性，才能使数学教学卓有成效。中学数学教学中的一些难点，也正是数学思想和方法的变更或综合，教学中自觉运用数学思想方法指导概念的形成、知识的发现、就可更好地突破难点。任何数学问题的解答不仅是概念、公式的不断运用，同时又是数学思想方法反复运用的过程，所以解题过程的步步转化，无不遵循数学思想方法的指示方向。审美原则：数学美深刻地表现着客观世界在数量与形式上的美、追求数学美、在数学方法论中地位赫然。而数学美在很大程度上表现在数学思想方法，例如，分解、变换、降维、减元体现了数学美的简单性，联想、类比、猜想体现了数学美的相似性，而构造反例、寻求特例、极端化则体现了数学美的奇异性。审美原则就是说，要在教学中突出表现数学思想方法的美，加深数学美的理解，提高数学审美观点，并通过对数学美感的追求，自觉运用数学思想方法。

数学教学中的反例 用来说明某个数

学命题不成立的例子。在数学中要证明一个命题成立，需要严格论证在符合题设的各种可能的情况下，结论都成立，而要推翻一个命题，却只须指出在符合题设的某个特殊情形下结论不成立就行，也就是只要举出一个反例就算完事。由于反例在否定一个数学命题时具有的特殊威力，因此在教学中适当地运用反例，可以收到事半功倍的效果。这种运用主要来自三个方面。

（1）正确有效地指出错误是教学的基本任务之一。无论是评判学生对提问的回答，还是批改学生的作业，都需要指出其中的错误，而指出错误最有说服力的因而也是最有效的办法是举出反例。

（2）在概念教学中，对某些重要概念，有时只从正面给出定义并举例说明还不够，为了加深对这个概念所具有的本质属性的理解，有时还要举出不符合定义的例子，所谓否定例证，也是反例的一种运用。

（3）在定理的教学中，教给学生正确地使用定理很重要，初学者往往不注意分析定理适用的范围，表现为不注意定理条件，硬套结论，造成错误，防止这类错误发生的有效策略，也是出示反例。

数学反例的构造，本身就是件有意义而且充满创造性的工作。通常是设法举出一个符合题设的某个特殊情形，而在这种情形下，命题的结论不成立。这里的特殊情形，常常是指某种极端情形或某个具有明显特征的具体情形，而在此种情形，结论是熟悉的或易于得到的。

数学教学中的猜想　一般用于探索公式、法则、定理的发现过程，以及数学问题的结论和解法。具有较为直接和明显的特点，目的是培养学生的探索思维的能力。猜想的方法可归纳为三条。

（1）观察——猜想　“观察”就是察看，它是认识事物，认识世界的基本途径之一。是发现问题和解决问题的前提。事实上，人类总是不断地观察周围世界，从中找出特点，发现规律，边看边想，不断地提出猜想。数学科学中，通常是通过对事物的量或形的观察，提出数学模型的猜想。而在数学教学中则更多的是对命题的条件的观察，通过联想，提出结论或论断的猜想，或者是对条件与结论的观察提出解决问题的方案或方法的猜想。

（2）归纳——猜想　归纳作为一种研究方法，常为提出论断的猜想提供基础和依据，即从研究各个个别对象的特征、属性，从而猜测整个对象集所具有的性质。归纳作为一种推理方法，常为命题的论证提供猜想的基础，即从一个或几个单称或特称判断的论证猜出对全称判断的论证。

（3）类比——猜想　由于事物之间常具有相同的或相似的属性，因此相似的对象在某个方面彼此一致时，可以由其中一类事物的已知属性去猜测另一类事物也具有相同的或相似的属性。数学教学中，常可以由于命题条件的相似去猜结论的相似；或是由命题形式的相似，去猜论证推理方法的相似。类比—猜想，要以数学基础知识和基本技能为基础，丰富而又广

泛的联想为条件，并善于将贮存在头脑中的信息转化为可供类比的信息。

数学教学应该教学生猜想，为学生提供猜想的机会。但是，必须把猜想与事实严格区别开来，在教学生猜想的同时，要引导学生去论证自己的猜想，猜想仅仅是探索而不是论证。

数学教学过程实质　数学教学过程主要是在教师指导下，遵循教育原则，按着数学教学大纲的规定要求，使学生认识科学数学知识的发生、发展及其结论和应用的过程。这个过程符合人类认识过程的普遍规律，辩证唯物主义认识论认为，人类认识过程的普遍规律是：数学源于实际，而应用于实际，社会实践是认识的源泉和目的，人类认识是主体对客观世界能动的反映，是由感性认识能动的向理性认识逐步上升和转化的过程；认识反过来又能动地指导和推动实践发展，实践和认识是相互作用，循环上升的过程。教学过程是学生认识客观世界的特殊形式，其主要特点是：

（1）学生认识的对象主要是书本知识、间接经验，是人类已知的认识成果。

（2）学生的认识是在教师指导，有目的、有计划地进行的。

（3）学生掌握知识技能、发展智力、培养能力与发展认识能力是统一的。

（4）传授知识技能、发展智力、培养能力与进行思想品德教育是统一的。

教学过程不单纯是一个认识过程，同时也是一个在认识基础上影响学生个性发展的过程。

数学教学板书设计　数学课板书是课堂教学中经常采用的一种教学手段，它在一定程度上反映出教师领会、把握教材内容的水平和能力，也能反映出教师的教学思路及处理教材的方法和意图。恰当而合理的板书，不仅有助于教师的“教”，而且也有助于学生的“学”。因此，要求教师在备课时悉心思索、精心设计出有鲜明的针对性、严密的科学性和清晰的条理性的板书，反对那种随心所欲、杂乱无章的板书。这对于数学教学尤为重要。板书设计要注意鲜明、概括、简炼、醒目。鲜明，就是针对性强，中心、重点突出。概括，就是言简意赅，提纲挈领。简炼，就是简明精炼，要言不繁。醒目，就是一目了然，易懂易记。整个板书要“月明星稀”，不要“繁星满天”。由于教学内容不同，板书也不可能有统一固定的样式。数学板书的样式很多，有提纲式、表格式、图解式、归纳式、对照式等等。不论采用什么形式，都要注意正确把握教材内容，准确地拟定教学的重点和难点。在此基础上，确定板书形式，板书形式确定后，还应注意讲究文字的和数学符号的运用。科学地书写和运用符号，既可以代替不少文字，又可以明确醒目，有利于培养学生的数学意识，发展学生的逻辑思维能力。一堂课的板书要根据教材内容、教学要求和学生实际情况来设计。设计出来的板书，总是既能揭示教学内容（包括图形放置）、内容依据，推理过程、推理结果，又能具体展示出所教内容的应用范围，明了清晰的表述在黑板上。这样的板书就能

为引导学生用准确的语言进行概括提供了有利条件。一位有丰富经验的教师的板书，总是他教学全过程的重要缩影，给学生以美的享受。

数学教学组织形式 数学教学活动的结构，即关于数学教学活动怎样组织、教学的时间和空间怎样有效地加以控制和利用。数学教学组织形式是一般教学组织形式在数学学科教学的运用、体现，反映着数学学科的特点。关于教学组织形式在教学的理论和实践上历来都是一个重要问题。

教学组织形式是发展变化的。而反映数学学科特点的数学教学组织形式也是发展变化的。其主要原因是：①社会经济、科学文化发展的需要和可能。由于生产力发展水平不同，对劳动力数量与质量的要求就不相同，所以就产生了与其相适应的教学组织形式。如自学辅导、自学讨论等数学教学活动结构形式，便是适应今天科技飞速发展，具有创造能力的人才，而产生的一种教学组织形式。②教学基本任务的要求。教学组织形式是为教学任务服务的。数学教学组织形式也是如此。由于不同时代，教学要完成的基本任务及其着重点也就不同，所以教学组织形式必然要变化、发展。③教学手段的发展。教学组织形式与教学手段是密切相关的。数学教学手段的发展变化也必然影响数学教学的组织形式。特别是现代化教学手段的出现与发展，引起了教学组织形式的新变化、广发展。

数学解题策略原则 解题策略是指为实现解题目标而确定的行动方针、方式和方法。策略的制定有其规律性，这个规律性表现为策略原则。数学解题的策略原则通常认为表现为五个方面，即熟悉化原则，简单化原则，具体化原则，和谐化原则，逆向思维原则。熟悉化原则要求策略有利于问题转化为与之有关的熟悉问题。简单化原则是指策略应有利于把较复杂的问题转化为较简单的形式，使问题易于解决；具体化原则要求策略能使问题中的各种概念以及概念之间的关系具体明显，有利于把一般原理、一般规律应用到问题中去。和谐化原则强调策略利用数和形内部固有的和谐统一的特点，建立各种必要的联系，有利于促使问题的转化和解决。逆向思维原则是指在解题思维过程中有意去做与习惯性的思维方向完全相反的探索。例如，顺推不行时考虑逆推，直接解决不行时考虑间接解决，探讨可能性发生困难时考虑不可能性的探讨……。这五个方面是互相联系的，相辅相成的。其中，熟悉化原则是最基本的。策略原则对制定解题策略有指导意义，当然能不能制定出一个有效的策略还取决于其他方面的因素。例如，观察、逻辑、知识、经验等等。

数学运算技能的形成 数学运算技能是一种智力技能。它是培养运算能力的基础。它是学生在掌握和运用公式、法则、定律的基础上，通过多次合理而科学地练习形成的。运算技能形成的主要标志是正确、迅速、灵活、合理，运算正确是运算技能形成的重要指标。在初期阶段，保证运算的正确是靠明确意识到法则，清楚意识到算理，运用合理的方法进行计算。运算技能在保证运算无误的前提

下，要有较快的运算速度。正确是前提，速度是要求。因此，熟练掌握运算法则，自觉而有意识的缩减运算过程中的中间环节，简缩思维步骤，省略运算过程中的某些思考法则，定律的中间环节，达到一感知算式就可顺理成章的得出结论，形成自动化的程度。运算灵活、合理，是指易于联想有关知识，结合有关法则、定律科学合理的灵活应用。如计算$1+2+\cdots+100=?$就需要应用学过的有关知识，将运算法则和运算律结合起来，得到下述几种运算方法：①按原式逐个相加求和。这是加法法则的应用。②将原式求和视作等差数列求前100项的和，$a_1=1$，$a_{100}=100$，$d=1$，$n=100$，求$s_{100}=?$于是$s_{100}=\frac{(1+100)\times 100}{2}=101\times 50=5050$。③利用加法结合律及乘法法则，即得到原式$=(1+100)+(99+2)+(98+3)+\cdots+(50+51)=101\times 50=5050$。

显然后两种方法较第一种算法简捷的多。正确处理法则、公式的普遍性与具体题目的特殊性之间的关系，正确处理一道题与这道题的每一步运算之间的关系，才能使运算既正确又迅速、合理、灵活。学生运算技能的形成大体需经过模仿、熟练和创造三个相连续的阶段。上述问题的三种解法，第一种方法可以说是加法的模仿；第二种方法可以说熟练的反映；第三种方法可以说具有一定的创造性。运算技能达到熟练程度的关键，并不完全取决于重复活动的次数，更重要的在于科学、正确地组织练习的质量。

数学学习的认识过程　学习数学的过程，是有特定目的、有组织的一种认识活动。这种认识活动在教学论中叫做学习的认识过程。所谓学习的认识过程，就是把外部知识转化为学生内部心理的精神财富的过程，这个转化过程简称为“内化”过程。构成学习认识过程的主要因素是内部智力活动。学生获取知识，不是原物轻取，而是将原材料进行智力加工。学生的好奇心和求知欲是智力活动的原动力，它支配着学生全部学习的认识过程。把原材料整理加工成知识核心是抽象的逻辑思维活动。这种智力加工的程序是：知觉——表象和想象——抽象逻辑思维——记忆活动。语言是思维的工具，也是学习认识过程中内部智力活动的工具。学生掌握知识，必须通过语言，其中包括数学的语言。学生掌握语言本身，是由外部向内部转化的过程，即“内化过程”，同时又有内部向外部表达的过程。知识的内化过程，不能脱离语言自身的内化过程。要切实有效地发挥语言在实现知识内化中的作用，有两个条件：①数学教学语言要紧密配合学生的观察活动和操作活动，尤其要与内部智力活动结合起来。在这种结合中，既要有教师语言的讲解作用，更要针对学生的活动来发挥指导和训练作用。②使教学方法合理化，多样化，达到课堂教学优化。

教学学习认识活动，是一种极复杂多变的过程，它与多种因素相互关联着。它的一般规律是：①由形象思维向逻辑思维转化。两者也互相转化。

②由已知（数学概念、原理等）向新知转化。两者也互相转化。③由实践向认识转化，由认识向实践转化。④由思维向记忆转化。两者也互相转化。

所谓教学生掌握学懂、学会和会学，其本质就是根据教学目的、教学任务和特定内容，运用教学方法，创设各种条件，促进这四个方面的互相转化，而核心是内化，即促进已知向新知不断转化。

数学教育中的正迁移 迁移就是指一种学习对另一种学习的影响。这种影响有正有负。数学教育中的正迁移，是说学生学习的数学知识、技能和能力既有利于今后的学习，也有利于已往的学习。如何促进这种正迁移是广大教育工作者所共同关心的问题。一般认为：①迁移决定于已学的内容和将要学的内容之间的相同要素，相同要素越多，迁移越大。因此，突出两种学习情境的相同要素，会促使学生产生正迁移。②学生已有知识经验的概括水平是影响迁移的重要因素。只要一个人对他的经验进行了概括，那么从一个情境到另一个情境的迁移是可以完成的。因此，培养学生的概括能力，养成概括的习惯，是促进正迁移的有利途径。每章，每一单元，每一节课学完后都要引导学生概括，做一次练习，甚至解完一道题也要引导学生概括。③学生越是能觉察事物之间的关系，概括化的可能性也就越大，迁移越大。因此，引导学生发现知识和知识之间、问题和问题之间的关系和联系是获得迁移的重要手段。④学生所学到的知识越是基本，就越能不断地扩大和加深知识，它对新问题的适用性也就越宽广。因此，领会基本的原理和观念，是通向适当的“训练迁移”的大道。⑤学生的心理状态，如学生的信心，紧张程度等等，都会对迁移发生影响，特别是学生应用知识的准备状态——即思维定势。要帮助学生形成有利的和消除不利的准备状态，以促进迁移的产生。⑥指导学生自己发现问题的解答能增加正迁移。有指导的练习比单纯练习迁移的效果要好。在练习时，题目的编排同一与变化相结合效果较好。⑦教学生学会学习。

数学公式的理解与运用 数学中的公式、定律、运算法则等都是客观事物中数量关系的抽象概括。它们有其严密的系统结构。学生理解数学公式、定律、法则是在已有知识同新知识产生矛盾，并相互作用的过程中，通过比较、分析、综合、演绎、归纳、判断、推理等思维方法，解决新旧知识之间的矛盾而进行的。学生原有知识、有关情境、资料以及它们的实际操作等是理解公式、定律、法则的基础，而理解的过程必须有相应的问题引起学生的思考。学生理解数学公式、定律、法则要通过外部的开展逐步过渡到内部的压缩过程。对公式、定律、法则推导过程的分析，是实现这个过程的关键。只有这样，才能真正达到理解，也才能用准确、简明的语言来表述，最终达到运用。学生对公式、定律、法则的理解与运用是相互作用、互相促进的。只有理解了才能灵活运用、提高运算技能，并促进思维和语言的发展，也只有通过运用

才能进一步加深理解。

数学问题解决中的审题 弄清题意，搞清题目中所给予的条件与问题，明确题目的要求。或者说，了解课题中的条件与任务，了解课题的基本结构，在头脑中建立起课题的映象。审题的意义可以从下面的一句格言看出，即，“问题想得透彻，意味着问题解决了一半。”审题是通过一系列智力活动来实现的，因此，在审题时就有一个如何组织自己的智力活动，采取什么样的方式进行的问题，这是在学生应用知识时必须掌握的一种智力技能。专家建议对于解题者来说，最好按下面的程序进行。

（1）开始研究题的条件时，你应当仔细作出直观的图形、平面图、表格或者说明问题的草图，以帮助你思考问题。记住：将题的条件正确地用图形表示出来，意味着你对题的整个情境有了清晰的明确的和具体的理解。

（2）清晰地理解题的情境中的各个元素，一定要弄清楚其中哪些元素是给定了的，即已知的，哪些是所求的，即未知的。

（3）深入地思考题目叙述中的每一个词（每一个符号、术语）的意义，尽力找出题的重要元素，在图上用直观的符号标出已知元素和未知元素。试试能否在图上或草图上改变题中各元素的位置（这样有可能发现题中很重要的内容）。

（4）尽可能从整体上理解题的条件，找出它的特点。想想以前是否遇到过和这个题有某些类似的题目。

（5）仔细想想题的叙述是否可以作不同的理解，题的条件中有没有多余的互相矛盾的东西，是否还缺少什么条件。

（6）认真研究题目提出的目标。根据题目所提出的目标，找出哪些理论的法则同整个题目或者它的某些元素有联系。

（7）如果在解题时有可能使用你熟悉的某种一般的数学方法（列方程、作几何变换、坐标法或复数方法），尽可能用那种方法的语言表示题的元素（列出方程、用坐标或复数的形式表示已知关系和所求的关系，等等）。

（8）你能不能重新叙述这个问题，简约地或扩展地？你能不能用不同的方法重新叙述它？

数学问题解决中的检验 解题过程的重要环节。对题目答案合理性、正确性的检查与验算。事实上，重演一遍或重看一遍的方法并不完全奏效，因此，把一些检验方法适当教给学生是有益的。常见方法如下。

（1）量纲检验 适用于具有明显几何意义或物理意义的解题结果。其依据是：一个和的各项必须具有相同的量纲，并且该量纲也必须是和的量纲；乘积的量纲必须是各因子量纲之积。例如，若a，b，c是三角形的边长，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)s$是三角形的面积，利用量纲检验，立刻判断$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$是错误的。

（2）估计检验 即利用日常生活或数学学习中积累起来的经验，判断答案的合理性，例如两点间的距

离必是非负数，对于距离是负值的答案判错。

（3）条件检验　即全面检查题目的已知条件是否被充分利用，题解的各个环节与已知条件是否矛盾。如果题设中某一条件未被用上，那么整个解答在通常情况下是错误的或不完整的，当然也可能题目本身就有条件过剩的情况。

（4）推理检验　这是一种细节性的检查，检查每一步的推理依据是杜撰的还是已被证明过的？概念的运用是否正确？使用的公式、法则和定理应在什么前提下成立，这些条件是否具备？检查中只要有一步是错的，那么整个解答就是错误的。

（5）特例检验　即用适合题意的某些特殊数值，来确定答案是否错误。如果对于所取的特殊值，所得的结果不能成立，即可断定题解有误。例如，对一个排列组合应用题答案的检验，可把题中的数据适当降小，考虑一个结构与原题相同的特殊数值问题，从而对原题是否错误作出判断。

（6）取值范围检验　这是针对方程变形，曲线方程互化，变量代换一类问题的解答所作的检验。重点检查在变换过程中变量的取值范围是否改变，互化的方程所表示的点集是否完全相同。

（7）数形互检　即利用数形的结合来相互印证判断答案是否合理。

（8）逆向检验　这是最常用的一种方法，即将所求的答案，回代到原来的问题中去进行验证，以判断解答的正误。

（9）多解检验　即用不同的方法解答同一个问题，然后对答案作出比较。

数学问题解决中的联想　联想是指由一事物想到另一事物的心理过程。它是知识应用的必要环节。任何问题的解决，都需要在审题的基础上通过联想，使头脑中学得的知识复活起来，然后依据这种知识去辩认当前问题的性质特征，把它纳入相应的知识系统中去，使课题归类。只有这样，才能产生对课题性质的理解，进一步找到解决这个课题的途径或方法。解题中的联想活动，可按照下列的建议进行：

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

如果你不能从正面解决它，能不能从反面解决它？

你是否利用了所有的数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

专家建议，解题之后，还应引导学生作如下考虑：解这道题用了哪些知识？用了什么方法和技巧？当初不会做的原因是什么？解出这道题最关

键的一步在哪里？是如何完成这一步的？本题的方法以前见过吗？在解决什么问题时见过？能否加以推广到解决其他类型的问题？题目中条件都是必要的吗？去掉一个将发生什么情况？还有没有其他解法？本题的结论能否推广到一般？你能否再编一道类似的题目，能否解出来？

数学问题解决中的模仿　模仿是一种观察学习的过程。看到别人的样子，自觉或不自觉地进行仿效，做出同样或类似的动作、行为。模仿是学习的捷径。人们通过自己发现、创造的过程来掌握现成的技能，一般来说是比较难的，也是很费时间和精力的，因此人们学习技能特别是各种基本技能一般都是通过模仿来进行的。在数学解题教学中，模仿的意义，可以用下面波利亚的一段话说明：

“解题，就好像游泳一样，是一种实际技能。当你学习游泳时，你模仿其他人的手足动作使头部保持在水面上并最后通过实践（实地练习游泳）来学会游泳。当试图解题时，你也必须观察并模仿其他人在解题时的所作所为，并且最后通过实践来学会解题。”

波利亚还说：“希望提高学生解题能力的教师，必须培养学生的兴趣，然后给他们提供大量的机会去模仿与实践。”

解题中模仿大致可分三种水平：一种是简单模仿，也称为机械模仿，思维水平最低。第二种是实质性模仿，亦称方法性模仿。第三种是创造性模仿，也就是说这里并不只是借鉴，而是有所创造和发展。逐步提高学生的模仿水平是培养解题能力的重要途径。

学生模仿的对象，主要来自于公式的推导、定理的证明、例题的解答。研究表明，教师在教学中向学生展示解决上述问题的思维过程是十分必要的，这种思维过程应该是全面的真实的，并不总是一猜就中，一选就准，一证就对，一用就灵。

数学论证中的虚假论据　虚假论据亦称虚假理由，即以虚假的判断或错误观点作为论据的逻辑错误是学生数学作业中的基本错误，也是诡辩的一种主要手法。例如

“对于所有的实数 a 和 b，都有 $a+b=b+a$。”

“证明：假设这个结论不成立，那么对于所有的实数a，b，有$a+b\neq b+a$。代入$b=a$，得到$a+a\neq a+a$，这是矛盾的。因此，假设不成立，即结论$a+b=b+a$是正确的。”

这里的错误就在于“假设这个结论不成立，那么对于所有实数a，b，有 $a+b\neq b+a$”是一个虚假的判断。

“如果直线 a 垂直于平面 α上的某一条直线 b，那么它也垂直于平面 α。”

“证明：假设直线 a 不垂直于平面 α，那么由直线与平面垂直的定义可以得出，直线 a 不垂直于平面α 上的任何一条直线，其中包括直线 b，这与已知条件矛盾。命题得到证明。”

这里也犯有虚假论据的错误。

学生作业中的这类错误，多半是由于对基本概念、定理、法则掌握不

准确或由负迁移造成，另外一种原因就是形式逻辑的错误，对于后者不从逻辑成分上分析，是很难纠正的。

数学论证中的偷换论题　偷换论题是违反论证规则的一种逻辑错误。在论证中，把原来需要论证的那个判断有意或无意地换成另一个判断，就是偷换论题。根据同一律的要求，在同一论证过程中，论题应始终保持同一，如果暗中变换了论题，就不能使原来提出的论题得到逻辑证明。这些错误常见于学生作业或诡辩当中。例如，“$5\leqslant7$是不是真命题？”答：“$5<7$是真的，而$5\leqslant7$是假的，因为$5\neq7$。”这实际上是把判断$5\leqslant7$换成了$5<7$且$5=7$。偷换论题的常见形式是证明过少和证明过多。前者是在证明中把原来的论题换成另一个断定较少的判断，后者则是把原来的论题换成另一个断定较多的论题。

数学论证中的偷换概念　偷换概念是违反同一律的一种逻辑错误。在数学教学中，有时作为学生作业中的错误出现，也有时作为诡辩出现。这种错误的原因是这样的：在一个理论系统中，在同一条件下，必须保持概念内容不变，原来在什么意义上使用某个概念，就必须一直按照这个意义使用这一概念，决不能随意变换一个概念的含义，也不能把不同的概念加以混淆。偷换概念这种错误的产生就是在一个理论系统中，有意无意地用一概念，代替另一不同的概念，造成了混乱。例如，有的书上讲“求证三角形的三高共点”，并证得了“三角形的三条高交于一点”，那么，书上是怎样证得“三高都交于一点”这个并不总成立的结论呢？其原因就是在证明过程中把“高”偷换成了“垂线”。或说混淆了“高”与“垂线”的概念。

数学论证中的循环论证　循环论证是指在论证过程中，论据的真实性需依赖于论题的真实性来证明的一种逻辑错误。数学教学中见到的循环论证大致可分为三种类型：第一类是在论证时，直接地明显地或间接地隐蔽地以待证的论题作为论据来论证；第二类是在论证时，以待证论题的等价命题作为论据，这两个等价命题只是表述形式各异，而在论证各自的真实性时又互相作为依据；第三类是论证时，所引用的论据中有不是在论证的论题以前，其真实性已被证明的判断，而是在论证的论题得证后，它才可以证明的判断。一个典型的例子是利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$去证勾股定理，在现行教材系统中就是循环论证。预防循环论证的措施：一是介绍形式逻辑的常识；二是加强数学命题四种形式的涵义和相互关系的教学。

数学教学中的比较方法　比较法是把两个或两类事物相比较，从而确定它们的相同点和不同点的逻辑方法。在数学教学中它是一种必要的逻辑手段。其应用大致有四种形式。

（1）相对概念的比较　例如，加与减、正与负、乘与除、等与不等、指数与对数、函数与反函数等等。把它们成对的出现在学生面前，使学生用统一的观点认识它们的相同点、不同点。这将有利于学生较快的掌握知识，形成良好的认知结构。同

时还有助于学生逆向思维能力的发展，因为相对概念的比较为认识可逆性提供了机会。

（2）同类事物的比较　同类事物是指这类对象具有相同的数学结构或某种数学关系，这种比较常用于概念的形成或认识某类事物的规律。通过比较，区分对象的一般与特殊以及本质与非本质要素，从中找出一类事物所共有的本质因素。

（3）相似、相近或相关事物的比较　例如，加减的运算符号与数的性质符号，函数式与方程式、函数的极大值和最大值等等，比较时将这些易混淆的概念同时展现在学生面前，异中求同，同中求异，认识其区别与联系，分清其有关特征与无关特征，加深概念的理解和掌握。

（4）新旧知识的比较　即把新旧知识联系在一起，结合着旧知识学习新知识，并确定新旧知识的联系和区别。这种比较对于学生消除旧知识的负迁移，顺利完成新知识的教学；对于学生巩固旧知识，突出新知识的特点，使新旧知识在头脑中清晰地联系起来起着积极的作用，不仅如此，新旧知识的比较还可以促进知识和方法的正迁移，大大简化相似的问题的研究。

使用比较法时，必须注意下列关于比较的原则：①彼此之间具有确定的联系的对象才能进行比较，即比较应当有意义。②要以有实践意义的本质属性来进行比较。而不能根据事物的某些偶然的或次要的属性来进行比较。③比较应当按一定的步骤进行，即要求准确地区分进行比较的性质。对于数学对象同一种性质所作的比较应当是完整的彻底的。苏联乌申斯基认为，“在教学论中，比较应当是一种基本方法”。

数学教育中的问题解决　问题解决在教育心理学中，通常是指人们在社会实践和理论学习中，面临新情境、新课题，而这些新情境与新课题用已有的知识经验不能直接解决，并且自己又没有现成对策、答案或解决方法时，所引起的寻求处理问题的一种心理活动。它是一种高层次的学习活动。在中学数学教育中，问题解决，就其智力活动来说，一般包含审题、联想、与课题类化三个彼此相联而又有相对独立意义的基本环节。著名数学教育家波利亚在他的名著《怎样解题》把数学问题解决的过程分为四个步骤，即弄清问题，拟定解题计划，实现解题计划，回顾（包括验算答案），提倡利用探索方法寻找问题的解法。苏联心理学家克鲁捷茨基认为解一道数学题有三个基本的心理活动阶段：收集解题所需要的信息，对信息进行加工从而得出解法，以及保持这个解法的信息，也就是将解题的结果和推论保存在记忆中。其中每一阶段都有一种或几种数学能力与之相应。总之，数学问题解决的过程，是将先前已获得的知识用于新的不熟悉的情境的过程。它并不仅仅是简单地机械地直接地运用已知的信息（已知条件、定义、定理），而是要对信息加工处理，从认识问题的基本元素与内部关系开始，重新组合已知概念、定理，调节题目中基本元素的关系，探索解题途径，发现有效的解法。其

中要涉及到解决问题的方法，程序、策略和猜想。因此，问题解决在数学教育中至少有三个方面的功能。一是巩固和加深理解所学数学知识，熟练掌握数学基本技能。二是培养学生辩证唯物主义的世界观、求知欲望、独立学习的能力，以及刻苦学习的习惯和良好的个性品质。三是发展功能，即发展学生的思维和掌握智力活动的有效手段。包括掌握科学认识的方法（实验、观察、比较、分析与综合、概括与特殊化、抽象与具体）；进行归纳推理与演绎推理（包括正确地运用类比和直觉）；正确进行思维和实际的检验，即提出假设并验证假设；使实际问题实现最简单的模型化并利用已有的模型来研究事物的性质；抓住实质；对研究对象进行分类，把已有知识系统化，确定知识之间的因果关系和结构关系；从具体条件出发为达到预定目的而选择方式方法；思维的自我监控；找出所学内容与周围生活、人们的实际活动的联系，并评价所学材料的实际价值；提高逻辑素养和科学思维的素质：灵活性（非呆板性）、独创性、深刻性、目的性、合理性、概括性、主动性、批判性、思维的论证性、记忆的条理性、语言文字的简明性；如此等等。

数学教育中的思维定势 思维定势是指人们倾向于按照习惯了的固定了的思路去考虑和解决问题的一种心理准备状态。它有积极的一面，能使学生在学习与旧知识类似的新知识时，得到较快地理解和掌握，使解决问题趋向于自动化，迅速定向，给出答案。也有消极的一面，学生碰到新问题时往往因袭旧法，使思维受到局限，僵化而缺乏灵活性与广阔性，发现不了新方法。因此，如何发挥其积极的一面，又要克服其消极的一面，成了广大教育工作者所共同关心的问题。一般认为：

（1）在学习新知识，解决新问题之前，教师可通过温习旧知，启发联想，适当建议和暗示，促使学生已有知识同当前的问题相联系，发挥思维定势的积极作用。

（2）学生对已有知识、经验概括水平越高，就越能较好地理解和处理新问题，就越能有效地克服思维定势的消极影响。

（3）讲清楚知识发生的背景，过程，新旧知识的联系和质的区别，无论对发挥思维定势的积极作用还是克服其消极作用都是有益的。

（4）引导学生运用探索法寻找解题方法，制定解题方案，是发展学生思维能力，克服思维定势消极影响的有利途径。

（5）教育实践表明：新旧概念交替时，旧概念的定势，往往顽固的起着干扰作用。一种方法的反复应用往往形成方法上的定势，而掩盖其他方法的运用。标准形象的反复感知、理解和运用，往往形成形象上的定势，而掩盖非标准形象的认别和运用。

数学教育中的类比方法 类比法亦称类比推理。即根据两个或两类事物在某些属性上的相同，进而推出它们在其他属性上也相同。或者说是把对象（或对象的集合）关于一些性质的类似性扩充到其他性质。由类比法得到

的结论是似真的，而不是可靠的，具有假说、猜测的性质。数学中的各种具体内容和形式之间存在着类似和相近的现象，包括数学图形与式子的类似，数学关系和结构的类似，数学规律和方法的类似，数学命题的类似。正是由于这种类似性的存在，使得类比法成了数学教学的重要逻辑手段。在教学中，利用它可以比较容易地把一定的知识和技能的系统从已知对象转移到未知的对象上去，利用它可以通过已经认识的数学模式，对新的数学对象提出猜想，发现新知识。在求解所提出的问题的过程中，经常可以利用一个较简单的类比问题的解答。可能是利用它的方法或者可能利用它的结果，或者是二者同时利用，找到现有问题的解法。在教学中，应注意防止那种“有害的”的类比。例如，学生往往把平面几何中的一些结论，错误地搬到立体几何中。

数学教育中的“潜在假设” “潜在假设”是指还不曾讨论什么事情时，头脑里总是认为正确的那个最简单或最有可能的模型。例如，在条件 $x/y+z=y/x+z=z/x+y$ 下，计算 $x/y+z$ 的值。解答 $x/y+z=x+y+z/(x+y)+(x+z)+(x+y)$ $=\frac{1}{2}$就是带着潜在假设$x+y+z\neq 0$给出的。潜在假设不是由于粗心大意造成的，而是对某些事物尚未建立起清晰概念时自动形成的。它是产生负迁移的主要原因。

潜在假设，一般地可以归结为两大类：一是直观的，表现为学生把图形的直观性误认为逻辑性，当两者不相容时，错误便明显地暴露出来，当两者相容时，错误便会由于答案的一致性而被掩盖起来；二是逻辑的，学生常常把代数的逻辑关系误认为自己习惯的逻辑关系，当两者不相容时，错误便明确的暴露出来，反之，错误会被“一致性”所掩盖。

产生潜在假设的原因很多。特别是当两个相似的材料发生联系时，对已知材料的经验和定势就会对新材料产生潜在假设，尤其是在学生对新材料的属性尚未认识清楚时，就会按照表面现象走“思维捷径”。几何教学中，常常运用习惯了的图形，见不到变式，也是产生潜在假设的原因。此外，还有教师语言的因素。

克服潜在假设，一方面是从正面引导，对比相似材料，培养分化能力。提倡具体问题具体分析，不要“想当然”。另一方面是从反面启发，经常对一些典型的错例或作出分析或展开讨论。

数学教学中的审美教育 审美教育亦称美育。是以一定的审美观进行感受美、鉴赏美和创造美的教育。数学教学中的审美教育是结合教材内容从不同层次上进行的。第一个层次，是充分利用数学内容中典型美、显性美的因素，例如，精美的图形、有趣的数字关系、和谐统一的简洁式子、比例结构的匀称协调、命题或定理间的关联相似或对称、奇异等等，唤起美的意识、获得美的体验、形成数学美感。第二个层次，揭示数学美的内涵，加深数学美的理解，提高数学审美观点。一般认为数学美的内容主要有五个方面，即简单性、对称性、相

似性、和谐性与奇异性。这五个方面的内涵都可以通过具体的教学内容揭示出来。第三个层次，运用数学美的思想方法，指导解题。事实上，美感可以成为学生的内部诱因。美的观点一旦与数学问题的条件与结论的特征结合，思维主体就能凭借审美直觉，确定解题的总体思路或入手方向。美的启示能起宏观指导的决策作用。

数学教学过程基本矛盾　社会向学生提出的教学要求同学生现有知识、能力发展水平之间的矛盾，是数学教学过程的基本矛盾，它是数学教学过程发展的动力。人类在长期的生活和生产实践活动中，积累了丰富的知识经验。人类社会要存在，并且要持续不断地发展前进，就要求每一新生的一代，必须掌握这些人类的知识成果。于是就向数学教学提出了要求。由于新生的一代，受着主观和客观条件的限制，其知识经验和认识能力发展水平是有一定限度的，所以两者之间就形成了矛盾。这一矛盾贯穿着整个数学教学过程的始末，正是这一矛盾的不断发生和解决，推动着数学教学过程的不断发展。这一基本矛盾的具体表现主要是:

（1）教学的客观要求和学生已有知识经验之间的矛盾。例如，1981年4月17日，教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》、《全日制五年制中学教学计划试行草案的修订意见》的通知，就是解决这一矛盾的措施之一。又如，由于学生的志趣不同，毕业后，参加各种生产劳动和继续学习各种专业对数学的需要不同，以及我国幅员广大，各地、各校教学水平不一，中学数学教学内容应有一定的灵活性。因此，教育部颁布的中学教学计划的安排，高中数学教学内容分为三种不同的类型，三年的周课时，第一类型为５、５、５，第二类型为５、３、３，第三类型为５、６、６。这种安排也是解决这一矛盾的措施。

（２）数学教学要求的思想结构和学生现有思维发展水平之间的矛盾。如关于数的绝对值的定义是在有理数基础上讲授的，这是教学要求的思想结构在知识方面的反映。按常理说，学习了数的绝对值的定义，学生应能解答 $|a|=?$，但是事与愿违，学生至初中三年级对于 $|a|=?$ 此类问题才能较清晰地解答。这事实说明了，学生只有知识基础，而没有经过思维训练，思维层次达不到应有高度，是不能掌握所学知识的。这就是这一矛盾的反映。

（３）科学的体系和学科的结构之间的矛盾等。

数学教学过程基本要素　数学教学是教师的教和学生的学的活动过程。因此，教师和学生是构成教学过程的两个最基本的要素，缺一则不可能构成教学过程。教师的教是有目的、有计划、有要求的系统进行的，学生的学是积极主动的，两者均不可随心所欲。除此，构成数学教学过程的另一个重要因素就是教学内容。有教学内容，教与学活动才能展开，教学活动才有意义，才能实现教学大纲所规定的教学要求，达到予期目的。为此，教学内容必须具有科学性、思想性、智力价值和可传递性等。数学教学过

程是讲求实效的，这就要求提供一定的条件，包括图书、仪器等物质条件，再加上精神方面的条件，就构成了数学教学过程的教师、学生、教学内容和教学条件等基本要素，彼此联系，相互影响，相互制约，形成了错综复杂的关系。要大面积提高教学质量，必须正确分析、认识和妥善处理这些关系。

数学教学的已知与新知　数学知识的相互联系性和应用的广泛性，使学生在学习中形成各种联想的依据。教学中，学生学习数学知识，就是从已熟知的事物中利用已有知识来理解新知识的。已有知识是学生掌握数学知识的内因，即基础。教师教学艺术就在于发挥教材优势，掌握教材的内在联系，利用学生新旧知识间的联系和距离，恰当地提出问题，引导学生积极思维，使学生将新旧知识联系起来，形成自我数学知识的结构，这不仅可巩固已有的知识，而且也理解、掌握了新知识，有力地培养了学生利用已有知识扩大新知识的能力，达到举一反三的目的。

由已知知识到新知识的掌握，是一种发展转化的过程。在这一过程中，教师一要积极引导，二要善于培养学生独立思考能力（推理能力），只有学生通过自己的重新独立思考，才能把已知同新知沟通起来，真正把新知纳入已知的系统中，使两者间建立起必然的逻辑联系。只有这样，学生才可能再利用已知去获取新知，使其成为继续思考的依据。学生独立思考能力越强，获取新知识就越灵活、越多。学生获取新知识越多、越灵活，就会有更多的独立思考的自由度。二者是相辅相成的。

数学教学的具体与抽象　学生具有抽象的逻辑思维能力是掌握数学知识高度抽象性和逻辑严密性的前提。没有抽象概括就没有数学，没有有抽象概括能力也就学不好数学。但是，中小学生思维特点，主要是由具体形象思维到抽象逻辑思维过渡，在这个过渡中常常需要感性材料的支持。在小学和中学低年级学生的具体形象思维更占主要地位。因此，中小学学生学习数学的重要途径，是他自己从具体材料中掌握抽象，由外部的感知活动内化为内部的思维活动，并用语言促进思维确定结论，然后巩固和应用，所以在数学教学中要引导学生进行具体的探索活动，获得多种感性知识，建立鲜明的表象，丰富学生的想象力，发展学生的形象思维。在数学教学中、学生的形象思维对学习数学是十分必要的，是他们理解事物、理解数学抽象关系的基础。因此，教师教学的艺术就在于引导学生通过多种感知，逐步建立能够突出本质属性的典型表象。因为这种表象是由形象思维活动向抽象思维活动转化的过渡形态，是建立抽象概念、培养抽象概括能力的基础。数学的抽象具有操作性质，最初的来源是十分具体的事物和行动。学生掌握数学这种抽象符号的思维过程本身，也象用手操作的“抽出来”（动作）一样，在“抽出某些东西的同时必然要“抛弃”某些东西，抽出来的是本质属性，抛弃的是非本质属性，在这个过程中必须注意发挥语言的促进作用。“操作”和语言结合的

过程就是抽象概括的过程。而语言是引导由形象思维向抽象思维转化的决定性条件。语言有形象化语言和抽象的逻辑语言两种，教师在教学中交替运用这两种语言的同时，还应善于从学生所反映的实际情况或现象中及时提出问题进行对话或组织讨论，引导学生思考，从而概括出确切的结论。例如，教学立体几何“多面体中的棱柱概念”时，可以放置一些是棱柱的和不是棱柱的多面体模型让学生观察，从中发现具有“两个面相互平行,而其余各面的交线互相平行”这一本质属性的多面体便是棱柱。不论是大棱柱，还是小棱柱；不论是三棱柱，还是几棱柱，都有这种本质属性，而其它的多面体便没有这种属性，没有这种属性的便不是棱柱。这种从众多模型中，感知棱柱属性，并给出确切定义的过程，便是“抽出”棱柱本质属性，“抛弃”非本质属性——大小，棱数等，实现了由形象思维向抽象概括的逻辑思维的转化。在这个转化过程中，教师可以引导发现，及时提出问题，进行谈话，组织讨论，指导思考，从而概括出“棱柱”的确切定义。

数学教学法的学科性质　数学教学法是发展中的边缘学科。其作用是使未来的数学教师，理解学校的数学教学与现代数学、教育学、心理学、逻辑学、哲学之间的关系，从而创造性地处理数学教学问题。

解决数学教学内容和方法问题，必须要使数学教学法与数学相结合。因为数学要给教学法加工数学材料、数学教学法要充分分析教学活动。

探讨数学教学的理论问题，数学教学法要与教育学中的教学论和教育论相结合。因为数学教学方法是由教育学中的一般教学方法和反映数学本身的特殊教学方法所组成，前者保证在教学中实现原则，后者保证形成和发展学生的数学活动。数学教学不仅有教养的职能，而且还要完成教育的职能。

数学教学法的许多原理是用逻辑方法或实验方法建立起来的原理逻辑地导出的。逻辑学在数学法中的应用可分为两类：一类是用来研究数学教学中提出的教育学问题；一类是在中学数学教学中用来直接研究逻辑初步知识。在数学教学中直接引进逻辑初步知识，不是专门的孤立的，而是使必要的逻辑初步知识成为数学教学法本身不可缺少的组成部分，成为数学教学效果和促进学生逻辑思维发展的有力工具。

数学教学是数学活动的教学，也就是学生数学思维活动的教学，而人的思维活动是由心理学研究的，因此，数学教学法是离不开研究受教育者的心理和他们的思维水平的。

数学教学法的一般方法论基础是辩证唯物论，它把教学过程作为认识过程，即从生动的直观到抽象的思维，从抽象的思维到实践。

综述之，数学是数学教学法的基本内容和重要基础；教育学是数学教学法的基本形式和主要规范；心理学是研究学生思维的依据；逻辑学是数学教学法研究学生推理的理论；哲学是数学教学法研究问题的指导思想和方法论。所以，数学教学法是与数

学、教育学、心理学、逻辑学、哲学有着密切联系的边缘学科。现行的数学教学法内容中有些已经过时，随着时代的发展和进步，数学教学法必须充实现代化的内容，所以数学教学法又是发展中的学科。

数学教学思考方法训练　数学思考方法就是解数学题的逻辑推理的思维方法。数学教学思考方法训练，是指数学教学中对逻辑推理的思维方法训练，这是数学教学中的专项训练。这种训练要求学生在解题时，步骤清晰，层次分明、思维过程有根有据。训练的关键，是教师不要代替学生思维，而是引导学生积极主动地去思维。特别要训练学生将自己的思维过程作为研究对象，提高思维层次。在数学学习中，学生常惯于掌握数学知识的结果，不重视掌握数学知识的思考方法，只知道是什么，而不知道为什么，只知道结果，而不掌握结果推导的过程和方法，因此，训练中要善于引导学生自觉地探索思考方法，将自己的思考方法有条不紊的加以叙述，发挥个人智慧，使思考方法科学、合理、简捷，从而达到学生能独立思考探索、主动获取知识。数学教学思考方法训练，有多种形式、途径和方法。例如，以典型例题带一般，揭示思维规律、方法，达到举一反三，提高解题能力。亦可以题组训练形式，归类分析，总结出一般解题规律和方法，提高思维层次，开拓思路。

数学概念的形成与掌握　数学概念是数学基础知识和基本技能教学的核心内容。是学生进行数学判断的依据、推理的基础、思考的前提、接受新知识的媒介，是正确、合理、迅速运算的基本保证。如果学生建立了正确、清晰、完整的数学概念，就能加深对数学知识的理解，不断提高分析问题、解决问题的能力。

中小学数学教学内容中，所涉及的数学概念是很多的。有些概念是通过举出实例用描述方法加以说明的，如直线、射线、线段、集合等；有些概念是加以定义的。在教学要求上，有些概念是使学生了解的，如有理数的扩充等；有些概念是使学生理解的，如无理数等；有些概念是使学生在理解基础上掌握应用的，如对数概念等。在数学教学中，不论是描述性的概念，还是有确切定义的概念，要全面掌握它们必须从三个方面着手。

（1）要由具体到抽象，借助于表象进行思维，并用词语加以表达。形成概念是一个从外部活动向内部活动转化的过程，即“内化”过程，它包括分析与综合，分化与结合等步骤。

（2）掌握数学概念是通过多次比较和实践，对其本质属性彻底理解，产生“守恒”。不论概念的本质属性或非本质属性怎样改变或隐含起来，学生能始终掌握它而不被干扰。

（3）掌握数学概念是一个长期深化的过程，是学生在运用概念进行计算、推理中逐步加深理解的过程。形成概念系统更需经历几个阶段逐步完善和扩展，绝不是一次所能完成的。

因此，数学概念的形成与掌握，

是数学教学中的重要核心内容。

数学解题教学中的提示 教师指导学生解题时，给予学生的帮助。即把学生没有想到或想不到的地方提出来，引起学生的注意。提示的方式可以是建议，也可是一系列启发性的问题。提示的内容可以是具体的解题步骤，或者是一种策略方法，也可能是一般性的思考原则和思维方向。研究表明，提示应该和解决问题的思考序列同步，即循着“一般性——功能性——特殊性”的次序进行。否则，提示就会掩盖思维中的某些环节，起不到应有的效果。

一般地说，解决问题的思维活动分三个层次：一般性解决，即明确解题的大体方向；功能性解决，即明确解题所用的基本方法；特殊性解决，明确解题的具体方法和程序。因此，提示相应地也分三个层次：一般性提示，即提醒学生注意运用某些一般性的思考原则和方向；功能性提示，它介于一般性提示和特殊性提示之间，提醒学生注意解决问题的策略方法；特殊性提示，这是最具体的提示，它针对面临的具体问题提醒学生注意具体的解题方法和步骤。所谓“提示与解决问题的思考序列同步”是指思维在哪个层次上受阻就作哪个层次的指示，例如，某个学生需要的是功能性提示，如果给他的是特殊性提示，这就使他失去了特殊性解决的思维活动机会，提示没有起到应有的作用。因此，教师给学生作提示，必须首先了解学生的思维已经到了哪个层次。

数学知识发生过程的教学 数学概念、公式、定理、法则的提出过程，形成和发展过程，解题思路的探索过程，解题方法和规律的概括过程的教学。按照认识论原理，数学教学可分为从感性认识到理性认识和从理性认识回到实践这样两个阶段。前一个阶段就是从实际问题或已知数学问题中引出新的概念和原理（法则、公式、定理、方法）这是一个获取知识的过程，后一阶段就是运用得出的概念和原理去分析和解答例题、习题，这是运用知识解决问题的过程。知识发生过程教学就是前一个阶段获取知识过程的教学。获取知识过程的教学对培养学生以下几种思维能力是一种重要的途径：①怎样从实际事物中发现和提出数学问题，或者从已有的数学知识中提出新的数学问题。②怎样对实际事物进行抽象、概括，即实现由感性认识向理性认识飞跃得出概念的思维能力。③怎样由得出的概念选取、综合已有的数学知识进行判断、推理得出原理的思维能力。此外，知识发生过程是揭示新旧知识关联的过程，知识发生过程教学是掌握知识结构的过程。知识发生过程教学是第一次认知的过程，它所造成的印象最强烈。如果第一次认知形成了错误，纠正是困难的。知识发生过程教学是紧紧联系学生原有知识的过程，有利于调动学习积极性。正是由于上述原因，我国许多数学教育研究工作者提出了“重视获取知识过程的教学”、“加强知识发生过程教学”、“数学教学不仅要教给学生数学知识，而且还要揭示获取知识的思维过程”等等一些有价值的意见和要求。

数学教育中的划分与分类 划分是把

一个属概念分为若干个种概念的逻辑方法，或把一类事物分为若干个小类的逻辑方法。例如，把“三角形”分为“锐角三角形”、“直角三角形”、“钝角三角形”就是划分。划分由三个要素构成：被划分的那个属概念叫做划分的母项，划分出来的各个种概念，叫做划分的子项，划分时所根据的标准，叫做划分标准。在上述例子中，“三角形”是划分的母项，“锐角三角形、直角三角形、钝角三角形”是划分的子项，划分的标准是“角”这一属性。正确的划分必须遵守划分规则。它们是：①划分的子项的外延之和等于母项的外延；②划分的各子项应当是互不相容的；③每次划分必须按照同一划分标准进行；④划分应当按照层次进行，不应跳跃划分。和划分密切联系的概念是分类，它是根据事物的本质属性或显著特征所进行的划分。分类和划分是不完全相同的，任何分类都是划分，但不是所有的划分都是分类。分类的根据是本质属性或显著特征，它所得的子项具有相当的稳定性，在科学发展中，较长时期起作用。但在数学教学中，这种区分并不是严格的，往往把解题中临时作的划分也说成是分类。划分与分类是数学教学的重要逻辑手段。这种手段的运用主要有以下几个方面。

（1）通过分类明确概念的外延，形成概念体系。例如，数系，平行四边形的分类体系。这种分类往往是用二分法，即将一个母项划分为一个具有某种属性的子项和另一个不具有这种属性的子项的划分方法，多层次划分来完成的。

（2）把所学知识，包括概念、法则、公式、公理、定理、性质、方法通过分类，进行整理，使知识系统化、结构化。

（3）通过划分把一个变幻不定或无法统一处理的问题情境分成相对稳定的若干种情况，分别予以处理。这种解决问题的方式，常称为分类讨论。引起分类讨论的原因是多样的。归纳起来主要有：①数学概念的限制。有些概念本身就是分类定义的，还有一些概念在下定义时，就有范围的限制，因此，当解题过程需要引用这些概念时，讨论就难以避免。②公式、法则、定理性质应用范围的限制。③由于图形相对位置的变动，而无法统一处理者，不得不分情况区别对待，而引起分类讨论。④由于参数取值的变化而引起讨论。

数学教育中的整体性原则 整体性原则是科学认识的方法论原则。它要求把对象始终作为一个有机联系的整体，从对象本身所固有的各个方面，各种联系上来考察它，从整体与层次、部分、结构、功能等辩证关系上来把握它。具体地说包括下列几个方面。

（1）综合地考察事物的各个方面，各个因素。不仅要对事物本身进行考察，而且把它作为更大整体的一部分来考察，同时把它作为许多相互作用着的部分的总体来考察。

（2）由着重对事物实体的研究转向着重对事物的各种类型的联系和结构的研究，不仅研究本身的各种联系，而且研究它通过何种联系与结构

受制于和影响着它周围的其他事物。

（3）由着重对事物的相互静止的研究转而对事物的动态的发生发展的研究，从纵的方面反映客观事物。

数学教学中贯彻这一原则，就是树立整体观念，处理好“整体性把握”和“局部性演绎”的关系。为此，我国数学教育研究工作者提出了如下建议。

（1）提倡从整体到局部的教学方法。即教学时，应在每一个专题具体开始前将所教内容先作一个总体性的梗概介绍。包括适当范围的总体背景，知识发生时的关联或演绎框架。让学生对各个部分在大范围中的地位和各部分之间的一些联系有一定程度的了解。这样学生就能基本明了所学的这一部分内容的前因后果，要求掌握知识的内在动机就更强烈，更有针对性。同时，由于得到了整体性的第一印象，认知结构中已有的观念就能与这个整体性的介绍发生关系，建立起进一步吸收具体知识的框架，促进知识的吸收和巩固，增进对知识意义的理解和领悟。

（2）充分重视和切实加强综合过程。知识的整理综合是数学学习的必经之路。它不应是简单的“旧事重提”，而是要对照比较，寻找联系，是在整体观念下的一种再构造。由于综合总是伴随着一种范围更加广阔的整体规律和整合方法的发现，将原来彼此分散、彼此分割开来的知识联系成一个统一的整体，揭示出整体思想，所以，综合也就是一种创造，应给以充分重视，在复习阶段上，踏踏实实地实施。

（3）牢固掌握具有包摄性的数学概念。数学整体的组成形式和它的相对独立性，使得总体的把握，往往要利用或出一些新的数学概念，以它们作为整体组织的手段或是组合的法则。这些概念具有一种统一的力量，学生牢固地掌握它们，就能在它们的统率作用下看到早先偶尔接触到的或是未察觉出明显关系的已学知识之间的联系，对于学生组织和理解整体，树立整体观念都能起积极作用。在中学数学中，函数、集合、映射等就属于此类概念。

（4）循环往复、逐次深化。即教学的目的、要求、内容应统筹安排，体现循环往复，体现周期性。应让学生在整个学习过程中对同一专题有间隔地多次接触，经常瞻前顾后，多向联络，在不同专题的交叉学习中获得顿悟的触发点，以多次反复，多次实践的方式完成对数学内容的认识。

数学教学中的巩固性原则 巩固性原则要求引导学生在理解的基础上牢固地掌握所学的知识和技能，使所学的知识和技能持久地保持在记忆中，当需要的时候，能准确无误地再现出来，加以运用。数学教学中贯彻巩固性原则的具体要求是：①理解是巩固的前提，为了使学生牢固地掌握知识，首先应当帮助学生深刻地理解数学中的基本概念和基本原理。②组织好学生的复习。③要在学习新知识，不断扩大和加深已有知识的过程中，在引导学生不断前进，积极运用已有知识去解决新问题的过程，使学生所

学知识得到巩固。④组织好学生的练习和作业。⑤作好成绩考查和评定。

数学教学中的启发性原则 启发性原则要求教师充分调动学生学习的主动性，引导他们生动活泼地学习，使他们经过自己的独立思考，融会贯通地掌握知识，提高分析问题和解决问题的能力。数学教学中贯彻这条原则的具体要求是：①调动学生学习的主动性是贯彻启发性原则的首要问题。学生学习的主动性受到许多因素的影响，如学生的好奇心、兴趣与爱好、求知欲、获得优良成绩以得到表扬、奖励的愿望，将来参加祖国建设为人民服务的远大目标，等等。在教学中，教学要根据教材内容和学生年龄特点，采取不同的教学方法激发学生学习兴趣，通过数学本身的魅力去激励学生的主动性，通过学生自己思考而尝到克服困难的满足和愉快诱发学习数学的积极性，通过数学应用的广泛性，促使学生产生强烈的求知欲。要引导学生对于自己的学习从注意外部评价转向自我评价，特别是要把学生个人的与祖国的前途，社会主义现代化联系在一起，培养他们具有远大的学习目标、高度的学习责任感和认真严肃的学习态度，从而使学习获得稳定而持久的动力。②启发学生独立思考，发展思维能力。数学教学不仅要教给学生数学知识，而且还要揭示获取知识的思维过程，后者对发展思维能力更为重要。教学时应当注意数学概念、公式、定理、法则的提出过程、知识的形成、发展过程，解题思路的探索过程，解题方法和规律的概括过程，使学生在这些过程中展开思维，得到正确的引导。随着教学内容的展开，教师应当注意不断地创设问题情境，这种问题情境指的是一种具有一定困难，需要学生克服，又是力所能及的学习情境。③要教会学生懂得怎样学习，培养学生独立学习的能力，中学教学的教学过程应当是一个由学生基本依靠教师到基本独立的发展过程，教师在教学方式的选择上，应适合学生的学习能力，并能充分发挥和发展学生的这种能力，促进教学的发展。④注意对学生非智力因素的培养，发扬个体人格的主动精神。⑤教学应当是民主的，师生之间应当是合作的，课堂气氛应当是紧张、愉快、生动、活泼，而不是压抑的。总之，启发性原则的内涵是丰富的，需要在教学实践中不断挖掘，不断总结。

数学教学中的直观性原则 直观性原则是指教学中利用学生的多种感官和已有经验，通过各种形式的感知、丰富学生的直接经验和感性知识，使学生获得生动的表象，从而比较全面、比较深刻地掌握知识，并使认识能力得到较好的发展。数学教学中贯彻这一原则的具体要求是：①根据教学任务和教学内容，以及学生的年龄特点，恰当地选择直观手段。在各种类型的直观手段中（实物的、模型的、图画的、符号的），数学教学里广泛使用的是符号的直观性（图形、图象、图式、图表）。符号直观性的手段是一个约定的符号体系，借助于这个体系，把所研究的物体、现象和过程的那个侧面，同其他的性质区分

开，并表现为纯粹的形式。这种约定的符号体系，实质上是一种特殊的语言，为了明白它的意义，必须象对待所有语言一样，专门地进行学习。只有这样，符号的直观性才能成为有效的教学手段。②数学概念形成过程通常分为两个阶段：感性阶段，即形成感觉、感知和表象的阶段；理性阶段，即对表象进行概括和抽象而形成概念的阶段。在概念形成过程的感性阶段，教师要充分利用直观手段，促进学生的概括和抽象活动的发展，但是，形成数学概念的过程并不总是按照从感觉开始的模式进行的。特别是当所要形成的概念以某种形式无限的范畴（例如，直线、平面、有理数集的稠密性、极限等概念）相联系时，就不存在感性的阶段。于是，作为促进概念形成的手段之一的直观性，成为妨碍因素。③在立体几何课程的开头，即在学生还不会“阅读”立体图时，基本的直观手段是模型，随着学习的进展，图的作用逐步增强，在学生已经学会正确地看图时，就可以完全不用模型。使用模型应当是为了教会学生阅读立体和空间位置关系的图。在立体几何的教学中，模型和图配合不当，过多或过少地使用模型都会得到反面的结果。④注意直观手段的运用必须与教师的语言指导密切配合。

数学教学过程的基本阶段 根据马克思主义认识论的基本原理和教学过程的特点，在数学教学过程中，学生掌握知识的过程，可分以下几个基本阶段。

（1）感性阶段 这相当于认识论中的感性认识阶段。数学教学过程，从感知教材开始，这是由认识的主体和客体所决定的。从认识的主体学生来说，中小学生年龄较小（年龄特征），缺乏生活经验，知识面较窄，其思维正处于由具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的时期。从认识的客体书本来说，书本的知识是人类实践经验的高度概括和总结，一般是通过抽象的概念、定义、定理、公式和法则等形式表现出来的。因此，教学中教师必须引导学生从感知教材入手，给学生形成鲜明生动的表象，为正确理解教材打下基础。

（2）理解阶段 教师引导学生对客观事物获得感性认识后，应继续引导学生加工这些感性认识，进入对客观事物的本质和规律的理解。感知教材是深入理解知识的基础，而后面的“巩固”和“应用”两个阶段又是围绕理解教材这一环节进行的。因此，深入理解教材是教学过程中各个阶段中最基本最重要的阶段。学生深入理解教材的过程，其实质是由感性认识能动的进到理性认识的过程。教师应充分发挥学生的思维能力和学习积极性，引导学生进行分析、综合、抽象、概括，进行判断和推理，以形成概念、定理、公式、法则等，使学生掌握起规律性的知识。

（3）巩固阶段 在学生理性认识的基础上，在教师指导下必须巩固获取的知识成果，贮存在记忆中，以便为以后学习新知识打好基础。人们的认识必须经过反复实践才能深化，学生获取的知识必须经常复习才能巩固。但是，在教学中学生获取知识的

过程是迅速而简捷的，他们对于人类长期积累的知识和经验，学习历时短暂，内容概括简化，也少有反复，因而印象浅薄，遗忘率较高。对此，教师必须在学生理解教材后，及时引导学生深刻领会，反复训练记忆，以达巩固。学生记忆知识不是死记硬背，而是在理解的基础上完整的、准确的、牢固的记忆。对教材理解的愈深刻，记忆的愈牢固。显见，反复复习对牢固记忆知识是十分重要的。

（4）应用阶段　学而则用。不是为学知识而学知识。因为：①学生学习的目的是为祖国社会主义建设服务。②知识的应用，有利于技能技巧的形成。只有形成学生的技能技巧，才能给学生进一步学习创造条件。③将知识应用于实际，有利于提高学生分析问题和解决问题的能力。

数学教学过程的四个基本阶段，各有自身特定的任务，具有相对的独立性，同时，又是互相联系着的。在教学中要从实际出发灵活运用，不要死搬硬套。

数学问题解决中的课题类化　课题类化亦叫做课题归类，即把当前的课题纳入同类事物的知识系统中去，因而说是类化，然后从已有知识中找到解决这个课题的途径和方法。从已习得的抽象知识方面来说，由于它与新的同类具体事物间建立了联系，所以说是具体化。展开了的课题的类化过程，总是和审题，联想交织在一起反复进行的。专家建议，最好按照下面的一套方法探索。

（1）想方设法将所给的课题同你会解的某一类问题联系起来。如果连这一点也做不到，就尽可能找出你熟悉的，最适于已知条件的一种解题方法。

（2）要记住，课题的目标是寻求解答的主要方向。仔细分析题目的目标是什么，试试看能不能用你熟悉的某种方法去解出题目。

（3）将所得到的局部的结果同题的条件和目标作比较，用这种办法经常检查解题的意图是否合理。试验的次数（包括思考过的和实际作过的）不要太多。

（4）试试能不能部分地改变题目，换一种方式叙述它的条件，故意简化题的条件（也就是编一个与所给题目相似的，但条件比较简单的题，再设法解它）。试试能不能扩大题的条件（编一个比所给题目更一般的题），而且将与该题有关的概念用它的定义来代替。

（5）将题的条件分成几个部分。尽可能将这几部分构成一个新的组合（也可能出现同题中不讨论的东西组合到一起的情况）。

（6）试试能不能将所给题目分成一串辅助问题，依次解答这些辅助问题就可以构成所给题目的解。对于所给题目的情境中的各个部分编一些局部性的题，这样作当然要服从基本题的目标。

（7）研究题的某些部分的极限情况，看看这样会对题的基本目标有什么影响。

（8）改变题的某一部分，看看这样改变会对题的其他部分有什么影响。根据看到的改变题的某些部分所出现的结果，试试能不能就题的目标

作出一个假设。

（9）如果所给题目解不出来，你可以从课本或者参考书中找一个与所给题目相似的，但已经给出解答的题。仔细研究现成的解答，再尽力从中找出对于解答所给题目有益的东西。

数学学业成绩的检查与评定 学校根据数学教学目的、控制、鼓励和调节师生的教学活动和鉴定教学效果的教学环节。通过对学生数学学业成绩的检查与评定，学生可以获得矫正的信息，调整自己的学习，培养自我检查和评定学业成绩的能力；教师可以了解自己的教学效果，及时调整教学要求，改进教学方法，加强责任感；学校领导可以了解教学情况，采取有效措施；家长可以了解子女的学习情况，配合学校对学生加强教育、指导。数学学业成绩检查有考查、考试两种形式；数学学业成绩评定有记分和评语两种形式。

数学学业成绩检查与评定要求做到以下几点：①坚持科学性、有效性和可靠性、评分标准要客观，能有效地检查出学生的学习情况，反映学生较稳定的学习水平。②检查与评定的内容应力求全面。命题内容既能反映学生对基础知识、基本技能的掌握情况，又能反映出学生数学能力的发展水平。各类题目的档次，比例、赋分要恰当的体现出数学教学大纲所规定的层次要求。③检查方法要灵活多样。数学科常用的方法有日常观察、课堂提问，检查作业、书面测验等考查方法。另外还有口试、笔试、实践考等考试方法。④做好检查总结，给出科学统计，实现定性和定量的分析，做出正确评价（统计时请参阅教育测量和教育统计有关材料）。

数学教学中的因材施教原则 因材施教原则要求教师从学生的实际情况出发，依据学生的年龄特征和个别差异，有的放矢地进行教学。这包括两方面的意义：一是教学的深度、进度要适合学生的知识水平和接受能力；二是教学必须考虑学生的个性特点和个别差异，发挥每个学生的积极性，使他们的才能都得到充分的发展。数学教学中贯彻这一原则的具体要求是：①普遍重点地了解学生。既要了解学生的学习基础，也要了解学生的个性爱好和学习环境。在普遍了解的基础上要重点了解两头的学生——学习基础差的和成绩比较优异的，以及他们的个性爱好，所长或所短，并寻找原因。②教学进度、教学要求要面向大多数，并兼顾两头。对学习有困难的学生，要特别予以关心，及时采取有效措施，激发他们学习数学的兴趣，指导他们改进学习方法，帮助他们解决学习中的困难。在一定阶段上，可把要求放低，对学有余力的学生，要通过课外活动或讲授选学内容等多种方式，满足他们的学习愿望，发展他们的数学才能。③针对学生的个性特点，数学能力的个性差异，给予不同的指导。④注意中小学，高初中的数学衔接教学。

数学教学中的爱国主义教育 爱国主义教育是德育的内容之一。对学生进行爱国主义教育，旨在使他们热爱社会主义祖国，树立保卫祖国、建设祖国、维护祖国尊严的决心。数学教学

中进行爱国主义教育是结合教材内容实施的。其中，一个重要方面是结合教学内容向学生介绍中华民族在数学史上的杰出成就，激发学生的民族自信心，自豪感，另一个重要方面则是通过实际的数学问题，反映我国社会主义建设事业的飞速发展，激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性。

数学教学中的循序渐进原则　循序渐进原则要求教学按照学科的逻辑系统和学生认识发展的顺序进行，使学生系统地掌握基础知识和基本技能，发展能力。在数学教学中贯彻这一原则的具体要求是：①要掌握好四个"序"。一是大纲、教材的"序"，在数学教学设计中，掌握学习是一种可取的教学策略。二是学生认知结构的"序"，主要是指：由已到未知、温故而知新的"序"；由感知到理解到巩固到应用的"序"；由易到难，由简到繁、由近及远的"序"；由特殊到一般和一般到特殊的统一的"序"，即把教材的知识结构和学生认知结构相结合。三是学生年龄特征的"序"。四是学生学习能力的"序"，指由基本依靠教师到相对独立到基本独立的"序"。②要处理好三个方面的关系：一是抓"关键"，集中精力解决重点、难点的问题。教学必须区分主次，分清难易，有详有略地进行，才能保证质量和效率。二是处现好知识、能力的关系，知识和能力是相互促进、辩证统一的，把知识、技能和能力的关系割裂开来，实际上是重蹈历史上形式教育派和实质教育派的唯心主义错误。三是处理好"教法"与"学法"的关系，学生的"学习方法"，要靠教师的"教法"去培养、去"身教"，教师的"教法"又要适应于学生的"学法"。③要有明确的教学目标，教学目标是根据大纲和教材制定的，既是教学的依据也是评价的标准，只在教学中体现而不在评价中体现的目标，往往是落空的。

数学教学是数学活动的教学　苏联A·A·斯托利亚尔从数学教育角度对数学教学提出的一种观点。他认为"数学"这个术语可以表示一种思维活动（数学活动），或者表示这种活动的结果——理论。数学活动作为学生在学习数学过程中的特定的思维活动，可以看作是按下述三种模式进行的。①借助于观察、试验、归纳、类比、概括积累事实材料，称为经验材料的数学组织化（数学描述）或具体情况的数学化。②由积累的材料中抽象出原始概念和公理体系并在这些概念和体系的基础上演绎地建立理论，称为数学材料的逻辑组织化。③应用理论，称为数学理论的应用。所谓数学教学是数学活动的教学，其涵义是说教给学生的不应是死记现成的材料，而是发现数学真理，是逻辑地组织用经验方法得到的数学材料，是在各种具体问题上应用理论。这种思维活动的教学应该广泛应用"问题—理论—问题"的公式来组织。

数学概念教学中的循环定义　循环定义亦称同语反复。是数学教学中常见的错误之一。错误的构成是这样的：一个概念是用另一个概念定义的，而这第二个又用第一个下定义，这样一

来，两个概念都仍然没有定义。例如，“成直角的两条直线叫做互相垂直”，而问到什么是直角时，又说“角的两边所在直线互相垂直时，这个角称为直角”。这种错误的比较隐蔽的情况是：先用b概念去定义a概念，然后又用c概念去定义b概念，最后又用a去定义c。错误构成的另一种形式，是自己来定义自己，尽管是以另外的一种方式表达的。例如，“互相类似的图形叫做相似形”、“一组对象的全体称为集合”，这样的“定义”是什么也没有定义。

数学教育中的非智力心理因素 那些不直接参与认知过程的心理因素。主要包括兴趣、情感、意志、性格等。在教学过程中，它们经常以学习动机的形式出现，并不直接作用于学生的认识对象—各学科的教学内容，而是通过发起、维持、加强或中止、削弱学生的认知过程（即智力活动过程，包括感觉、知觉、记忆、想象、思维等智力因素），间接影响学生的学习活动。非智力因素在不同的时间、场合与智力活动联系的方式程度有所区别，但却从来不可能相互分离，永远具有同时性，共同组成教学活动中学生心理的两个不同方面。非智力心理因素的优劣状况，对于不同智力水平学生学业成就的影响具有普遍意义，教学活动应当充分利用非智力心理因素并对它加以培养。

我国教育研究工作者就如何培养非智力心理因素，提出了下面四条教学原则。

（1）根据非智力心理因素与智力因素在活动中的同时性建立整体性教学原则。主要内容是：①在教学中除了充分挖掘学生的智慧，还应当广泛利用非智力因素，使学生参与学习的全部心理因素都处于积极状态，从而提高教学效率；②人的心理总是通过活动发展的。由于学生在教学过程中心理活动的整体性，其发展也是整体性的。在促进智力发展的同时，应该有意识地对学生各种非智力因素加以培养。

（2）根据非智力因素之间相互联系又相互区别的特性建立教学途径多样化和多元化原则。它的具体含义包括：①根据非智力心理因素之间的相互联系，针对学生的不同情况，在教学中可以采用不同径途，侧重某一非智力因素的培养，或综合运用各种教学方法，从而收到普遍性的效果，②由于非智力因素之间的相互区别和制约，在考虑培养目标时必须持有全局观念，当某一因素顺利发展时，要想到可能给其他因素造成的不利影响，并采取相应的补救措施。应当使种种教学途径彼此协作，保证各个非智力心理因素全面和谐的发展。

（3）根据非智力心理因素形成的特点建立感化性原则。主要含义是：①非智力心理因素的培养必须持之以恒，只有在教学中长期、不懈地付出努力，才能在非智力心理因素的发展上收效；②对于非智力心理因素的培养，更多地是在各种教学途径中寻求对不同的学习者来说哪一种最恰当，以此使他们产生体验和共鸣，在薰陶和感化中使非智力心理得到发展。

（4）根据非智力心理因素动力

性质的特点建立主体性原则。非智力心理因素总是作为动力，对人的认识过程起着调节作用。它决定着学习者积极性的水平，影响着主体作用的发挥。教学中应当充分发挥非智力心理因素的动力作用，以保证学生主体地位的实现，并在教学实践中使非智力心理因素得到锻炼和发展。

数学教学中的反馈调节性原则 教师在传授数学知识和技能的过程中，要不断地从自己的教学对象中取得反馈信息，了解教学的情况，相应地调节自己的教学。此外，也让学生及时得到反馈信息，使教学取得更好的效果。教学中贯彻这一原则的具体要求是：①注重形成性评价。形成性评价就是把学生学习活动的进程和结果同拟定的教学目标相对比的过程，目的是得到反馈信息，调节教学进程。②根据学生的反馈信息调节后续教学，这里的调节既包括在一节课内的临时变化，也包括对单元教学过程的调节。也可能是改变下轮同一教学内容的课堂设计。③发挥“前馈”的作用，减少错误的发生。也就是，教师对于学生头脑中正在孕育的错误，通过提醒、暗示等手段，及时发出补偿信号，用以抵消干扰作用，纠正即将发生的偏差。④要注意防止超调，教学措施发生效果不是立即出现，往往要经过一段时间，这种现象叫时间迟后效应。如果这种时间迟后效应不被认识，就有可能出现顾此失彼的不适当调节。⑤要求教师和学生把问题—解答—讲评—改错紧密结合为一个整体，把看书—思考—讨论—评价紧密结合为一个整体，把讲授—测验—评卷—讲评紧密结合为一个整体。

数学教学中理论联系实际的原则 理论联系实际的原则，要求教师加强基础知识的教学，引导学生以学习基础知识为主，从理论与实际的联系中去理解知识，并运用知识去分析问题和解决问题，做到学懂会用。数学教学中贯彻这一原则的具体要求是：①要注意从学生所熟悉的生活、生产和其他学科的实际问题出发，进行观察、分析、综合、抽象、概括和必要的逻辑推理，得出数学概念和规律，使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练。同时要注意引导学生把数学知识运用到实际中去，分析、解决力所能及的实际问题。②重视基础知识的教学、基本技能的训练和能力的培养，知识、技能和能力三者的关系是互相依存、互相促进的，能力是在知识的教学和技能的训练过程中通过有意识的培养而得到发展的。同时，能力的提高又会加深知识的理解和技能的掌握。加强基础知识的教学，首先要使学生正确理解数学概念，对于容易混淆的概念，要引导学生用对比的方法认识它们之间的区别与联系，要使学生在正确理解数学概念的基础上进行判断、推理，从而理解数学的原理和方法。通过练习，掌握好知识和技能，并能灵活运用。要特别注意那些一般原理和方法的教学，应当引导学生搞清它们的来源，分清它们的条件和结论。弄清抽象、概括或证明的过程，了解它们的用途、应用的范围，以及应用时应注意的问题。注意知识的整体性。要通过总结和概括把所学知识系统化。对于基本技能的训

练和能力的培养，要遵循学生的认识规律，结合教学内容，选择合适的教学方法，有目的有计划分阶段地进行。在教学中，要根据数学本身的特点，着重培养学生的运算能力，逻辑思维能力和空间想象能力，要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、抽象、概括、类比等重要的思维方法，同时要重视学生的独立思考和自学能力。③充分认识课外活动的意义，有目的有组织地开展多种形式的课外活动，激发学生学习数学的兴趣，扩大学生的视野，发展学生的创造力。

数学教育中的分析和综合相结合原理

分析是把对象整体分解为各个部分加以考察研究的方法，综合则是在分析的基础上，把对象的各个部分联结为一个整体，在诸多关系的总和上，多样性的统一上来把握对象的本质、规律。分析和综合实际上彼此不可分离，它们同时出现，互相补充，构成统一的分析—综合法。分析—综合法是数学教学中最基本的逻辑方法。事实上，比较、抽象、概括、归纳和演绎无不以它为基础，它以各种不同的形式应用于数学教学的每个角落。例如，将一个复杂的问题分成许多简单的问题，然后把这些简单问题的解合并为一个统一的完整解答；分清题目的已知、未知、分清原因、结果，找出各量之间的关系，将所研究的对象放到一组联系和关系当中，从这组联系和关系中发现对象新的方面、本质和性质。然后再把已知、未知、原因、结果及其关系统一起来得到问题的答案。

在数学教学中，分析—综合法还有另外的两种理解：

（1）分析被看成是从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法，而综合被看成是从原因推导到由原因产生的结果的另一种思维方法。

（2）分析被看成是以借助数和度量的概念从数量方面研究客观事物的性质为基础的研究方法，而综合是以从质量方面研究客观事物的性质为基础的研究方法。

数学教育中归纳和演绎相结合原理

归纳是从个别性的前提推出一般性的结论，或从较不一般性的前提推出较一般性的结论的推理形式。演绎是从一般性的前提推出个别性的（或特殊性的）结论的推理形式。二者都是在实践基础上可以获得新知识的逻辑方法。对于理性认识，各有其不可或缺的作用。归纳法的作用在于从个别的（或特殊的）对象中，概括出一般性、规律性的东西；演绎法的作用在于根据一般性、规律性的东西，推知同此一般性必然联系着的特殊的（或个别的）对象。归纳法是一种重要的发现的手段，但结论是似真的，而演绎法的结论则是真实的。归纳和演绎相结合原理是说二者既是对立的又是统一的，相辅相成，互为前提。单凭归纳，则永远不会把归纳过程完结，它的结论总是似真的。用归纳法所得的结论，总是需要演绎法的论证。同样的，单凭演绎，它的前提就无从获得，演绎所必需的前提，一般地都来自归纳。因此，二者都不可偏废，不能把二者绝对地对立起来。这条原

理，即是逻辑学的重要组成部分，又是科学方法论的重要科学方法。这条原理运用于数学教学，就意味着教师不是自发的而是自觉的应用这个原理组织教学过程，指导学生进行学习。把知识的应用与知识的发生过程相结合，把结论的证明与结论的发现相结合，把问题的论证和推广相结合。数学教学中运用这一原理的意义从下面波利亚的一段话可以看出："用欧几里德方式提出来的数学看来象是一门系统的演绎科学，但在创造过程中的数学看来却象是一门实验性的归纳科学，这两个侧面都象数学本身一样古老。但从某一点说来，第二个侧面是新的，因为以前从来就没有"照本宣科"地把处于发现过程中的数学照原样提供给学生或教师自己或公众。"

数学教学法是研究数学活动的教学

数学教学法最早出现在瑞典的教育学家别斯塔洛齐（1746—1827）发表于1803年的著作《关于数的直觉理论》中。数学教学法作为一门学科，是从19世纪初才开始的。数学教学法研究的对象是数学教学，而数学教学不仅是数学知识和技能的教学，而且是数学活动的教学，即教师的数学教学活动与学生的数学学习活动两个方面的统一过程。也就是揭示数学教学过程中的规律性。教学过程包括教学目的（为什么教？）、教学对象（教谁？）、教学内容（教什么？）、教学方法（如何教？）几个部分，这几个部分是彼此相互联系着，比如，在确定教学方法时，必须反映教学对象、教学内容的特点，又要考虑教学目的要求。为使数学教学真正成为数学活动的教学，务必弄明白数学活动的组成，以便研究数学活动教学的方法。数学活动的一般模式大体分作三个阶段。

（1）借助观察、试验、归纳、类比、概括，积累事实材料，称为经验材料的数学组织化。

（2）由积累的材料中抽象出原始概念和公理体系，并在这些概念和体系的基础上演绎地建立理论，称为数学材料（第一阶段活动的结果中积累的）的逻辑组织化。

（3）应用理论，称为数学理论（第二阶段的结果中建立的）的应用。

根据数学活动的一般模式，为实现数学教学成为数学活动教学的目的，需要注意以下两点：①启发学生重视数学结论的探求过程。对于数学中的结论，教师一般不要直接给出，而是引导学生借助观察、试验（练习）、归纳、类比等方法发现数学命题，然后深入研究探讨的过程和论证的方法，进而分析结论的内容，通过实例再将结论内容具体化。在这个过程中，使学生受到从具体到抽象，从抽象到具体的思维训练。例如教学"三角形三内角的和是180°"，可先用剪、拼、量的方法，使学生观察、思考，提出猜想，然后引出平行线论证猜想的正确性，从而使学生在实际操作中获得感性认识的基础上，上升到理性认识，达到教学目的。②重视沟通知识间的内在联系。数学的体系是严密的，学生揭示数学知识之间的纵横交错的内在联系，是学生思维活

动的结果，可从以下三方面进行训练。第一，要运用对立统一的辩证观点进行教学，发展学生的辩证思维。例如，代数运算中的加减法统一为加法，乘除法统一为乘法，指数和对数，开方三种不同形式的互化等等。第二，要指导学生按照知识的产生、发展，变化关系或逻辑关系，对某单元的知识结构和基本研究方法进行整理，提高学生综合问题的能力，以实现知识的巩固和迁移。第三，要引导学生对知识进行引伸，提高学生灵活运用知识的能力。例如，数学中的一题多解，是训练和提高学生抽象概括能力、推理论证能力和开拓创造的思维能力的过程，要充分运用这一训练过程，充分引伸和灵活运用知识，达到教学目的。

数学教学中的辩证唯物主义观点教育

辩证唯物主义观点教育是德育的重要内容之一。用无产阶级的世界观和方法论教育学生，使他们初步懂得唯物论和辩证法，不断克服主观性、片面性、表面性、逐步学会用唯物辩证法的立场、观点和方法观察问题、分析问题和解决问题。数学中进行辩证唯物主义观点教育是结合教材实施的。

数学教学中具体与抽象相结合的原则

我国中学数学教学法中针对数学的特点专门提出的一条数学教学原则。它要求教师按照从具体到抽象，再从抽象到具体的抽象过程进行教学，要把抽象的理论具体化、通俗化、要把具体的事实抽象化、概括化。具体要求是：①数学中的基本概念，原理和方法要结合具体的实例进行教学；②抽象的结论，应讲清来龙去脉，讲清产生、形成和运用发展的过程；③既要重视演绎推理，也要重视归纳推理，教学过程尽可能以“观察、实验—分析、综合、归纳、类比—抽象、概括—证明”的思维顺序展开；④对所学数学知识、解题方法不断地进行概括，使知识和方法系统化；⑤直观教具的使用是从具体上升到抽象的辅助手段；⑥数学的抽象性以具体性为基础，并以更广泛的具体性为其归宿。数学教学中贯彻具体与抽象相结合原则的目的是加深对数学理论的理解，促进数学知识的应用，培养学生的概括能力。

数学教学中科学性和思想性统一的原则　科学性和思想性统一的原则，要求教学以马克思主义为指导，武装学生以科学的知识，并结合知识教学，对学生进行共产主义的世界观和道德品质的教育。教学的科学性和思想性是一致的，统一实现的。教学的思想性既取决于教学的科学性，又是提高教学的科学性的重要保证。数学教学贯彻这条原则的具体要求是：①中学数学要选择参加现代化建设和学习现代科学技术所必需的并为学生所能接受的数学基础知识作为教学内容。教学内容的安排和阐述要符合唯物辩证法；要理论联系实际；既要注意数学知识的系统性，又要注意符合学生的认识规律，注意处理好数学各部分内容之间的联系，特别是初中内容与小学内容的衔接，高中内容和初中内容的衔接，还要注意与物理、化学等邻近学科的配合；要符合学生年龄特征，有利于学生掌握基础知识、基本

技能和发展能力；要有利于发挥教师的主导作用和调动学生的主动性和积极性。②在教学过程中要求教师讲授正确，论证严谨，语言精确，思考缜密，出言有本，言必有据，确保教学的科学性。③在数学教学中，要结合教学内容对学生进行思想品德教育，要用辩证唯物主义观点阐述教材，使学生从中领悟到数学来源于实践，又反过来作用于实践，以及反映在数学中的辩证关系，从而受到初步的辩证唯物主义观点的教育；要通过介绍我国数学史以及我国社会主义建设的成就和数学的应用，激发学生民族的自尊心和爱国主义的思想感情，使学生逐步明确要为国家富强、人类进步而努力学习；要通过数学的教学和训练，锻炼学生的坚强意志和性格，培养学生的严谨作风、实事求是的科学态度和独立思考、勇于创造的精神。

数学教学中严谨性与量力性相结合的原则　我国中学数学教学法中针对数学的特点专门提出的一条数学教学原则。严谨性是数学科学的基本特点，是发展学生逻辑思维的核心环节。数学的严谨性并不是一下子形成的，中学生对数学严谨性的要求，更要有一个逐步适应的过程。严谨与量力相结合的原则就是说，在数学教学中，不能单纯地追求理论的严谨性，严谨程度的确定，应当以学生所具备的各方面的能力为依据，必须有助于发展学生的逻辑思维能力，并且随着学生的学习必须逐步加以提高。教学过程中应注意：①对整个教学过程，严谨性的要求应有一个总体安排，对教学的各个阶段应有明确的具体要求，这样就一个阶段来说，某一项内容可能是不严谨的，但是就整体来说却是严谨的。②数学教学的过程，既是使学生掌握数学知识的过程，也是使学生逐步明确逻辑要求的过程。教学中应逐步要求学生语言精确、思考缜密、言必有据、思路清晰，必须充分估计学生的接受能力，要从发展的观点考虑学生的潜力，使中学数学的严谨性要求不断提高。

模象直观　模象指的是事物的模拟性形象，不是实际事物本身，如模型、图片、图表、图形、及幻灯、电影形象等等。当教学中采用这些模象作为直观对象时，这种直观类型就叫做模象直观。通过模象直观形成起来的，同样是关于事物的一些感觉、知觉、表象或观念，但是就其内容方面来说，由于它是在模象的作用下形成的，所以同实际事物有一定的距离。研究表明，有时学生难以把模象知觉或表象同真实的对象相联系，甚至产生不应有的曲解。模象直观具有独特的认识作用。首先，在模象中，可以人为地排除对于认识当前的对象无关的因素，便于突出对象的一些重要因素，因而便于形成有关事物的一般表象，例如，用直观图研究几何形体的特征，就舍弃了大量的无关因素。其次，模象可以根据观察的需要，通过改变实物中非本质特点的强度，以着色、放大、变静为动等手段，利用背景、对象的对比变化，突出所需要概括的本质因素，使难以直接觉察的东西，清晰地呈现在人们的感受能力可及的范围之内。

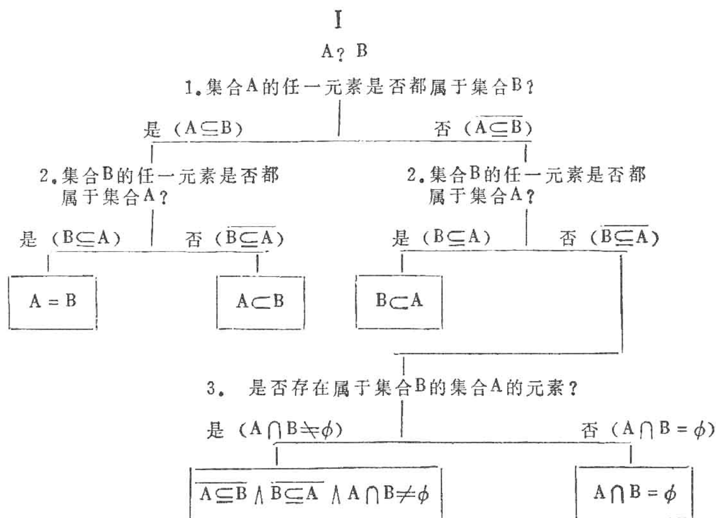
稳定性信度　用同一试卷对同一组学

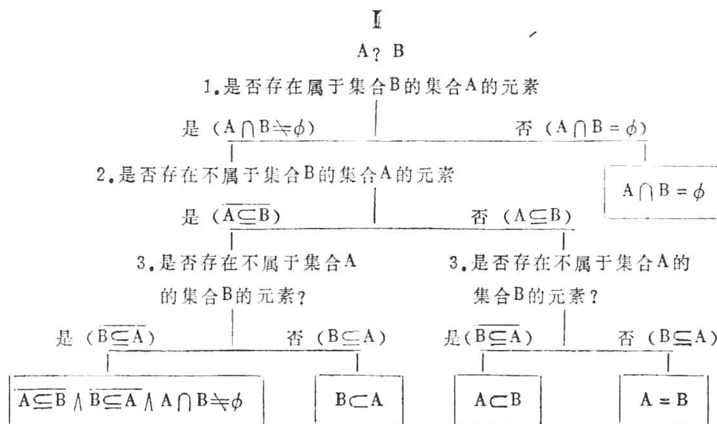
生在不同的时间先后进行两次测验，计算两次测验所得分数的相关系数，即为稳定性信度系数。实施的方法是，对一组学生进行测验A_1，经过适当的时间后，再对同一组学生进行测验A_2。两次测验使用同一份试卷A。两次测验的时距可短至几分钟，长至数年。时距太短，第二次测验易受第一次测验记忆的影响；时距太长，第二次测验易受学生知识积累，年龄增长的影响。稳定性信度最难于掌握的是两次测验间的适当时距的确定。计算稳定性信度系数的公式为

$$r_{A_1A_2}=\frac{N\Sigma xy-\Sigma x\Sigma y}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\cdot\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}。$$

式中，$r_{A_1A_2}$为测验的稳定性系数，N为参加测验的总人数，x为测验A_1的成绩，y为测验A_2的成绩。

算法化教学 五十年代以后发展起来的一种控制教学理论，其宗旨在于控制学生的学习过程，使学生不但掌握知识，同时也形成掌握知识所必需的智力技能。提出这种理论的代表人物是苏联的兰达。兰达认为，要把教学过程建成良好的控制过程，在编制教学程序时，就要以学习过程的算法模型为依据，使学习过程算法化。这里所谓算法，是指为解决某类课题，按规定程序精确完成的一系列必要的活动指令的总称（或称操作指令系统）。它把学习动作分解为一连串基本步骤，合理地导致教学任务的解决。只要按照规定的程序完成所有步骤，课题的解决是有保证的。下面列举了确定两个集合关系的算法，其中$\wedge$是合取符号，与“并且”的含义相同。





这两种算法中的每一种在解这类具体的过程中，都确定了可能的思考步骤。算法化教学，就是尽量找出各学科的算法，并要求学生掌握这种算法，从而控制学生解题的思维过程，从中学到合理的思维技能。

演示法　演示法是教师展示教具或实物，或进行示范性实验，或运用现代化教学手段（如电视或录象带等），指导学生获得感性知识的方法。演示法直观性强，能使学生获得具体、生动、真实的概念和直接经验。演示法能提高学生的学习兴趣，集中学生的注意力。对于学生理解所学的各种概念、原理，以及发展学生的观察力、想象力和思维力具有十分重要的作用。演示法的种类很多，按演示的内容分，有物体的和现象的演示，有事物发生过程的演示；按演示材料的不同来分，有实物、标本、模型的演示，有图片、图画、地图的演示，还有实验演示，幻灯、录音、教学电影等的演示。

运用演示法的要求一般有：①演示前，要认真准备直观教具，使它能更好地达到教学目的。如用彩色涂染要观察的要害部分，课前的试做等，以免课堂上出现意外情况。②演示开始，讲清演示的目的要求，使学生明确看什么，怎样看，以免视而不见。③要使全体学生都能看清演示对象，充分感知演示对象。④演示过程中，教师要通过讲解、谈话，指导学生观察、思考，随时提出观察的要求，使学生边听边观察，边思考，在获得感性认识的基础上形成理性认识，并发展学生的思维能力。⑤演示要得当适时。既不能过早，也不能过晚。过早收不到预想效果，过晚失去演示作用。要在应该演示时展示直观教具或实物，或模型。用完后，立即整理收藏，以免分散学生的注意力。

演示法在中小学数学教学中有着广泛地应用，总结出许多好经验，对大面积提高教学质量起到了重要作用。

熟练　是技能掌握的高阶段，具有下述特征。从活动结构的改变方面看，实际操作活动的熟练表现为许多局部动作联合为一个完整的动作系统，动作之间的相互干扰现象及多余动作逐渐减少以至消失。智力活动的熟练则表现为活动的各个环节逐渐联成一个整体，内部言语趋于概括化、简约化，在解决课题时，由开展性的推理转化为“简缩推理”，从活动的速度和品质来看，操作活动的熟练表现在动作速度加快，动作准确性、协调性、稳定性和灵活性上。智力活动的熟练表现在敏捷性与灵活性、思维的广度与深度，思维的独立性等品质上。从活动的调节来看，操作熟练的控制，表现为视觉监督作用大为降低，动觉控制作用加强，知觉的广度、精确性、敏锐性以及辨别力大为提高。基本动作接近自动化，动作紧张性消失。智力活动的熟练表现为神经劳动的消耗减少和内部言语过程的进行较少需要活动主体的意志努力。

数学教学中，指导学生熟练阶段的练习首先要注意培养学生认真思考的习惯和独立思考的能力。为此，教师应从学生的水平出发，提出比较新颖的困难的，同时又是学生力所能及的课题或任务，启发学生通过自己的思维将所学的知识灵活地运用在实践中。提出的课题或任务，在数量和难度方面也要考虑学生在知识经验，思维水平和能力方面的个别差异，否则不能达到启发和培养学生思维的目的。其次，教师要利用讲解和示范。讲解和示范是引导学生掌握解决课题或任务的途径、原则、方法和步骤，克服盲目的尝试和猜测，培养学生思维的逻辑和推理的严密性。当课题或任务有多种解决的可能性时，应该指导学生选择最好的解决方法。再次，要注意形成学生的多种联想，培养学生的概括能力和灵活思维的品质，使他们的技能能够广泛地迁移。只有单一的具体联想和忽视可逆联想都会造成思维狭窄、呆板。教师应注意引导学生经常把个别的特殊事例概括为一般的原则、方法，又把一般的原则、方法运用到特殊事例。

操作技能　又称动作技能。所谓“动作”是指写字、演奏、体操、操纵生产工具等等在学习活动、体育运动和生产劳动中的种种实际动作。这些动作主要是肌肉、骨骼运动和与之相应的神经系统部分的活动。在完成一项任务中，所涉及的一系列实际动作，以完善、合理方式组织起来并顺利地进行时，就成为动作技能。动作技能与心智技能是既有联系又有区别的。感知、表象、思维和肌肉运动是组成技能的必要环节。外部动作是心智技能形成的最初依据，也是它的经常的体现者。心智活动又是外部动作的调节者。在完成比较复杂的活动过程中，不仅需要心智技能，而且也需要动作技能。要确定某种技能是属于动作技能或心智技能，必须依据活动的主导成分是什么。例如写字、体操、生产劳动的操作技能是动作技能；阅读，作文、计算的技能是心智技能。

整列　把数据资料按照一定的标准进行排列。最简单的整列方法是将数据按照从大到小的顺序依次排列。整列是数据资料整理方法之一。下面是10

名学生在一次数学测验中的原始分数：86，73，57，71，70，72，89，66，71，84。这些未经整理的分数，看不出每个分数的意义，也无法了解数据变化的趋势。如将原始分数整列，按从高分到低分排列：89，86，84，73，72，71，71，70，66，57。经整理后可知，最高分为89，最低分为57；最高分与最低分相差32分。70分在分数序列中处中间偏下，但不属最低分。数据经过整列，可以提供许多有价值的信息。

整体原理　系统论基本原理，其内容是说，任何系统都是有结构的，系统整体的功能不等于各孤立各部分功能之和。结构，即系统内部各个要素的组织形式；功能，即系统在一定环境中所能发挥的作用。这个原理是普遍存在的，例如，仅仅有电阻、电容、电感这些孤立的元件，不可能显示出一个电子系统的整体功能，只有当这些元件按一定的结构联系起来，才能发挥出某种整体的功能。再如，“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”，“三个和尚没水渴”。前者的整体功能大于各部分的总和，而后者的整体功能小于各部分之和。这条原理运用于教学，主要是强调结构，注意发挥整体功能。强调结构主要有三个方面：一是学科基本结构，即重视基本概念、基本原理、基本方法的教学；二是智力结构，包括观察力、注意力、记忆力、想象力、思维力等要素，以思维力为核心；三是认知结构，即学生头脑里的知识结构，不仅是全部知识，而且还有组织这些知识的方式。良好的认知结构模式可用“竖成线，横成片”来描述，“竖成线”指的是系统结构中的纵向结构，“横成片”指的是系统结构中的横向结构。也就是说，纵向前后沟通，横向左右逢源，触类旁通。整体功能是由系统的结构来决定，即由各要素的质量及其各部分之间的联系来决定。

霍桑效应　最早引起人们对实验效应问题注意的，是霍桑效应的有关实验。在长达十年的时间里，一些研究人员在美国西部电业公司的霍桑工厂进行了一系列的实验研究。在关于工厂照明条件与劳动效率关系的实验中人们发现，三个不同特征的实验组的生产效率一般都随着照明强度的增加而提高。此后的实验又发现，在照明强度减弱的情况下，生产效率仍在缓慢而稳定地提高。于是又对工作日和工作周的时间长度作进一步的实验，仍然看到，不管工作条件变好还是变坏，生产效率总是在提高。研究分析认为，这个工厂的工人由于长期从事单调重复的机械劳动，很容易从研究人员所明显表现出来的注意关心中得到激励。在实验中，正是实验者自己对工人的特殊注意而不是照明条件或其他变量成为工人单调沉闷生活中的新鲜因素，从而产生了意想不到的效果。这种现象被心理学称为“霍桑效应”。在教育实验中，在实验被试身上常常容易发生“霍桑效应”。例如在进行教学方法改革的教学实验中，老师常常以更大的热情投入实验，学生就可能因为意识到自己正在参加实验而表现出格外强烈的学习兴趣或学习动机。霍桑效应反映了实验的某种因素对实验组的干扰影响。

赞科夫教学原则体系 Л·В·赞科夫苏联教育家、心理学家。他于1957年开始进行《教学与发展的相互关系》课题的实验研究，直到1975年出版《教学与发展》一书，对教学实验的全过程作出总结。赞科夫教学原则体系就是在长达近二十年的实验过程中逐渐形成的，其指导思想是以“尽可能大的教学效果来促进学生的一般发展”。整个体系由五条原则组成：①以高难度进行教学的原则；②以高速度进行教学的原则；③理论知识起主导作用的原则；④使学生理解学习过程的原则；⑤使所有学生（包括“后进生”）都得到一般发展的原则。赞科夫认为五条原则的指导思想和普通的教学原则有很大的区别，普通的教学原则只是要在掌握知识上取得成功的结果。并且在已经发展的基础上真正掌握知识和技巧这一设想，已被实验所证明。

第五部分

数学名人、名著、名题、其它

名 人

一 行（683—727） 中国唐代著名天文学家、数学家。一行是张遂的法名。他在天文学方面作出了重要贡献。他领导了有名的天文大地测量，编订了《大衍历》，比唐代已有的其他历法都精密，使用了近百年。他还和梁令瓒共同制造了“黄道游仪”和“水运浑仪”等大型天文仪器。一行在数学上也有贡献，他把刘焯的公式从等间距离推广到不等间距的情形，建立了不等间距二次内插法公式，即数学史上有名的“张遂内插法公式”。

丁取忠（？—1876？） 中国清朝数学家。十九世纪中期以丁取忠为首形成了一个小小的数学学术团体。他的几个弟子曾纪鸿（1848—1877）、左潜（？—1874）、黄宗宪、吴嘉兰等都在内。他们与当时有名的数学家李善兰、邹伯奇等人都有联系，他们在长沙城东北隅的白芙堂共同从事数学研究。丁取忠主编并出版了《白芙堂算学丛书》，其中有他自著书四种。在《数学拾遗》中，他给出了“百鸡问题”和同类问题的简易解法。在《粟布演草》一书中，讨论用高次方程解整存零取的复利息问题。丁取忠的著作还有《对数详解》五卷等。

小平邦彦 （Kodaira Kunihiko，1915.3.16— ） 日本数学家。在代数几何和群论方面作出了重要贡献。他推广了代数几何的一条中心定理：黎曼——罗赫定理，将其由曲线推广到曲面，还证明了狭义凯莱流形是代数流形及所谓小平邦彦消灭定理。他同其他数学家合作发表了复流形的理论，并在变形理论方面有建树。小平邦彦的上述工作推动了六十年代代数几何学的发展。晚年，他致力于数学教育工作，还编写了许多大中学教材。小平邦彦1954年荣获菲尔兹奖，1984年又荣获沃尔夫奖，成为世界上继阿尔福斯以后第二个同获这两种奖的数学家。其主要著作有《现代数学引论》等。

广中平祐 （Hironaka，Heisuke，1931— ） 日本——美国数学家。在代数几何学方面作出了杰出贡献。他最终解决了复代数簇的奇点解还原问题，并将此结果向一般的复流形推广。对于一般奇点理论他也作出重要贡献。1970年广中平祐荣获菲尔兹奖。

门纳劳斯 （Menelaus of Alex-

andria，约100 ） 希腊数学家、天文学家。他著述较多，涉及范围较广，其中《球面学》是最有影响的著作。它论述了球面三角形的基本性质，以及许多平面三角形有关定理在球面上推广所获得的结果，比较著名的“门纳劳斯定理”是这其中之一。“门纳劳斯定理”在平面几何上的表述为：设x、y、z各是三角形ABC三条边BC、CA、AB或其延长线上的点，则它们共线的充要条件是$\frac{xB}{xC}\cdot\frac{yC}{yA}\cdot\frac{zA}{zB}=1$。将其推广到球面三角上，则可得到相应的结果。书中还给出球面三角形的许多特别性质。由于门纳劳斯的工作使希腊三角术当时已达全盛时期。

门奈赫莫斯 （Menaechmus 公元前四世纪中） 希腊数学家。被誉为圆锥截线理论的奠基人。他发现用平面与圆锥母线垂直相截时，由于圆锥顶角的不同而产生不同的二次曲线。他还对这些曲线的性质进一步作了探讨，从而形成了最早的圆锥截线理论。另外，他对数的换算和几何图形的化简也作过研究，这些工作为欧几里得的《几何原本》提供了大量素材。

马尔可夫 （Марков，СтаршийАяпрей Андрéевич，1856—1922.7.20）俄国数学家。彼得堡科学院院士。在概率论方面，他在相当一般的假定下证明了中心极限定理。提出并研究了一种能用数学分析方法研究自然过程的一般图式，后称马尔可夫链。这些工作发展了概率论的新分支——随机过程论。马尔可夫创造的概率论的新的研究方向，改变了概率论的研究内容。这种理论在现代科学中具有重要的应用，使它成为与自然科学和技术直接有关的最重要的数学方法之一。在数论、函数逼近论、数理统计及数的几何等方面，马尔可夫也有重要贡献。他的主要著作有《有限差分学》、《概率演算》等70多种。

马克劳林 （Maclaurin，Colin，1698.2—1746.6.14） 英国数学家。英国皇家学会会员。十八世纪英国最有影响的数学家之一。他捍卫和发展了牛顿的微积分，证明了许多牛顿著作中未曾解释的定理，写出了最早为牛顿流数方法作出系统逻辑阐述的著作《流数论》。在研究无穷级数时，马克劳林把级数用作求积分的方法，以几何形式给出无穷级数收敛的积分判别法，领先于柯西对同一结果的发现。他还得到并证明了作为泰勒级数特例的马克劳林级数展开式。在代数学中，他创立了用行列式求解多个未知数的联立线性方程组。马克劳林曾两次荣获巴黎科学院奖金。他的主要著作有《有机的几何学》、《论牛顿的哲学发现》、《论代数》等。

马尔古利斯 （Маргулис，Г.А.1946— ） 苏联数学家。他致力于塞尔伯格猜想：“除去一个例外，格子群也都是算术群”的研究。先彻底证明了在非紧致情形下的塞尔伯格猜想，后又综合运用代数几何和数论的近代成果证明了紧致情况下的塞尔伯格猜想，由此荣获1978年的菲尔兹奖。

马斯凯罗尼 （Mascheroni，Lorenzo，1750.5.13—1800.7.14） 意

大利数学家。曼图亚皇家学会和意大利科学院成员。他对欧拉常数进行过详细推算，得到准确到32位小数的结果，后人称此为欧拉—马斯凯罗尼常数。他还将尺规作图的实质归纳为几个基本步骤，从理论上解决了著名的马斯凯罗尼圆规问题，大大推进了对几何作图问题的研究。其主要著作有《欧拉积分计算注释》、《圆规的几何学》等。

马祖尔克维奇 (Mazurkiewicz, Stefan, 1888.9.25—1945.6.19) 波兰数学家。波兰科学院、华沙科学院院士，波兰数学会会员。波兰数学学派及其代表刊物《数学基础》的创始人之一。《数学基础》杂志获得极大成功，赢得了国际信誉，成为研究数学基础的第一流的专门杂志。马祖尔克维奇在点集拓扑学和概率论等数学领域也作出了奠基性的重要工作。他的主要著作有《概率论基础》等。

王元 (1930—) 中国数学家。中国科学院学部委员。在“哥德巴赫猜想”的研究中有突出成果。他先后最早证明了(3+4)、(2+3)，又证明了(1+4)。他还同华罗庚一起开拓了用代数数论方法研究多种积分近似计算的新领域，其研究方法被誉为“华—王方法”，得到国际数学界的高度评价。

王恂 (1235—1281) 中国元代天文学家、数学家。被誉为“以算术冠一时”的人物。曾任太史令，编成《授时历》、王恂承担了其中的计算任务。他使用三次内插法，造了三次差分表；他首次采用坐标变换的办法解决太阳的赤道经度和赤道纬度的问题，并把高次方程用于历法研究。王恂还研究了球面上弧与弧的关系，这些在当时均居于世界领先地位。

王孝通 (公元七世纪初) 中国唐代数学家、天文学家。他根据当时社会实践的需要，从事数学和天文的研究，取得很大成就。《缉古算经》是他的主要著作，也是我国珍贵的数学遗产。《缉古算经》有20个问题组成，大多数题目涉及到三次方程。王孝通在世界上最早提出了三次方程的代数解法，比西方裴波那契的特殊三次方程数值解早600多年，比十六世纪意大利出现的一般三次方程解法要早8—9个世纪。王孝通未给出列方程的方法，对方程也只取正根，但他的工作已是宋元时期“天元术”的雏形。

王梓坤 (1929—) 中国数学家。中国科学院学部委员。致力于概率论中随机现象演变过程的数量关系的研究。他创建了“极限过程”的研究方法，解决了生灭过程的构造问题。在地震统计预报中，他们创造了“随机转移”、“相关区”等方法，较成功地预报了一些地区地震的发生。王梓坤对自然科学研究的方法论也很有建树，著有《科学发现纵横谈》一书。

韦达 (Viėta, Francois, 1540—1603.2.23) 法国数学家。代数学的奠基人，被誉为代数之父。他第一个有意识且系统地用字母表示数。他确立了解二次、三次、四次方程的统一方法，用一般公式来表示方程及其根的性质，特别是发现了方程根与系数的关系，即韦达定理。设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$

的根为x_1，x_2，$\cdots x_n$，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots\quad x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}。\end{cases}$$

另外，韦达对三角学和几何学也有研究，并取得了一些成果。他对天文学也有兴趣，曾设计改进过历法。韦达的著作文字深奥难懂，他去世以后经法国数学家斯寇唐整理、注释才得以流传。其主要著作有《分析方法入门》、《论方程的检查与订正》、《数学定律应用于三角形》等。

韦伊（Weil, André, 1906.5.6— ） 法国数学家。美国科学院外籍院士。韦伊是法国著名的布尔巴基学派的创始人之一，在连续群和抽象代数几何方面作出了重要贡献，其研究工作推动了现代数学的发展。他研究了拓扑群上的积分问题，开辟了群上的调合分析的新领域。他建立了严整的代数几何学体系，所著《代数几何学基础》一书，是该领域的一部经典著作。他提出的代数几何方法对解决代数数论问题具有重要意义。他证明了对于所有曲线的黎曼猜想，提出了以他名字命名的韦伊猜想。韦伊对数学史也很有研究，特别是数论史。韦伊曾获1979年沃尔夫奖。他的主要著作还有《拓扑群的积分及其应用》、《数论基础》、《阿贝尔流形和代数曲线》，以及《数论，从汉穆拉比到勒让德的历史研究》等。

韦伯（Weber, Heinrich, 1842.5.5—1913.5.17） 德国数学家。德国科学院及许多国家科学院院士，德国数学会的创始人之一。韦伯的研究涉及到代数数论、代数函数、代数几何学、数学物理等领域。他建立了函数论和微分方程论中著名的韦伯函数。他的《代数教程》三卷，系统地总结了二十世纪以前代数及其相邻学科的发展情况，促进了该学科的发展。他的《数学物理中的偏微分方程》一书二卷，在二十世纪的几十年中是该领域必备的参考书。韦伯还是《初等数学百科全书》的编纂者之一。

韦塞尔（Wessel, Caspar, 1745.6.8—1818.3.25） 丹麦数学家。他完整地给出复数的几何意义，并给予合理解释。1797年他在题为《方向的解析表示，特别应用于平面和球面多边形的测定》的论文中，引进了现在所谓的复平面概念。韦塞尔建立的复数表示法，除虚数单位的符号不同外，和现代复数平面的表示法完全一致。他定义的几种运算也一直沿用至今。韦塞尔还利用向量的几何表示法来解决几何、三角问题。历史上与韦塞尔各自独立得到复数几何表示法的还有瑞士的数学家阿尔冈和德国著名数学家高斯。

韦罗内塞（Veronese, Giuseppe, 1854.5.7—1917.7.17） 意大利数学家。山猫国家科学院院士，意大利多个学会会员。他是最早研究非阿基米德几何学的数学家之一，曾证明了阿基米德公设的独立性。韦罗内塞深入研究了多维空间的射影几何学，

也是该学科的主要奠基人。韦罗内塞还是数学教育家，培养了一批有名的数学家。

开普勒（Kepler,Johannes，1571.12.27—1630.11.15）　德国天文学家、数学家、物理学家。他的突出贡献是发现行星运动三大规律。开普勒的行星运动规律对于牛顿万有引力定律的发现起了关键性的作用，在一定程度上左右了人们对整个世界的认识。开普勒还是早期微积分的先驱者之一，他用通俗的语言引入了无穷大、无穷小概念。他研究了各种旋转体的性质，讨论了90多种各类体积问题。他还研究了二次曲线的相互转化问题，提出了判别一个变量极值的方法等等。开普勒的主要著作有《新天文学》、《宇宙的和谐》、《天文学的光学部分》、《酒桶新立体几何》等。

扎德（Zadeh,Lotfi Asker，1921.12.4—　）　美国数学家。长期从事《数学分析应用》、《计算机与系统科学》、《统计物理学》、《国际模糊集合与系统》等数学杂志的编辑工作。1965年发表了论文《模糊数学》、标志着该学科的成立，以后他对模糊数学的一些基本理论及应用作了进一步探讨，使该学科迅速发展，并在决策论、系统信息、图象识别、人工智能、以及语言、逻辑、医学、生物学等多学科、多领域获得广泛应用。同他人合作有专著《线性系统论》、《系统论》等。

扎里斯基（Zariski，Oscar，1899.4.24—　）　苏联——美国数学家。在代数几何与拓扑学方面有重要贡献。他以赋值论方法来处理代数曲面的奇性分解问题而荣获1981年沃尔夫奖。其主要著作有《交换代数》两卷（与塞缪尔合著）、《代数曲面》等。

比丰（Buffon Georges Louis Leclerc，1707.9.7—1788.4.16）　法国自然科学家。法国科学院院士，曾任巴黎植物园园长。他是进化论的前驱之一，主要数学贡献在概率论方面。他在1777年印行的一篇论文《能辩是非的算术试验》中，引进了几何概率。几乎每一本现在概率论教科书都必定引用的"投针问题"，就首次出现在这篇论文中，因此这类问题也被称为"比丰投针问题"。比丰还以研究自然博物史闻名于世，其著作《自然史》计44卷，是他几十年研究的结晶。该著作的后8卷是他去世后，由其学生们完成的。

比奥（Biot，Jean Baptiste，1774.4.21—1862.2.3）　法国物理学家、数学家。巴黎科学院、彼得堡科学院院士。比奥在数学上的成就主要在解析几何方面，他建立了三种圆锥曲线的标准方程及其切线方程的简单形式。他还注意把数学方法应用到物理学和天文学方面。1804年他初步建立了热传导的数学理论，后该理论经数学家傅立叶进一步发展完善。在物理学方面，他同别人共同发现，并经数学家拉普拉斯用数学分析方法进一步推广得到比奥—萨伐尔—拉普拉斯定律，这是现代电磁理论的基本定律。他提供的测定糖浓度的非破坏性方法，在化学分析中也很重要。比奥曾获皇家协会朗福德奖章。其著作甚

丰，主要著作有《解析几何论文》、《物理天文学初阶》等。

比德（Beda, Venerabilis, 672—735.5.26） 英国学者。他一生主要在修道院度过，被尊为比德大师、"英国文化之父"。他是一个不知疲倦的编纂者，把一切可资利用的古代学术尽可能地搜集起来，为古代学术的流传作出了贡献。他写过算术著作，研究过历法与指头计算方法，完整地叙述了手指计数方法及其在各种计算中的应用。当时，对耶稣复活期的推算是教会讨论最热烈的问题之一，据说比德就是最先求得"复活节"的人。他的著作《论指示语》，是人们研究古代手指计算法或符号法的源泉。

比尔吉（Bürgi, Joost, 1552.2.28—1632.1.31） 瑞士数学家、天文学家。曾做过开普勒的助手，作了大量简化计算和改进仪器的工作。他很可能独立于斯蒂文使用了小数点（有时也用圆弧代替）。他最先掌握了对数思想，他所发现的对数体系，相当于以e为底的自然对数，也可能早于纳皮尔。他花了八年的时间编制了一个对数表，实际上相当于给出一个反对数表。他的主要著作有《算术》等。

切萨罗（Cesaro, Eraesto, 1859.3.12—1906.9.12） 意大利数学家。他致力于内蕴几何学的研究，其著作《内蕴几何学教程》是该学科的奠基作。他一生共有论著259种，广泛涉及拓扑、符号代数、数学分析、数论、概率论、统计几何等若干数学领域。其中在内蕴几何学中以他的名字命名的有"切萨罗曲线"，在亚级数理论中有"切萨罗求和法"等。

切比雪夫（Чебыщев Пафнутий Пъвович, 1821.5.26—1891.12.8） 俄国数学家、力学家。彼得堡科学院及许多国家科学院院士。他结合自然科学技术实践研究数学理论，许多科学创造具有重要的实用价值，在诸多数学领域及邻近学科中他都作出了卓越贡献。他是函数构造理论的创始人。他在数论方面获得的成果为数论的研究开辟了新的方向。他对概率论的研究，使概率论的发展进入了一个新阶段，形成了一个由他的直接继承者所组成的俄国概率论学派。他所建立的正交多项式的一般理论是数学分析的主要研究方向。对内插法理论的发展他也作出了较大贡献。切比雪夫曾获法国荣誉团勋章，苏联科学院1944年设立了切比雪夫奖金。他的著作分别被收入切比雪夫全集和论文集中。

瓦尔德（Wald, Abraham, 1902.10.31—1950.12.13） 罗马尼亚—美国数学家。其最大贡献是创立了统计判决函数理论。在这个理论中，他把推断程序的全体命名为判决函数空间，第一次明确地定义它为一个集合；他还定义了统计推断程序的损失函数，证明了完备类定理。瓦尔德还使统计理论与对策论结合起来，并在统计学中引进了极大极小原理。以瓦尔德命名的有概率论中的一个恒等式以及数学规划与运筹学中的准则等。他的主要著作有《序贯分析》、《统计决策函数》等。

冈特（Gunter, Edmund, 1581—1626.12.10） 英国数学家。主要从

事应用科学的研究，擅长计算的化简，他首先推出了三角函数正弦、正切常用对数表，并引入了余弦、余切概念。冈特是对数计算尺的最早创制者，他设计了一种含有正弦、正切对数刻度的函数尺，化乘除为加减的运算，被称为“冈特尺”。他还发明了一种用于测量田亩的工具被称为“冈特链”。冈特的上述工作对人们的生产实践与技术改造起了重要促进作用。他的主要著作有《三角法则》和《函数尺》等。

贝克（Baker, Alan, 1939.8.19— ）　英国数学家。英国皇家学会会员。贝克的主要贡献在数论方面，他从超越数论开始，解决了数论中十几个困惑数学家为时已久的难题，在数论的各个分支里都取得了重大成果。比如，他肯定地解决了希尔伯特的第10个问题；他肯定了类数为1的虚二次数域只有9个，彻底解决了高斯时代留下的老问题等等。1970年贝克荣获菲尔兹奖。他的专著《超越数论》虽然页数不多，却得到高度评价。

贝斯（Bayes, Thomas, 1702—1761.4.17）　英国数学家。英国皇家学会会员。贝斯自学成才，对概率论有重要贡献。他建立了条件概率的贝斯定理，以后成为统计推断的理论基础。贝斯还提出一系列针对特殊性质的逆概率问题的公式，被誉为“归纳地”运用数学概率，即“从特殊推论一般，从样本推论全体”的第一人。在关于微积分基础的大论战中，贝斯积极撰文反抗贝克莱主教对微积分的攻击。贝斯的主要论文和文章有《机会学说问题试解》和《流数术说入门》等。

贝蒂（Betti, Enrico, 1823.10.21—1892.8.11）　意大利数学家。曾任比萨大学教授兼校长。贝蒂著有关于拓扑学的开创性论文，法国数学家庞加莱曾引进“贝蒂数”这一概念，以纪念他在这方面的工作。贝蒂对由法国数学家伽罗瓦所发展的方程论首次作出严谨的阐述，得到了若干代数方程可解性的重要结果，为古典代数学向抽象代数学发展作出了贡献。贝蒂对椭圆函数、物理数学也有研究，并取得一定成就。

贝尔曼（Bellman, Richard Ernest, 1920.8.26—1984.3.19）　美国数学家。从1950年起开始研究最佳决策问题，即由最初决策及以后一系列决策构成的“决策链”，怎样才是最佳的。他设计了一种数学技巧叫动态规划。1957年他写成《动态规划》一书，标志着这一新的数学分支正式创立。他把动态规划的方法应用于变分法、自动控制、近似理论、运筹学，解决了大量实际问题。以他的名字命名的函数方程、不等式，在变分法及微分方程中，也分别起着重要作用和有着广泛应用。1970年，贝尔曼荣获美国数学会与美国工业和应用数学协会颁发的第一届维纳应用数学奖。贝尔曼的主要著作还有《微分方程解的稳定性理论》、《不等式引论》、《应用动态规划》等。

贝塞尔（Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784.7.22—1846.3.17）　德国天文学家、数学家。贝塞尔最早对常微分方程 $x^2y''+xy'+(x^2-$

n^2) $y=0$（又称贝塞尔方程）的解作了系统研究，得到有名的第一类和第二类贝塞尔函数。该函数在应用数学、物理及工程上都是必不可少的工具。贝塞尔最重要的贡献在天文学方面。他24岁被聘，任新建的柯尼斯堡天文台台长。他写成的《天文学基础》一书，被认为开辟了实验天文学的新纪元。他着手编制包括75000颗星的基本星表，后经他人扩充，成为著名的《波恩巡天星表》。他对天鹅座61号双星进行过观察，并计算出了它们的距离。在对天狼星波状运动进行一系列观测后，他得出天狼星有一个伴星的结论，不久则被他人所证实。

贝尔特拉米（Beltrami, Eugenio, 1835.11.16—1899.6.4） 意大利数学家。山猫学院院士并担任过该院院长。在非欧几何学方面，他作了一些有助于消除当时数学界对于非欧几何误解的研究工作，又把非欧几何的表示推广到$n>2$维流形，并研究了某些特殊的伪球面，扩大了萨凯里在非欧几何方面研究成果的影响。在微分几何方面，他论证了所谓微分参数在曲面论中的作用，使其成为微分几何中不变式理论应用的起点。在几何学中，以贝尔特拉米的名字命名了许多概念和公式。在解析函数论、数学物理等方面，贝尔特拉米也有较大贡献。他的主要著作有《非欧几何解释的尝试》等。

牛顿（Newton, Isaac, 1643.1.4—1727.3.31） 英国数学家、物理学家、天文学家。英国皇家学会会员，1703年任皇家学会会长，并连选连任到去世为止。十七世纪科学革命的顶峰人物。牛顿平生有三大发明：流数术《微积分》、万有引力和光的分析。他在前人工作的基础上，同莱布尼兹几乎同时创立了微积分学，开辟了数学的一个新纪元。在力学方面，他总结出机械运动的三大基本定律，发现了万有引力定律，建立了经典力学体系，正确反映了宏观物体低速运动的客观规律，这是人类对自然界认识的一次飞跃。在光学方面，他提出了光是运动着的微粒组成的观点，提出色光是光分解的结果；他还首次指出存在着周期性的光学现象（如牛顿环）并进行了定量讨论。牛顿的主要著作有《流数术方法和无穷级数》、《光学》、《自然哲学的数学原理》等。

毛罗利科（Maurolico, Francesco, 1494.9.16—1575.7.21） 意大利数学家、天文学家、工程师。在许多学科有贡献。在数学中，他首次使用了正割函数，给出0°—45°的正割函数表。据传也是他第一次正确使用了数学归纳法。毛罗利科还翻译、整理、出版了大量古代文献，其中也包括了阿基米德的著作。他还将阿波罗尼奥斯的圆锥曲线理论应用于物理学和天文学。其数学论著主要集中在他的《数学文集》中。

丹尼尔·伯努利（Daniel, Bernoulli, 1700.2.9—1782.3.17） 瑞士数学家。约翰·伯努利的次子。英国皇家学会会员、彼得堡科学院名誉院士。他奠定了数学物理方法的基础。在概率论、微积分学、微分方程、级数理论、流体动力学等方面均

有重要贡献。他首次将概率论用于人口统计，发表了第一个正态分布表。他发现的伯努利定理是流体动力学的一个基本定理。丹尼尔·伯努力在学术界享有盛名，曾获法国科学院奖金达10次之多。

乌拉姆（Ulam, Stanistaw marcin, 1909.4.13—1984.5.13）美国数学家。美国科学院和美国科学艺术研究院院士，曾任美国总统科学顾问委员会顾问。早期乌拉姆在拓扑学和泛函分析方面有贡献，他研究并指出了W—加性测度、实值可测基数及勒贝格测度之间的关系。他同冯·诺依曼合作，首次引进了随机遍历定理，提出了所谓“蒙特卡罗法”。乌拉姆是美国导弹计划的发起人之一，他参加了第一颗氢弹的计算工作，并为此作出了重要贡献。乌拉姆还出版了一本向数学家提出若干待解决问题的书，及一本自传性的著作《一个数学家的遭遇》。

乌雷松（урысон, Павел Самуилович, 1898.2.3—1924.8.17）苏联数学家。在拓扑学方面有重要贡献。乌雷松是维数论的创始人之一。他研究并得到拓扑空间和度量空间一般理论中的一系列基本结果，同他人一起乌雷松还引进了绝对闭空间和局部紧空间的概念，研究了它们的拓扑性质。乌雷松在积分方程化、复变函数论和几何中的凸体理论等方面也有建树。

方中通（1633—1698）　中国清朝数学家。曾在南京跟随波兰传教士穆尼阁学习科学知识。他收罗中西算法，编成《数度衍》二十四卷，较系统地介绍了中西初等数学。书中还详细介绍了纳皮尔的对数，但他用“倍加隔位合数法”来说明，讲得不很清楚。梅文鼎曾评价过《数度衍》一书，称：“于《九章算术》之外，蒐罗甚富”。方中通还著《几何约》，专门讨论欧几里得的《几何原本》。

巴罗（Barrow, Isaac, 1630.10—1677.5.4）　英国数学家、物理学家。他是英国剑桥大学第一个“路卡斯数学教授”，也是首批英国皇家学会会员。巴罗是牛顿的老师，当他发现牛顿的学识确已超过自己以后，主动让贤，将“路卡斯数学教授”的职位让给牛顿，成为数学史上的佳话。巴罗是微积分学前史上的主要人物之一。他发展了确定切线的一种很接近于微积分的方法；最先认识到微积分中的积分与微分互为逆运算；对于微积分的产生有着重要影响。巴罗还翻译了欧几里德的《几何原本全十五篇》。在几何学、圆锥曲线论和光学等方面巴罗也有建树。其主要著作有《数学讲义》、《几何讲义》、《光学讲义》等。

巴歇（Bachet de Méziriac Claude—Gaspar 1581.10.9—1638.2.26）　法国数学家。法国科学院院士。数学游戏的先驱之一。他不仅将丢番图的《算术》由希腊文译成拉丁文出版，并在其中也收入了他自己对丢番图分析和数论的一系列研究成果。他提出的巴歇定理：每一个整数都可以表为不多于4个平方数的和，在1770年由拉格朗日证得。

巴贝吉（Babbage, Charles, 1792.12.26—1871.10.18）　英国教学家、

发明家。英国皇家学会会员。他曾参与创建了剑桥大学分析协会、天文学会、伦敦统计学会等组织，向英国介绍欧洲大陆在数学方面的成就，特别是引进分析学的成果。巴贝吉是现代自动化计算机的创始人。他曾制成一台小型计算器，能进行8位数的某些数字计算。后发明了分析机（现代电子计算机的前身）的原理，并设计了一台容量为20位数的计算机。限于条件当时未能制成，1855年斯德哥尔摩的舒茨公司按他的设计造成。

巴拿赫（Banach, Stefan, 1892.3.30—1945.8.31） 波兰数学家。波兰科学院院士、乌克兰科学院通讯院士，曾任波兰数学会主席。他创立泛函分析的赋范空间理论，得到了对现代数学有重要意义的巴拿赫空间。证明了作为泛函分析基础的三个定理：哈恩—巴拿赫扩张定理；巴拿赫—史坦因豪斯定理；巴拿赫逆算子定理。他还给出了赋范空间一般定理的许多应用。巴拿赫对近代泛函分析的发展作出了重大贡献。对其它数学分支巴拿赫也多有建树。1939年，他获波兰科学院重大科学奖。为纪念他，里沃市人民还将一条街道命名为巴拿赫街。巴拿赫的主要著作有《线性运算理论》等。

巴塔尼（Battāni, al, 858?—929） 阿拉伯天文学家、数学家。在三角学发展史上作出了重要贡献。他引入了正切、余切的概念；造出了从0°到90°间隔1°的余切表；发现了球面三角边的余弦定理 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cdot\cos A$；并大量运用代数方法处理三角问题。巴塔尼也是中世纪欧洲人们最熟知的阿拉伯天文学家。他长期从事准确度颇高的天文观测工作，发现了岁差；测定了回归年长度为365日5小时46分24秒（今值为365日5小时48分46秒），黄赤交角为23°35′41″（今值为23°26′21″）；他还编制过精确的日月运行表，创造过新型的浑仪等等。他的许多天文成果被哥白尼大量地吸收于他的著作《天体运行论》中。

巴贝尔巴赫（Bieberbach, Ludwig, 1886.12.4—1982.9.1） 德国数学家。在函数论、微分方程理论和几何学等方面有贡献。他对单位圆内全纯单叶函数族进行了定量研究，他同芬兰数学家奈望林纳共同建立了单位圆内单叶函数的一个系统的理论。1916年他基于各种畸变定理中的极值函数，提出了著名的巴贝尔巴赫猜想，经不少数学家的努力，直到他去世后的第二年才被美国的布兰哲斯解决。在几何学中巴贝尔巴赫研究了几何作图的可能条件，证明了如果利用直角尺、圆规，则三等分任意角和立方体倍积问题是作图可能的。他的主要著作有《函数论教程》、《几何作图理论》等。在纳粹统治时期，他留在德国，笃信希特勒的国家主义，高喊《德意志数学》而声名狼籍。

孔涅（Connes, Alan, 1947.4.1— ） 法国数学家。法国科学院院士。主要从事算子代数的研究，成绩卓著。他从根本上解决了冯·诺伊曼留下的代数分类大问题，他的研究成果使他荣获1982年菲尔兹奖，并连续多次获国家等各级科学奖。

孔多塞（Condorecet, 1743.9.17

—1794.3） 法国数学家。法国科学院院士。他对一切科学研究都感兴趣，被誉为百科全书式的学者。在数学上，他曾为不列颠百科全书撰写过数学分析的条目，研究过积分计算及其相关的各种数学问题。他设想搞出一种适合于求解各种常微分方程的方法，而仅用微分、消元和替换。虽未能如愿，但后人却一直为此而努力。他发表的《简论分析对从众多意见中作出决断的概率的应用》，是概率史上极有价值的卓越论文。孔多塞还是第一个将数学应用于人类社会的科学家，他在若干学科中作了探索和预言。其主要数学著作有《积分计算》等。

古尔萨（Goursat, Edouard—Jean—Baptiste, 1858.5.21—1936.11.25） 法国数学家。法国科学院院士，曾任法国数学会主席。古尔萨是十九世纪末法国研究数学分析的先驱。他在函数论、伪超椭圆积分和微分方程等方面的贡献影响了法国数学学派。他改进了柯西解析函数的定义，获“柯西—古尔萨定理”。他还对偏微分方程中存在性定理的证明做了改进。古尔萨的主要著作有《偏微分方程的积分法讲义》、《代数函数及其积分的理论》等，他编著教材《数学分析教程》，在许多国家被长期用作高校课本。

本迪克松（Bendixson, Ivar Otto, 1861.8.2—1935） 挪威数学家。在微分方程论和集合论等方面有贡献。他是微分方程定性理论的创始人之一。在微分方程解的拓扑性质的研究中，他建立了关于方程 $Xdx+Ydy=0$（X、Y是多项式）具有限个极限环的定理，被称为本迪克松定理。在常微分方程定性理论的研究中，还有著名的本迪克松球变换和本迪克松准则等。他的主要论文是《由微分方程定义的曲线》等。

石根华（1939— ） 中国数学家。在拓扑学的研究中，他对不动点理论有重要贡献。他的《最少不动点和尼尔生数》论文，被当时国外数学家认为是不动点理论的最新成果，是拓扑学研究中的一个新的“学派”。他还重视拓扑学在生产实际中的应用研究，较成功地解决了地下塌方问题的比较安全的计算方法和支持方案，使塌方尽量减少等实际问题。

布尔（Boole, George, 1815.11.2—1864.12.8） 英国数学家、逻辑学家。英国皇家学会会员。他第一个用数学方法研究形式逻辑推理问题。布尔的基本观点是，逻辑中表述的符号化会使逻辑本身更为严密。他首先把概念、判断形式用代数里的符号和运算公式表示，同时赋予代数里的符号和运算以逻辑意义，从而创立了布尔代数，亦称逻辑代数。这项成就给十九世纪的数学带来了新的转机，并成为一百年后计算机理论的基石。由于开关电路和布尔代数之间存在着形式上的一致，布尔代数在电子计算机和信息控制装置的设计中发挥了越来越大的作用。布尔还将他的逻辑应用于概率，弥补了早期概率理论的某些缺陷。布尔的主要著作有《逻辑的数学分析》、《思维规律的研究》、《微分方程》、《差分演算》等。1857年布尔荣获英国皇家学会奖章。

布里尔（Brill, Alexander Wil-

helmvon, 1842.9.20—1935.6.8) 德国数学家。曾任德国数学家协会主席。他是代数函数的代数几何方向理论的奠基人之一。他还是几何模型制作专家。布里尔的主要著作有《相对原理》、《代数曲线》等。

布里松(Bryson of Heraclea, 约公元前450年) 希腊数学家。在解决化圆为方的问题中，他进一步发展了“穷竭法”。他同时采用圆的内接和外切多边形来趋近圆的面积，认为，圆面积为二者的算术平均数。在以后亚历士多得和柏拉图的著作中曾多次提到布里松的名字。

布利斯(Bliss, Gilbert Ames, 1876.5.9—1961.5.8) 美国数学家。曾任美国数学会主席，是许多科学团体成员。布利斯主要从事变分学的研究，他是变分理论的奠基人之一。他的主要著作有《基本存在定理》、《变分学》、《代数函数》等。

布洛赫(Bloch, André, 1893.11.20—1948.10.11) 法国数学家、物理学家。在复变函数、数学物理及物理学方面都有较大贡献。他证明了复变函数论中后以他的名字命名的布洛赫定理。其中所得到的布洛赫常数被认为是复变函数论中最重要的常数之一。从布洛赫定理出发，他还证明了超越整函数的反函数的黎曼曲面包含一个具有任意大半径的圆盘。布洛赫曾获1948年巴黎科学院奖金。

布龙克尔(Brouncker, William, 1620—1684.4.5) 英国数学家。皇家学会的创办者之一，是该学会的首任主席。布龙克尔曾导出π的连分数表达式$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\cdots$由此算出$\pi$的值精确到10位小数。另外，布龙克尔也从事过求抛物线、摆线的长，以及求双曲线、圆的面积的研究，并有一定成就。

布劳威尔(Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1881.2.27—1966.12.2) 荷兰数学家。荷兰科学院、巴黎科学院和戈丁根科学院院士，伦敦皇家学会、美国哲学学会会员。布劳威尔是数学基础研究中直觉主义的主要代表。这一学说认为数学认识的来源是数学思维中所固有的一种带构造性的直觉，不依赖于经验和逻辑。这是现代哲学—数学中的一种唯心主义观点。在拓扑学和群论方面，布劳威尔也取得了一系列重要成果。

布里格斯(Briggs, Henry, 1561.2—1630.1.26) 英国数学家。后半生开始从事对数研究，是较早认识对数重要价值的科学家。曾建议纳皮尔采用以10为底的常用对数，以便计算。在他的《对数算术》一书中，布里格斯给出了1—20000及90,000到100,000的14位以10为底的对数表。此外，他还制作了正弦、正切对数表。

布拉施克(Blaschke, Wilhelm Johann Eugen, 1885.9.13—1962.3.17) 德国数学家。德国科学院院士。布拉施克是汉堡几何学派的创始人和领导者。他将解析工具用于几何学，主要的研究内容是微分与积分几何学和动力学。他是拓扑微分几何学的创立者之一。在复变函数方

面，有著名的布拉施克乘积和布拉施克定理。他曾获德意志民主共和国的国家奖金。其主要著作有《圆与球》、《微分几何讲义》、《积分几何讲义》、《爱因斯坦相对论的基础》等。

布雷德沃丁（Bradwardine, Thomas, 1290？—1349.8.26）英国数学家、神学家、哲学家。曾任坎特伯雷主教，也是牛津大学的神学教授，教授神学、哲学和数学，被誉为十四世纪英国最杰出的数学家。他研究了运动、连续、离散和无穷等概念，还给出了无穷大和无穷小的推导，巧妙地接触到现代数学的一些基本概念，甚至首先使用了“连续统”这个概念。布雷德沃丁还发现了多角形的一些几何性质及诸角和的定理。他的主要著作有《几何的探索》、《连续的论著》、《观察几何学、论圆的求积法》等。前两部书由于涉及到运动和变化，故有人称为“亚数学分析”。

布尼亚科夫斯基（Буняковский, Виктор Яковпевич, 1804.12.16—1889.12.12） 俄国数学家。彼得堡科学院院士，并长期担任该院副院长。他数学研究领域广阔，内容涉及到数论、概率论、数学分析、几何学和代数学。他对概率论的贡献尤为突出。除对概率论本身的独创性论述外，还阐明了该学科的发展历史及在人口统计和保险事业中的应用。他为此发表的多篇论文，促进了概率论在俄国的发展，并为它的实际应用开辟了道路。在微积分方面，他类比柯西不等式得到了一个被称为布尼亚科夫斯基不等式。布尼亚科夫斯基编著了一系列中学数学教科书，对普及数学教育也作出了重要贡献。彼得堡科学院在他去世以后，建立了以他的名字命名的优秀数学著作奖。他的主要著作有《概率论的数学基础》、《纯粹和应用数学辞典》、《算术》、《算术大纲和提要》等。

平凯莱（Pincherle, Salvatore, 1853.3.11—1936.7.10） 意大利数学家。创建了意大利数学协会并荣任首届主席，还担任过第三届国际数学家大会主席。平凯莱是泛函分析理论的奠基人之一。他还关心数学教育工作，编写了许多颇有声望的中学数学教科书。

卡门（Kármán, Theodore von, 1881.5.11—1963.5.6） 匈牙利—美国数学家。开创了数学和基础科学在航空、航天和其他技术领域中的应用。是近代空气动力学的奠基人之一。他在数学物理方面作出了重大贡献，以他的名字命名的有卡门势理论、卡门条纹、卡门非线性方程等。卡门还是国际科技合作的积极倡导者，主持开过各种有关的国际会议，对世界有深远影响。其主要著作有《工程中的数学方法》等。

卡诺 （Carnot, Lazare—Nicolas—Marguerite, 1753.5.13—1823.8.2） 法国数学家、力学家。他试图论证无穷小计算的正确性，是十九世纪将数学分析严密化的前驱。卡诺还是复兴射影几何的积极倡导者，为使射影几何从分析中脱离出来，并使其成为纯粹数学中的一个分支作出了重要贡献。他对几何在力学中的应用有创见，对数学在实际中

的应用，特别在军事上的应用也有贡献。其主要著作有《关于无穷小分析的玄想》、《几何图形的相互关系》、《位置几何学》、《横截线论》等。

卡瓦列里(Cavalieri(Francesco) Bonaventura, 1598—1647.11.30)

意大利数学家。他提出了线有无穷多个点组成，面有无穷多条线组成，体有无穷多个面组成的假设。得到了以他名字命名的定理：二同高的立体，如果在等高处的截面积恒相等，则体积相等；如截面积成定比，则体积之比等于截面积之比。但此定理的发现晚于我国祖暅1100年。卡瓦列里还用此计算一些曲边图形面积，求得并证明一些旋转体的表面积和体积公式。他的上述不可分量方法标志着积分方法的一个重要进展，对于微积分的创立有重要影响。其主要著作有《用新方法促进的连续不可分几何学》、《六个几何问题》等。

卡尔达诺（Cardano, Girolamo, 1501.9.24—1576.9.21） 意大利学者、数学家、天文学家。他第一次公布了一般三次方程求根公式，后称“卡尔达诺公式”。但由于这是从数学家塔尔塔利亚处以守密誓约换得的结果，虽其中也不乏自己的见解和证明，也为世人所不齿。卡尔达诺在解方程的过程中，发现了根与系数存在着密切关系，也注意到虚根成对问题，从而形成了代数方程论的一些主要研究内容，对后世影响很大。另外，卡尔达诺也是概率论的早期探索者之一，对流体力学、压力定律等也有创见。他一生著述甚丰，多达200余种，内容涉及数学、天文、哲学、医学、音乐等多个学科。其中较主要的数学著作有《算术实践与特殊度量》、《大术》等。

卢津（Лузин, Николай Николаевич, 1883.12.9—1950.2.28）

苏联数学家。苏联科学院院士。1928年被选为在意大利尼亚城举行的国际数学家代表大会的副主席。在莫斯科大学任教期间，他主持了实变函数论的讲座，为创立函数论莫斯科学派奠定了基础。他同苏斯林、П、С亚历山德罗夫一起创立了数学的一个新分支——描述性函数论。其《解析集合论及其应用》一书是一部关于函数论的重要著作。他还为高等学校编写了多部教科书，如《实变函数论》、《微分学》、《积分学》等。其中《实变函数论》作为国内外高等学校教材风行了二十几年。

史密斯 （Smith, Henry John Stanley, 1826.11.2—1883.2.9） 英国数学家。英国皇家学会会员，曾任不列颠协会数学部理事长。史密斯在数学上的主要贡献在数论方面，他的不少创见不断丰富和发展着数论理论，并因此而荣获法国科学院的奖金。史密斯在数学的其它领域也有贡献。他的论文集由格莱舍编纂，题名为《史密斯数学论文汇编》。

史蒂斯楚斯（Pitiecus, Bartholomeo, 1561.8.24—1613.7.2）

德国数学家。撰写了《三角学》一书，这是当时最优秀的三角学著作。他首次引入了“三角学”一词，对欧洲三角学的发展有重要影响。他还艰苦地修订、完善并出版了雷蒂库斯的三角函数表，使其达到了很高的精确

度。

丘成桐（1949— ） 中国数学家。他成功地解决了微分几何中著名的“卡拉比猜想”，此猜想源于代数几何，是由卡拉比于1954年提出的关于高维空间曲率的一个猜想。丘成桐还证明了广义相对论中的正质量猜想，并在高维闵科夫斯基问题、三维流形的拓扑学以及极小曲面等方面有创见。由此，丘成桐荣获1982年菲尔兹奖。他是华人中获此项奖的第一人。丘成桐还获得包括1981年美国数学会颁发的维布伦奖在内的若干奖。

外尔（Weyl, Claude Hugo Hermann, 1885.11.9—1955.12.8） 德国数学家。美国科学院院士，英国及欧洲许多学会成员。他是希尔伯特的学生，深受其影响，曾被人称为希尔伯特“数学之子”。外尔在数学的许多领域均有重要贡献，特别在积分方程的解析理论、黎曼曲面理论、相对论、联络空间微分几何学、群表示论及其在量子力学上的应用等方面，都取得突出成就。外尔一生共撰写了150种书和重要论文，其中不少是很有影响的数学文献，如外尔关于李群表示理论的著作等。1927年外尔荣获罗巴切夫斯基国际奖金。其主要著作有《黎曼曲面的概念》、《空间、时间、质量》、《连续统》、《经典群》、《数学哲学和自然科学》、《对数》等，1968年出版了《外尔全集》1—4卷。

外尔斯特拉斯（Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 1815.10.31—1897.2.19） 德国数学家。现代函数论的创立人之一。他把严格的论证引进了分析学，即把分析建立在实数系的严密发展基础之上，对十九世纪数学产生了很大影响。在分析学中，他完成了由柯西引进的用不等式描述的ε—δ定义；在分析学中还以他的名字命名了函数逼近定理、一致收敛符号及外尔斯特拉斯函数。外尔斯特拉斯对于解析函数论、周期函数、实变函数、椭圆函数、阿贝尔函数、微分几何、线性代数以及变分法理论等也都作出了贡献。如在线性代数中，他建立了初等因子理论，并用来化简矩阵，对线性微分方程理论具有重要意义等。外尔斯特拉斯还是著名数学教育家，培育了一大批知名的数学家。

冯·诺伊曼（Neumann, John von, 1903.12.3—1957.2.8） 美国数学家。二十世纪的数学几乎与他的名字分不开。20岁左右，他研究的重点是集合论，他用序数严格地定义基数（势）的概念，这一方法沿用至今。30年代，他在连续群、测度论和泛函分析方面作出了里程碑式的工作。他与马瑞合作开展了算子代数的研究（现称冯·诺伊曼代数），至今仍是世界名家研究的课题。因为它为现代的基本粒子理论提供了合适的框架。冯·诺伊曼在数学物理方面的著作《量子力学的数学基础》，现已成为经典著作。他在统计物理上的论文《准各态历经猜想的证明》，被评为“过去四分之一世纪最有影响的数学分析成就之一”。在他生命的最后十年，冯·诺伊曼致力于计算机科学，他是数字计算机设计的奠基人。他还参于了原子弹的制造，并在理论

与计算中作出了重大贡献。冯·诺伊曼的才华还表现在创立博奕论上，这是现代数学中崭新的一门学科，它的基本思想、研究技巧、逻辑结构是全新的，它既有极强的实用性，又有很高的数学价值。冯·诺依曼的主要著作有《计算机与人脑》、《博奕论与经济行为》（与摩根斯坦合著）等。

兰道（Landau, Edmund Georg Herman, 1877.2.14—1938.2.19） 德国数学家。德国几个科学院的院士，也是圣彼得堡、罗马科学院院士和伦敦数学会成员。兰道用更简单的方法证明了高斯提出的素数定理，并使之能应用于代数数域上的理想素数分布。他首次系统地阐述了解析数论的内容。兰道的上述研究成果，使他对解析数论和单变量解析函数论作出了重要贡献。他的主要著作有《素数分布论讲义》、《分析基础》等。兰道行文简洁、精练，被誉为兰道风格。

兰登（Landen, John, 1719.1.23—1790.1.15） 英国数学家。英国皇家学会会员。他对椭圆积分有重要贡献，其中突出的结果是以他名字命名的兰登点、兰登变换和兰登定理。他提出利用两个椭圆的弧长来求双曲线的弧长的方法，对椭圆积分的发展有积极意义。他还试图使微积分摆脱无穷小概念的困难，而建立在代数和几何的可以接受的原理上。他的上述想法构成了拉格朗日的《函数计算》的基本思想。他的著作也是欧拉、拉格朗日、勒让德等数学家某些研究工作的起点。兰登的主要著作还有《论剩余分析》等。

兰伯特（Lambert, Johann Heinrich, 1728.8.26—1777.9.25） 瑞士——德国数学家、天文学家、物理学家和哲学家。彼得堡科学院、普鲁士科学院院士。自学成才。他首次证明了数π和e是无理数。第一个系统地研究了双曲函数，引入了$\sinh x$、$\cosh x$等符号，得到一系列关于圆锥曲线的定理。他从事了多年的几何、代数及球面三角等方面的研究，其中他大胆地对平行公理的可证明性提出了怀疑，在他的思想中甚至已包含了非欧几何学可以存在的想法。这一观念上的突破，对非欧几何学的诞生起了一定的作用。他关于画法几何的研究成果，也成为后期一些数学家工作的先导。他还编制出版了1—100的七位数字的自然对数表。兰伯特的主要著作有《数学的应用》、《平行线理论》、《光度学》、《新工具论》等。后者是他的主要哲学著作，它包含了形式逻辑、概率论以及科学原理等。

兰茨贝格（Landsberg, Georg, 1865.1.30—1912.9.14） 德国数学家。对单变量代数函数论有重要贡献。他研究了十分重要的黎曼——罗赫定理，并将其建立在算术理论的基础之上，这是现代抽象代数函数论的先声。

汉克尔（Hankel Hermann, 1839.2.14—1873.8.29） 德国数学家、数学史家。在复数和超复数理论、函数论、数学史等方面有贡献。他修正了形式律的皮科克不变性；证明了任何超复数系都不能满足全部普通算术定律。他系统地阐述了黎曼可积性准则；讨论了函数的分类及各类函数的

可积性；提出了构造以有理点为奇点的函数的方法；举出了一个在无穷多个点上不可微的连续函数例子；给出了汉克尔函数（也称第三类贝塞尔函数）。汉克尔写出不少著名的数学史著作，如《近几世纪数学的进展》、《古代与中世纪数学史》等。

尼科马霍斯（Nicomachus of Gerasa，公元前100年左右）　古希腊数学家、哲学家。是使算术和代数摆脱几何束缚，走上独立发展道路有贡献的数学家之一。他著有《算术入门》一书，书中大部分内容都是前人成果的总结，也是第一部把算术作为独立于几何的学科来处理的著作，一千多年来被认为是标准的权威著作。尼科马霍斯还有另外一部著作《和声学指南》得以流传，这是一部音乐理论著作、

尼科米迪斯（Nicomedes，约公元前250年）　古希腊数学家。他发明了一种称为蚌线的曲线，还专门设计了一个作图的仪器。用现代的语言蚌线的定义如下：设A为定点，m为定直线，a为定长线段。过A的直线与m交于C，延长AC至P，使$CP=a$，那么P点的轨迹就是一蚌线。利用蚌线可解决包括立方倍积和三等分任意角等类问题。蚌线曾引起十六、十七世纪数学家们的极大兴趣，牛顿还利用它解三次方程。

弗拉克（Vlacq，Adriaan，1600—1666）　荷兰数学家。他翻译了一些英国人用拉丁文写的部分科技书，其中包括纳皮尔和布里格斯的对数书。他完成并出版了《对数算术》一书，书中给出了由布里格斯开始计算的从1到100000的对数表，他又补充了20000到90000的对数。弗拉克还出版了《三角对数表》，以及《1到10000的正弦、正切和正割值及对数表》。在这些书中，弗拉克最早明确地指出了常用对数的基本性质，出现了“首数”等名词。弗拉克的数学用表很快在欧洲普及。

弗雷格（Frege，Friedrich Ludwig Gottlob，1848.11.8—1925.7.26）　德国数学家、数理逻辑学家。逻辑代数的奠基人之一。他先后出版了《概念语言》、《算术原理—数概念的逻辑数学研究》、《借助概念计算所发展的算术的基本规律》三部著作。给出了逻辑的公理基础，建立了一套逻辑符号系统；用逻辑方法叙述了算术的原理；使符号逻辑（即数理逻辑）初具规模。弗雷格还驳斥过希尔伯特的一些形式主义观点，引入了逻辑函数概念，后成为数理逻辑的一个重要分支。由于弗雷格的开创性工作，现在数理逻辑已成为现代数学的重要理论之一，越来越显示出强大的生命力。

弗雷歇（Frechet，Maurice René，1878.9.2—1973.6.4）　法国数学家。巴黎科学院和波兰、荷兰科学院院士，许多国家学术机关的成员。弗雷歇在泛函分析、拓扑学、概率统计和微积分等方面都作出过重要贡献。他的研究工作奠定了抽象空间的理论基础，也使他成为抽象空间拓扑理论的创始人。有一类拓扑空间被称为弗雷歇空间。弗雷歇的主要著作有《抽象空间》和《概率论的现代理论研究》等。

弗伦克尔（Fraenkel, Adolf Abraham, 1891.2.17—1965.10.15） 德国数学家。他是著名的ZF（Zermeio—Fraenkel）公理体系的创始人。这是弗伦克尔改进了数学家策梅罗已有的形式集合论结果，并对其定义和基础加以限制或强化，在其著作《集论导引》中给出的。ZF公理体系的建立，使数学基础得到进一步巩固，其影响深远。弗伦克尔的主要著作还有《高斯时代数的概念与代数》、《格奥尔格·康托尔》等。

弗里德里希斯（Friedrichs Kurt Otto, 1901.9.28--1983.1.2） 德国数学家。美国国家科学院院士。曾任库朗数学研究所所长。在对偏微分方程理论的研究中，他利用能量积分把包含椭圆型、抛物型、双曲型方程的各个方程的适定的边值问题进行了统一的论证，被称为“弗里德里希斯理论”。另外，他在数学物理学、弹性力学、流体力学，在广义函数、常微分方程理论、微分算子及其应用等方面也有贡献。弗里德里希斯曾获1977年总统颁赠的国家科学奖章。他的主要著作有《高阶常微分方程讲义》、《伪微分算子》、《希尔伯特空间的谱摄动》等。

加德纳（Gardner, Martin, 1914— ） 美国数学科普作家。著有《数学的奇迹和秘密》、《数学游戏和娱乐》、《数学的余暇》、《数学的故事》等大量科普作品。加德纳思路开阔，作品深入浅出，妙趣横生，给读者留下深刻印象。

皮尔逊（Pearson, karl, 1857.3.27—1936.4.27） 英国数学家。现代统计学创始人之一。他将统计学应用到生物的遗传和进化问题上，得到了生物统计学和社会科学统计学的一些基本法则。许多术语如“众数”、“标准差”、“变异系数”等是由他引入的。他发展的方法在统计学的应用中也很重要。皮尔逊主持创立了统计学杂志《生物测量》，并长期担任主编和主要撰稿人。他写成的《科学的基本原理》一书，是科学哲学的一本经典著作。其著作还有《对进化论的数学贡献》、《统计学者和生物测量学者用表》、《死的可能性和进化论的其他研究》以及《不完全的γ函数表》、《不完全的β函数表》等。

皮尔斯（Peirce, Charles Sanders, 1839.9—1914.4.19） 美国数学家、物理学家、哲学家。美国科学院院士，伦敦数学学会会员。他在演绎逻辑和数理逻辑方面作出了杰出贡献，是逻辑代数的创始人之一。皮尔斯对线性结合代数、群论、格论、实数理论等均有研究，在天文学、光谱学、计量学、大地测量学以及地图投影数学理论等方面也有贡献。另外，在哲学上，皮尔斯还是美国实用主义流派的开创人。由此，皮尔斯被公认为美国有创见且多才多艺的学者。

皮亚诺（Peano, Giuseppe, 1858.8.27—1932.4.20） 意大利数学家。都灵科学院及许多科学机构成员，曾任国际语学院院长。他毕生致力于建立数学基础和发展形式逻辑语言，是符号逻辑的奠基人。他试图从运用皮亚诺的逻辑记号的若干基本公理出发，建立整个数学体系，使数学

家的观点发生了深刻的变化，产生了很大影响。他所著的《微分学与积分学原理》和《无穷小分析教程》是继柯西后，在发展关于函数的一般理论方面的两部最重要的著作。皮亚诺还是“国际语”的创始人。在代数型理论、向量分析、数值计算、数学史等方面均有贡献。他的主要著作还有《算术原理新方法》、《数学公式》等。

邦贝利（Bombelli，Rafael，1526?—1571?）　意大利数学家。也是意大利文艺复兴时期的最后一个代数学家。他所著《代数学》一书，不仅较全面地阐述了代数学的主要内容，且有不少创造性的内容，使代数学成为一门独立的学科。该书对后世影响很大。他较好地解决了三项方程的不可约问题，指出不可约情形通常有三个实根，这是复数发展史上的一个里程碑。他所采用的符号，对代数学的发展也有重要意义。

邦别里（Bombieri，Enrico，1940.11.26—　）　意大利数学家。曾被选为国际数学会的执行委员。从小就有学习数学的兴趣和才干，他不断向数学新的领域探索，并不断取得重大成果。在对素数的研究中，曾获邦别里中值公式，该公式是解决数论中哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的有效工具之一，比如可用该公式证明哥德巴赫猜想中的（1＋3）等。在对解析函数论、以及极小曲面和群论的研究中，邦别里都有令人注目的重大突破。1976年他荣获意大利国家科学院奖励，1974年荣获菲尔兹奖。邦别里的主要著作有《解析数论中的大筛法》等。

吉布斯（Gibbs,Josiah Willard，1839.2.11—1903.4.28）　美国数学家、物理学家、化学家。他的数学研究推动了数学方法在物理领域内的应用。他对向量分析发展成为一门独立的数学分支作出了重要贡献。他对数学物理，特别对微分方程解的理论和三角数论也作出了贡献。吉布斯还是化学热力学和统计力学的创始人之一，也是美国最伟大的数理化学家之一，堪称近代物理化学之父。他的主要著作有《向量分析基础》、《统计力学基本原理》等。

吉拉尔（Girard　Albert，1595—1632.12.8）　法国—荷兰数学家。吉拉尔是最早认识负数几何意义及代数基本定理的数学家之一。他曾将负数与正数同样处理，认为二次方程可以有两个负根。他还对韦达和斯蒂文的数学符号体系进行了改进。吉拉尔在椭圆几何及其应用方面也作出了贡献。他著有《代数的新发现》一书，还有三角学、应用几何学、数论和建筑学等多方面的著作。

托姆（Thom,René，1923—　）　法国数学家。五十年代初期，他对高维流形的分类理论进行了深入的研究，创立了配边理论，完成了流形的粗分类的工作。配边理论不仅在理论上是微分流形理论的一大成就，且有重要应用，为此托姆荣获1958年菲尔兹奖。1966年托姆开始对“自然界形形色色的动物形态是怎么来的”这个问题进行深入探讨，提出并创立了突变理论。托姆认为，突变是一种稳定态向另一种稳定态的跃迁，他利用奇

点理论把它分为七种基本类型。近年来，突变理论已被许多科学家应用到自然科学及多种科学上。突变理论有着广泛的应用的前景，但也有许多争论。托姆的主要著作有《结构稳定性与形态发生》等。

托勒密 （Ptolemr， 约 100— 约170） 希腊天文学家、数学家。他的天文学著作《天文学大成》中包含了系统的三角学理论。书中引用了60进制，给出了0°到90°间隔$\frac{1}{4}^{\circ}$的正弦函数表和著名的托勒密定理：圆内接四边形的对角线的乘积等于两组对边乘积之和。托勒密还是一个几何学家，在对立体几何的研究中有许多创见。托勒密是地心说天文理论的创始人。他所发表的地心宇宙体系（又称托勒密体系）在天文学中占统治地位达1300年之久，他在地理学方面的影响也持续了很长时间。其主要著作还有《球平面》、《地理学》、《光学》等。

托里切利（Torricelli，Evangelista，1608.10.15—1647.10.25） 意大利数学家、物理学家。曾任伽里略的助手，并在伽里略死后接替了他的职位。托里切利发展了卡瓦列里的不可分原理，给出了不可分原理对立体图形的应用；他还讨论了求曲线弧长问题，发现了微分学上的一些关系式。在对抛射运动的研究中，他引入了托里切利原理，得到了曲线族的包络曲线的第一个例子—托里切利抛物线。上述成果均反映在托里切利唯一的数学著作《几何学》中。

芒福德（Mumford，David Bryant，1937.6.11— ） 美籍数学家。对代数几何有重大贡献。其贡献之一是他的研究工作导致了许多新结果，并由此产生了一门新学科—几何不变式论。其贡献之二是他对代数曲面理论的研究，他不仅证明了代数曲线和高维代数簇有一个不同之处，还对代数曲面分类有所建树。他的主要著作有《几何不变式论》、《代数曲面上的曲线》、《阿贝尔簇》等。

亚里士多德（Aristotle，公元前384—公元前322） 希腊哲学家、科学家。历史上最有影响的思想家之一。在当时西方长达数百年的时间里，他的学说享有最高的权威。他重视数学，研究过数学的本质，以及定义、公理、公设的含义与区别，探讨了点、线、连续性、无穷大等许多基本概念，还给出过一些简洁、明快、严谨的定义，证明过一些重要的几何学定理。亚里士多德所创立的逻辑学对数学的发展也有重大影响，其中逻辑学的基本原理—矛盾律和排中律就是数学间接证法的核心。亚里士多德还重视数学在物理学中的应用，在其他诸多科学领域中，也有不少重要贡献。他一生著述甚丰，其主要著作有《范畴学》、《分析前篇》、《分析后篇》、《物理学》、《气象学》、《形而上学》、《政治学》等。

亚尼谢夫斯基（Janiszewski，Zygmunt，1888.6.12—1920.1.3） 波兰数学家。波兰数学学派最初的组织者。1918年他发表了题为“波兰急需数学”的文章，响亮提出“为波兰数学赢得特殊地位”的口号，并提出了三条措施：一、集中人力于某一研

究领域；二创办一本数学杂志，专门刊载集合论等方面的论文，使之达到一流国际水平；三、创造一种适合数学研究的气氛。他的上述建议，为后来波兰数学派的兴起起了重要影响。亚尼谢夫斯基是《数学基础》杂志的创建人，该杂志获得极大成功，并赢得了国际信誉。亚尼谢夫斯基在集合论、拓扑学、解析函数论方面也有较大贡献。拓扑学上有三个定理以他的名字命名，这些定理揭示了弧、平面及一般连续统的拓扑特性。

亚历山德罗夫（Александров, Павел Сергеевич, 1896.5.7—1982.11）　苏联数学家。苏联科学院院士。现代拓扑学的奠基人之一。他与乌雷松共同创立并发展了紧与列紧空间理论，引入了一系列基本概念和拓扑结构，建立了本质映射定理和同调维数论，并由此导出了一系列对偶性原理的基本规律。其主要著作有《组合拓扑学》、《群论导引》、《非欧几何是什么？》、《集合函数的泛函初阶》、《拓扑对偶定理》等。

芝诺（Zeno of Elea，约公元前495—公元前430）　希腊数学家、哲学家。他是雄辩术的发明者，尤以悖论著名。这些悖论对于逻辑和数学的严密性的发展是有贡献的，而真正解决这些悖论，也只有在有了连续和无穷小的概念之后。他共提出45个悖论，其中有九个流传至今。关于运动的下列四个悖论：二分说，阿基琉斯追龟说，飞箭静止说，运动场问题尤为著名，至今仍余波未息。其中的阿基琉斯追龟说是讲阿基琉斯追乌龟，永远追不上。因为当他追到乌龟出发点时，龟已向前爬行了一段。他再追完这一段，龟又向前爬了一小段。这样永远重复下去，总也追不上。他把有限的路程进行无限分割，并断言通过这无限被分割了的路程要用无穷的时间。

西格尔（Siegel, Carl Ludwig, 1896.12.31—1981.4.5）　德国数学家。在解析数论和函数论方面有重要贡献。在解析数论中，他得到超越数论及丢番图逼近的若干结果，不少著名的方法和定理以他的名字命名。他还同哈塞共同研究了希尔伯特第11个问题，即任意代数数系数的二次型，多有建树。1978年西格尔荣获首届沃尔夫奖。他的主要著作有《多复变量解析函数》、《天体力学讲义》等。

西尔威斯特（Sylvester, James Joseph, 1814.9.3—1897.3.15）　英国数学家。英国皇家学会会员，曾任伦敦数学会主席，荣获英国皇家勋章、科普利奖章及许多大学的名誉学位。1878年他主持创办了《美国数学杂志》。西尔威斯特在方程论、行列式和矩阵理论、不变量理论、线性结合代数、标准型、数论、概率论等若干数学分支有重要贡献。他在数学上的建树，推进了美国大学的数学研究工作，他同其他数学家一起开创了自牛顿以来英国纯粹数学的繁荣局面。他自称是“数学亚当”，因为他创造了许多数学名词，如不变式、判别式、黑赛矩阵等均由他引入。他的主要论文有《论某些三元三次方程》等。

达布（Darboux, Jean—Gaston,

1842.8.14—1917.2.23) 法国数学家。法国科学院、彼得堡科学院院士，英国皇家学会会员，及近百个科学学会或学术团体成员。达布学识渊博，他在数学上的贡献主要在微分几何与微分方程方面。他总结了近百年来曲线及曲面微分几何学方面的成就，详细讨论了曲面理论和曲线坐标，引入了四圆坐标和五球坐标。在微分方程的积分法中，他总结并推广了拉普拉斯方程的级联方法，给出了“达布方程”。在定积分理论方面，有以他名字命名的达布和、达布上积分、下积分等概念；得到了定理：“可测函数L可积的充要条件是测度为零”。达布的主要著作有《曲面通论教程》、《正交系与曲线坐标系》等。

达文波特（Davenport，Harold，1907.10.30—1969.6.9） 英国数学家。伦敦皇家学会会员，曾任伦敦数学会主席。达文波特在数论方面有突出贡献。他深入研究了丢番图方程的解析理论和代数数论。他得到的三角和的估值和有限域的特征等研究成果对近世代数理论的发展有重大影响。其主要论著有《丢番图方程与不等式的分析方法》、《积性数论》等。

达朗贝尔（D'Alembert，Jeanle Rond，1717.11.16—1783.10.29） 法国数学家、力学家、哲学家。法国科学院及许多国家科学院院士。达朗贝尔数学研究的领域较广，在微分方程、复变函数、级数理论等方面均有建树。他给出了表示弦横向振动的二阶偏微分方程的解法，与欧拉、丹尼尔、伯努利共同奠定了偏微分方程论的基础。他首次得出了一个判别正项级数收敛的充分条件，后称达朗贝尔检验法则。他引入了“极限”这个概念，试图建立严格的极限理论。达朗贝尔在力学方面也作出了杰出贡献，他第一次明确了力学作为一门学科的合理性，还在《论动力学》一书中提出了动力学基本规律—达朗贝尔原理。在哲学上，达朗贝尔赞成感觉学说，反对笛卡尔天赋观念论。其哲学著作有《哲学原理》一书。达朗贝尔是《百科全书》（35卷，1751—1780出版）的副主编。其主要数学著作为8卷集的《数学论文集》。

列维—齐维塔（Levi—Civita，Tullio，1873.3.29—1941.12.20） 意大利数学家、物理学家。二十世纪重要的数学家之一。对纯粹数学和应用数学的每个领域几乎都有贡献。他和著名数学家里奇合作创立了绝对微分(又称里奇微分，现称张量分析)，还对张量分析作出过最重要的贡献。他把向量平移的概念引进了弯曲空间，使其立即获得许多应用：在相对论中是电磁场和引力场的统一表示的基础；在拓扑学中，它对广义空间的近代微分理论的发展也有作用，他对互相绕行的三体问题作过研究并取得重大进展。列维—齐维塔的主要著作有《古典力学与相对论力学问题》、《绝对微分学》、《理论力学讲义》、《动力方程变换》等。

迈尔（Meyer，Wilhelm Franz，1856.9.2—1934.6.11） 德国数学家。他在数学上的贡献主要在几何学方面，特别是代数几何和射影

不变理论。迈尔知识渊博，研究领域广阔，各种论著达136种之多。由于他为《数学进展》杂志写过千篇文章，迈尔几乎成为二十世纪30年代德国唯一了解数学全貌的数学家。另外，迈尔也是一位出色的数学教育家，他培养了一大批优秀的数学工作者。其主要著作有《从配极性与有理曲线》等。

毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前580—约公元前500）　希腊哲学家、数学家。毕达哥拉斯学派（一个宗教、政治、学术合一的团体）的创始人。毕达哥拉斯本人未留下什么著作，其科学上的成就估计应属于这个学派。他们将抽象的数作为万物的本原，即"一切都是数"。他们注意到数与音乐和谐间、与几何图形间、与天体运行间的关系等，得到了许多结果。其中在西方首次提出勾股定理，称为毕达哥拉斯定理，但比中国至少要晚500余年。毕达哥拉斯还发现用三个整数表示直角三角形边长的一种公式，即不定方程$x^2+y^2=z^2$的一组解：$2n+1$，$2n^2+2n$，$2n^2+2n+1$。满足上述方程的正整数，现称毕达哥拉斯数。在几何方面，他们发现了五种正多面体，即正四、六、八、十二、二十多面体，且证明了正多面体只限这五种。证明了三角形内角和定理：三角形内角和等于两个直角。他们还提出了区别奇数、偶数和质数的方法，首次发现了不可通约量（又称无理量）。在数学史上，无理量的发现，构成了第一次危机，导致了数域的扩大，为数学的发展起了重要作用。

当儒瓦（Denjoy，Arnaud，1884．1．5—1974．1．21）　法国数学家。巴黎科学院院士及若干学术团体成员。曾任法国数学会主席，巴黎科学院院长。当儒瓦在突变函数论方面有重要贡献。他解决了有关原函数的经典问题；推广了黎曼积分和勒贝格积分，引进了以他名字命名的当儒瓦积分；严格地证明了具有完备的处处间断的奇点集合的有界函数的结构定理。当儒瓦在复变函数论、拟解析函数论、连续统理论和拓扑学等方面的重要贡献，包括他研究了无限阶超越整函数；建立了当儒瓦—卡莱曼定理；给出了一个不可分解的连续统例子；得到了描述集合论的拓扑问题中一系列重要结果等。当儒瓦还用严格的分析系统地整理了庞加莱的环面理论，指出了庞加莱研究中的不确切地方，并解决了他在环面问题上遗留下的一个问题。1970年苏联科学院曾授予当儒瓦罗蒙诺索夫金质奖章。

年希尧（?—1738）　中国清代数学家。在画法几何方面有重大贡献。他的《视学》一书，是世界上第一部系统的画法几何著作，比法国数学家蒙日于1799年出版的《画法几何》一书早70年。书中给出大量精美画图直观图（轴测图和透视图）以及平面图，讲清了绘制原理和方法。除《视学》外，年希尧的主要著作还有《测算刀圭》三卷、《面体比例便览》一卷等。

朱世杰（1300年前后）　中国元代数学家。一生从事数学研究和教育，作出了重要贡献。他集我国宋、金、元数学之大成，写成《四元玉鉴》、

《算学启蒙》两部我国古代重要的数学著作。前部书较为深奥，后部则比较浅显，两书互为表里，各有特点。其中《四元玉鉴》被认为是我国中世纪最杰出的数学著作之一。书中的主要内容之一是解方程，从一元到四元都有。朱世杰将“天元术”推广成“四元术”，他运用“四元术”说明如何建立四元高次方程组和消元方法。他发展了“垛积术”、“招差术”，进一步研究了高阶等差数列的术和法，得到含有四次差的招差公式，进而推广为含任意高次差的招差公式，这在世界数学史上是首创，比欧洲牛顿得此结果要早四百年。

丢番图（Diophantus of Alexandria，约246—约330） 希腊数学家。他在数学上远远超出同代人的水平，特别在代数方面有巨大贡献，被誉为“代数学之父”。他曾著《算术》一书，其内容大部分是属于代数范围的，完全脱离了几何的形式。在希腊的数学中独树一帜，是数学史上的一部重要著作。丢番图建立了不定方程理论，导出多种不定方程，并给出了它们的解法。后称整系数的不定方程（组）（若求其整数解）为“丢番图方程”。在解方程（组）时，他使用了消元法、降阶法、倒数法，甚至极限法，因而被认为是不定分析的创始人。丢番图还第一次在代数中采用了一套符号，使得处理问题大为简化。他的部分题解已含有数论的内容。丢番图的主要著作，还有一本存有残篇的《多角形》。

华林（Waring，Edward，1734?—1798.8.15） 英国数学家。伦敦皇家学会会员。他首先以命题形式公布了“哥德巴赫猜想”。在《分析杂记》一书中，他提出了有名的华林问题：他猜测每个自然数可以表示为至多r个数的k次幂之和，其中r依赖于k，并粗略地估计了r的个数。上述问题的证明1909年由希尔伯特解决。它标志着分析的一个新时代，导致了算术中一些影响深远的定理。除数论外，华林在代数、代数曲面论、无穷级数理论等方面也作出了重要贡献。其主要著作还有《代数沉思录》、《代数曲线的特性》等。

华罗庚（1910.11.12—1985.6.12） 中国数学家。曾先后任中国科学院数学研究所所长、中国数学会理事长、中国科学院副院长等多职、被选为中国、美国等许多国家科学院院士。华罗庚年轻时因家境贫寒曾一度辍学，但一直坚持自修数学。19岁时他开始写代数方面的论文，发表后引起国内数学家的注意，并得到了在国内外继续学习的机会。华罗庚对数学的贡献是多方面的，他是中国解析数论、典型群、矩阵几何学等多学科研究的创始人与开拓者。在数论方面，他对华林问题、泰利问题以及哥德巴赫问题都有重大突破。在对泰利问题的研究中，发现了一个重要定理，被称为华氏定理；他的论文《论高斯的完整的三角和估计问题》，彻底解决了高斯提出的问题，至今仍被认为是这项研究的最佳成果；他和王元一起开拓了用代数数论方法研究多重积分近似计算的新领域，被国际数学界誉为“华—王方法”。华罗庚在应用数学方面也作出了突出贡献，先后开展应用数

学“统筹法”和“优选法”的试验、推广和普及工作，在生产实践中取得重大的实际效果。华罗庚还热心于中学数学教育，撰写了大批通俗易懂的科普读物，为国家培养了一大批优秀数学人才。他一生著书甚丰，其主要著作有《堆垒素数论》、《数论导引》、《数论在近似分析中的应用》（与王元合著）、《多个复变数典型域上的调和分析》（与万哲先合著）、《高等数学引论》、《典型群》、《统筹方法平语》、《优选法平语》等。

华蘅芳（1833—1902） 中国清代数学家。他翻译了大量的数学著作，向我国介绍了西方的代数学、三角学、微积分学、概率论等，大大推进了清末引进西方数学的工作。其主要译著有《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》、《算式解法》、《决疑数学》等。华蘅芳也探讨过数学上的若干问题，对高次方程的解法以及素数理论等问题都有不少新的见解。

会田安明（Aida Yasuaki，1747.2.10—1817.10.26） 日本数学家。自学成才，并建立了自己的学派—宅间派，与当时据于日本最高权威地位的关流派代表人物藤田贞资（1734—1807）展开了长期学术论争。会田安明在代数、几何、数论等方面均有贡献。他总结了日本传统数学中的各种几何问题，深入研究了椭圆理论，指出怎样决定椭圆、球面、圆、正多边形的有关公式；探讨了代数表达式和方程的构造原理；他还编制了以工为底的对数表，宣传并大量使用了新的简化数学符号等。会田安明一生著述甚丰，多达2000余种，主要的有《算法天生法指南》等。

刘洪（公元2世纪） 中国东汉数学家、天文学家。他编写的《乾象历》，开始重视月球绕地球的不等速运动，创立了推算定朔、定望时刻的公式，为后世沿用。直到隋朝天文学家刘焯才创造出比此更精密的公式。在制《乾象历》中，刘洪使用了正负分数加减法。用他的话叙述则为：“强正弱负：强弱相并，同名相从，异名相消；其相减也，同名相减，异名相从。无对互之。”《乾象历》还得出交点月概念和长度值，以及同归年、朔望月长度和交食周期等天文常数的新值，对后世历法有深远影响。

刘益（1080年前后） 中国北宋数学家。他将前人有关方程的问题和开方问题进行了搜集、整理，并在此基础上有所发展。他首次讨论了系数可正可负的一般二次方程；他倡用“益积术”和“减从术”两种解方程的方法，这在我国数学史上都是较突出的成就。刘益著有《议古根源》一书，书中载有二百道数学问题及其解法，其中大部分都是求方程的根，可惜此书已失传。其中有22个问题被杨辉录入《田亩比类乘除捷法》一书中。

刘焯（544—610） 中国隋朝数学家、历法学家。在世界上第一个发现了等间距二次内插法公式，比牛顿的内插法公式要早1000多年。在历法研究中，他写成的《皇极历》，记载了他的历法，书中四处使用了等间距二次内插公式，其算法是数学发展史上的一项重要成就，对后来的历法研究有很大影响。实际上也是我国历法史

上的一大改革。

刘徽（263年前后） 中国魏晋时期数学家。刘徽一生未任官职，以研究数学为己任。公元263年左右完成名著《九章算术注》和《重差》一卷（后人称为《海岛算经》），《九章重差图》一卷。他在数学上的许多创见，不仅为我们民族留下了无价之宝，在世界数学史上也占有重要地位。他最早提出分数除法法则，给最小公倍数以严格的定义；他最先应用小数，提出非平方数开方的近似值公式，给出负数的定义和加法法则，给出一次方程定义和完整解法；他首次用"割圆术"计算圆周率，用"无穷分割法"研究锥体体积，用"重差术"去计算可望而不可及目标间的距离。他算得圆周率$\pi=3.1416$，比国外最早的印度人获得此结果早约二百年。他在《重差》一书中所选的九个例题，无论是题目的复杂程度，还是解题的技巧，都远远超过西方。更为突出的是刘徽已形成了自己的一套先进数学思想，特别是他在"割圆术"、体积研究和开方中所表现出的极限思想方法更是极其宝贵的，这是世界数学史上一项重大的成就。

刘维尔（Liouville,Joseph，1809.3.24—1882.9.8） 法国数学家。伦敦皇家学会会员、彼得堡科学院名誉院士。1836年他创办《纯粹数学和应用数学杂志》（通常也称为《刘维尔杂志》）并任主编。著名法国数学家伽罗瓦的大部分论文是由该杂志刊登的，许多著名数学家也从该刊获得裨益。该杂志为法国数学的发展起了重大推动作用。刘维尔本人也以对分析、数论和微分几何的研究，特别是发现超越数而著名。他第一个证明了超越数的存在，并构造了无穷多个这样的数。他研究了微分方程边值问题，其方法后称斯图谟—刘维尔理论，此理论在20世纪的数学物理以及积分方程理论中极为重要。他提出解析函数一般理论中的"刘维尔定理"是统计力学和测度理论的基础。刘维尔发表了近四百篇论著和短文，涉及到数学和物理学的十几个分支。

刘彝程（1873年左右） 中国数学家。曾任上海求志书院算术科主持人。学院规定每年考四次数学，他把历年所拟试题和解答汇编成《简易庵算稿》四卷。书中有不少题目归结为解不定方程。刘彝程特别对二次不定方程的整数解有研究。另外，书中也有排列组合问题。刘彝程的主要著作还有《九章实义》四卷，《割圆阐率》、《开方阐率》、《对数问答》等，遗憾的是后三部书稿均未刻印出版。

关孝和（Seki，Takakazu，1642—1708.10.24）日本数学家。他是日本传统数学—和算的奠基人，也是日本数学从引进转向独立发展的转折点。据日本文献记载，关孝和的数学成就很多。他创立笔算，将筹算代数引向笔算代数；他首先提出了行列式概念；论及了方程的判别式，发现正负根存在的条件及与牛顿迭代法类似的解法；他引入多项式的导函数，并建立了一种函数极大极小的方法。在几何中，他给出了勾股定理的新证法；得到椭圆面积公式和某些性质。另外，他还发现贝努利级数等。关孝

和在日本被誉为“算圣”，他对日本数学的发展有重要影响。其主要著作有《发微算法》、《点窜计算的表示方法解优题之法》、《括要算法》等。

米尔恩（Milne, Edward Arthur, 1896.2.14—1950.9.21）英国数学家、天文学家。因发展新形式的相对论而闻名。他的理论是一种不同于爱因斯坦相对论的相对论，称为运动学相对论。在数学上，有一种多项式称为米尔恩多项式。米尔恩的主要著作有《向量力学》、《恒星热力学》、《相对论、引力和宇宙结构》、《运动学相对论》等。

米尔诺（Milnor,John Willard, 1931.2.20— ） 美国数学家。美国科学院院士，曾任美国数学会副会长。在代数拓扑学和微分拓扑学方面有重要贡献。他发展了示性类理论，证明了七维球面上有且只有28种不同的微分结构。他发展了托姆的配边理论、复配边、自旋配边等理论。他还曾举出反例否定了拓扑学中一个长达半世纪的重要猜想。证明了只有实数域、复数域、四元数体和凯莱代数是实数域上的可除代数。米尔诺是一个研究领域较广阔的数学家，他在代数K理论及复超曲面的奇点等方面也有开拓性的工作。由于米尔诺在代数拓扑学及微分拓扑学方面的成就，他荣获1962年菲尔兹奖。其主要著作有《微分拓扑学》、《代数K理论导引》等。

米塔—列夫勒（Mittag—Leffler, Magnus Gösta, 1846.3.16—1927.7.7） 瑞典数学家。1882年创办国际性数学杂志《数学学报》，自任主编45年，使该杂志成为数学家互相联系的园地，并对康托尔、希尔伯特等著名数学家产生巨大影响。他对数学分析有许多贡献。他研究函数的一般理论，给出了柯西定理的一个证明，这个定理在很大程度上是现代单复变函数论的基础。他在对函数论的研究中，还给出了“米塔—列夫勒定理”和“米塔—列夫勒矩阵”等重要结果。其主要著作有《论单值函数的解析表示》等。

江泽涵（1902.10.6— ） 中国数学家。中国科学院学部委员。主要从事拓扑学的教学与研究，是我国拓扑学的开拓者。他发表于《美国数学杂志》和《中国数学杂志》上的《格林函数临界点的存在》与《能定向的二维闭流形群》，是我国最早的拓扑学论文。江泽涵培养了我国第一代拓扑学人才。他的《不动点类理论》，系统地总结了他在不动点类理论方面研究成果，特别是他指导研究生取得的突破性的成果。其主要著作还有《拓扑学引论》等。

汤普森 （Thompson, JohnGriggs, 1932.10.13— ） 美国数学家。1963年同美国数学家菲特共同解决了代数学中有名的伯恩赛德猜想，即“除了只含素数个元素的循环群外，一切有限单群都是含偶数个元素的”。1966年他又解决了弗罗贝尼乌斯猜想。他发表的有关有限单群理论的若干论文，已成为这方面的重要文献，汤姆森对此所作的工作已开拓了一系列新的研究方向。为此汤姆森荣获1970年菲尔兹奖。

安蒂丰（Antiphon，公元前480？—公元前411） 希腊数学家、宇宙学家、心理学家。在解决化圆为方的问题时，他以圆内接正方形为基础，用不断平分圆弧的办法得到边数越来越多的正方形，这样下去，他认为圆和正多边形之间的面积将被"穷竭"，以至二者重合。安蒂丰认为，"穷竭法"最终会导致化圆为方问题的解决。这一结论虽然不正确，但"穷竭法"却给出了一种求圆面积的近似方法，具有现代极限论的雏形。安蒂丰的主要著作有《论真理》、《论和谐》、《政治家》、《释梦》等。

安岛直圆（Ajima，约1732—1798） 日本数学家。他是关孝和学派的主要人物，为该学派的第四代大师。安岛对日本和算的发展产生过重要影响，被誉为日本的拉格朗日，他重视数学理论的一般性，强调理论的指导意义，在对有关圆的内容的研究中（该学派称此为"圆理"），他深入到微积分的领域，提出了相当于二重积分计算立体体积的方法。他给出了指数为$\frac{1}{n}$的一般二项定理，造出了精确到小数第14位的对数表。他还解决了一般情况下的所谓马尔法蒂问题，即在一给定的三角形中作内接三圆，使每一圆切于其他两圆及三角形的两边，早于马尔法蒂20年。安岛的主要著作有《不朽算法》等。

许宝騄（1910.9.1—1970.12.18） 中国数学家。中国科学院学部委员。我国最早从事概率论和数理统计研究的数学家。他对多元分析、极限分布论、统计推断和线性模型、试验设计与代数编码等方面均有研究，并取得一系列世界领先的研究成果。许宝騄热心于数学教育工作，为我国概率统计学的发展作出了重要贡献。他共发表论著40余种，其主要著作均收入《许宝騄文集》中。为表彰许宝騄为我国数学发展所作出的贡献，1984年以他的名字设立了统计数学奖。

孙子（3—4世纪） 中国数学家。著《孙子算经》，内容虽远不如《九章算术》丰富、深奥，却是一部详载筹算法的书。其中还记有"物不知数"问题，即"今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"书中给出了解法，可初步窥见古代解同余式组的大体过程。这也就是驰名中外的"大衍求一术"的起源。"大衍求一术"是我国古代数学中的重大成就，在欧洲直到1801年才由高斯得到与此相同的方法，但晚于孙子1500多年。

约翰·伯努利（Johann，Bernoulli，1667.8.6—1748.1.1） 瑞士数学家。雅各布·伯努利的弟弟。他对微积分的创建有重要的贡献，他出版的《积分学教程》，第一次对微积分作了系统的阐述。他曾提出"最速降线"问题，向全欧洲数学家挑战，后来引起了变分学的产生。他在微分方程论、几何学、力学等方面也取得不少重要成果，发展了指数函数论。

麦比乌斯（Mobius，August Ferdinard，1790.11.17—1868.9.26） 德国数学家、天文学家。柏林科学院通讯院士。在数学方面，他为高维几何理论的创立作出了大胆尝试。其中

“麦比乌斯带”是他重要的奇妙发现之一。取一长方形纸条，把一个短边扭转180°，然后将这个边跟对边粘贴起来，就形成了一个“麦比乌斯带”。这一带子奇妙的单侧性，激起了人们对拓扑学的研究兴趣，为拓扑学的诞生和发展起了重要作用。麦比乌斯的主要数学著作有《重心的计算》等。

麦克莱恩（Maclane，Saunders，1909.8.4—　　）　美国数学家。在代数学和拓朴学方面作出了重要贡献。他是同调代数和范畴论的创始人之一。他的范畴论使得以集合为研究对象深入到以范畴为对象。他的专著《同调论》对同调代数思想方法的普及和发展都起了重要作用。他的上述研究对近代数学的发展具有很大推动作用。其主要著作还有同G·伯克霍夫合著的《近世代数概要》和《代数学》等。

坎托罗维奇（Канторович Леонид Витальевич，1912.1.19—　　）苏联数学家、经济学家。苏联科学院院士。他深入研究了数学在经济学中的应用和经济学中的若干课题。他首先提出分解乘数的概念，创先利用线性规划为经济计划的工具，研究发展了动态规划。他曾与美国库普曼斯共同获得1975年诺贝尔经济学奖金。坎托罗维奇在泛函分析、程序设计、函数论、数学物理、微分方程、积分方程等方面都有贡献。其主要著作有《经济资源的最佳利用》、《生产组织与计划中的数学方法》、《半序空间泛函分析》、《近似方法》等。

花拉子米（al—Khowāvizmi Mohammedibn Mūsā约783—约850）阿拉伯数学家、天文学家。阿拉伯数学史初期最重要的代表人物，也是伊斯兰教最著名的科学家之一。被誉为“代数学之父”。在代数方面，花拉子米编著了阿拉伯国家最古的算术和代数书籍。其中《印度计数法》把印度计数法介绍到阿拉伯。《代数学》还提出求根这一术语和“代数”这一名称。十二世纪《代数学》传入欧洲，作为标准课本被使用了几个世纪。他的著作对欧洲数学的发展有重大影响。

克莱因（Klein，ChristianFelix，1849.4.25—1925.6.22）　德国数学家。曾任国际数学教育委员会主席。克莱因在数学的许多领域有重要贡献。他认为几何学就是研究在给定变换群下不变的空间性质，他的上述观点后称之为“埃尔朗根纲领”，对于数学的发展有深刻影响。在这个纲领中，他用变换群作出了几何学的分类，并用群的代数不变量和微分不变量理论作出了几何学的分析结构，使非欧几何占据了与欧氏几何同等的地位，也使群论在数学中的地位大为提高。他把群的概念应用于函数论的研究，使黎曼面成为函数论的重要组成部分，也使椭圆模函数的某些理论真正发展成为一套独立的理论。克莱因对中学数学教育改革非常热心，积极提倡数学教材的改革和数学知识的普及，对近代数学教学改革有很大影响。他的主要著作有《代数函数及其积分的黎曼理论》、《高等几何学》、《非欧几何学》、《用高观点看初等数学》、《19世纪数学的发展》等。

克莱姆（Cramer，Gabriel，1704.

7.31—1752.1.4）　瑞士—法国数学家。伦敦皇家学会会员，柏林等若干科学院院士。他第一次引入坐标系的纵轴（y轴）；研究了曲线的变换和分类；给出了著名的曲线性方程组的系数确定方程组解的表达式的“克莱姆法则”；他提出的“克莱姆悖论”，引起了欧拉等许多数学家的极大兴趣。克莱姆曾进行了两年的旅行访学，加强了数学家间的联系，他们长期的通信为数学宝库留下了大量有价值的文献。他的主要著作是《代数曲线的分析引论》。

克雷尔（Crelle, August Leopold, 1780.3.11—1855.10.6）　德国数学家、工程学家。克雷尔1826年创办《纯粹与应用数学杂志》（也称《克雷尔杂志》），在举荐和培养数学人才方面有重大功绩。许多数学家如阿贝尔、雅可比、施泰纳、狄利克雷、外尔斯特拉斯等都是经过该杂志的帮助或影响而崛起的。克雷尔还主张进行数学教学改革，重视思想启蒙和发展逻辑思维能力，并身体力行作了一些有效的工作。

克吕格尔（Klügel, Georg Simon, 1739.8.19—1812.8.4）　德国数学家、物理学家。柏林科学院院士。他在数学上的主要贡献是首次统一了三角学诸公式；引入了“三角函数”概念；概括了直角三角形各边的关系；将六个基本公式推广到球面直角三角形中。克吕格尔对欧几里得平行公理的可证性曾提出异议，有助于早期对非欧几何的探讨工作。他的主要著作有《分析三角学》，另外还编纂了著名的《数学辞典》。

克罗内克（Kronecker, Leopold, 1823.12.7—1891.12.29）　德国数学家。柏林科学院院士，英国皇家学会会员，还是法国和彼得堡科学院的院士。他是直觉主义学派的代表人物之一，在关于数学基础的大论战中，是康托尔集合论的激烈反对者。克罗内克认为，只有算术才具有真正的现实性，只有自然数才能作为数学的可靠基础。他说“上帝创造了整数，其他一切都是人为的”。虽然克罗内克的上述观点是错误的，但他在数论、代数学、函数论、拓扑学等方面均有重要贡献。

克莱布什（Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 1833.1.19—1872.11.7）　德国数学家。在代数不变量和代数几何方面作出了奠基性工作，是现代代数和现代几何的创始人之一。他与哥尔丹合著的《阿贝尔函数论》，被认为是黎曼代数函数理论和纯粹代数几何理论之间的阶梯。他的研究成果，包括以他和其他数学家名字命名的“克莱布什—哥尔丹定理”、“克莱布什—阿龙霍尔德符号法”、“普吕克—克莱布什原理”等，对十九世纪后期的数学发展有较大影响。克莱布尔的主要著作还有《弹性体理论》等。

克雷洛夫　（Крылов, Алексей Николаевич, 1863.8.15—1945.10.26）　苏联数学家、力学家、船舶制造家。苏联科学院院士。他把物理学和各种技术部门中遇到的近似计算加以系统研究建立了近似计算的严格科学理论，获得了包括三角级数收敛的改善方法（称为克雷洛夫方法）

等许多成果。克雷洛夫翻译了牛顿、欧拉等人的重要著作，并对其著作进行了有价值的研究和补充。1904年他制造了苏联第一台能够进行微分方程积分法的计算机。他的主要数学著作《近似计算》等均收集在他的文集或选集中。

苏步青（1902.9—　）　中国数学家、数学教育家。中国科学院学部委员，中国数学会的发起人之一，曾任中国数学会副理事长。主要从事微分几何的研究，被誉为“东方第一个几何学家”。在对欧氏平面曲线整体几何和仿射几何的研究中获许多重要成果。后研究广义空间，发展了“K展空间”，为我国第一个该项研究领域的专家。他开创了我国计算几何的研究，还将仿射不变理论应用于生产实际，在造船工业中的航体放样等工程中获得了效益。苏步青长期从事数学教育工作，培养了大批数学人才，其中有不少已成为国内外知名的学者。

苏斯林（Суслин Михаил Яковлевич，1894.11.15—1919）　苏联数学家。早夭的集合论学者，他是现代集合描述论的创始人之一。他定义了解析集的概念，并建立了这种理论的主要内容。他生前没留下什么著作，只发表了一篇短评。他对现代数学所作的贡献，在一些数学家的著作中得以介绍。

杜布（Doob Jeseph Leo，1910.10.27—　）　美国数学家。美国科学院、美国科学艺术研究院院士。杜布在概率论方面有重要贡献。他深入研究了随机过程理论，建立了随机过程理论的公理化结构，使随机过程理论进一步抽象化。他引进了半鞅概念并作了系统研究，推进了鞅理论的发展。从五十年代开始，鞅已成为分析学研究的重要内容。在此基础上发展的概率论，实际上是一种抽象的分析。杜布的主要著作有《随机过程》等。

杜知耕（1687年左右）　中国清朝数学家。著有《数学钥》六卷和《几何论约》七卷两书。前书是为《九章算术》作注释和图解，即“隶之，载其图解，并摘其要语以为之注。”后书是为欧几里得《几何原本》作注释，即“欧几里得撰，杜知耕删补。”

李（Lie，Marius Sophus，1842.12.17—1899.2.18）　挪威数学家。英国皇家学会会员，法国及许多科学院和学会的成员。李是连续变换群理论的创始人。为纪念他对此的巨大贡献，现称连续群为“李群”，现在“李群”已成为理论物理中必不可少的工具。为研究“李群”而由李本人创立的“李代数”，也已成为近世数学的重要分支。近一个世纪以来，“李群”理论的发展正方兴未艾。李对于微分几何也作了研究，对于推进微分方程理论作出了贡献。俄国喀山数理学会曾授于李罗巴切夫斯基国际奖。他的主要著作有《变换群论》、《切变换几何学》、《微分方程》、《连续群讲演集》等。

李冶（1192—1279）　中国元代数学家。他对“天元术”（即中国古代建立数学高次方程的方法，相当于现在的代数或方程论）有重要贡献。他的两部数学著作《测圆海镜》、《益古演段》是我国宋元数学的宝贵遗产。

其中《测圆海镜》给出170个用天元术解直角三角形的容圆问题，是我国现存最早对天元术进行系统叙述的著作。《益古演段》共64题，多是各种平面图形间的面积关系，是为普及天元术而作。李冶还创用在筹上加斜划来表示负数，类似近世的符号代数。另外，他的小数记法也是先进的。李冶一生著述甚丰，除上述两部数学著作以外，尚有《泛说》四十卷、《壁书从削》十二卷、《文集》四十卷、《敬斋古今黈》等多部。

李俨（1892.8.22—1963.1.14） 中国数学史家。中国科学院数学研究所学术委员会委员。中国数学史学科的奠基人。他的重要著作《中国数学源流考略》，是第一部用近代方法、观点阐述中国数学史的著作。他的主要著作还有《中国算学史》、《中国数学大纲》、《中算史论丛》、《十三、十四世纪中国民间数学》、《计算尺发展史》等多部。李俨的藏书丰富，逝世后全部献给国家，为后人从事中国数学史的研究提供了十分宝贵的资料，为保存祖国数学文化遗产作出了贡献。李俨除数学史方面的著作外，尚有《微积分学初步》、《铁道定线法》等数学、工程学方面的著作。

李锐（1773—1817） 中国清代数学家。一生从事数学研究和著述。他除校勘和注释一些前人的数学著作外，其突出成就是对方程的研究。他发展了方程理论，有许多重要发现。有的已非常符合实系数方程虚根成对的思想；有的已得到与笛卡尔符号法则相一致的结论，从某种意义上讲已接近了代数基本定理的初步思想。他还得到了有关方程变形的一些性质等，使方程理论形成了一门比较完整的学科。他的主要数学著作有《勾股算术细草》一卷、《方程新术草》一卷、《弧矢算术细草》一卷和《开方说》三卷四种。最后一书李锐只完成前两卷，下卷是他去世后由黎应南补全的。此外，还有《测圆海镜细草》十二卷等。

李之藻（1565—1630） 中国明代数学家。他与利玛窦合作编译了《同文算指》，这是根据克拉维乌斯的《实用算术概论》与程大位《算法统宗》编译的第一部介绍欧洲笔算的著作，对后来的算术有巨大影响。他与徐光启等积极参加历法改革，同修历法。他还将传入的西方著作汇编成《天学初函》二十种，在当时流传甚广，促进了我国数学的发展。

李淳风（602—670） 中国唐代数学家、天文学家。曾受诏审定并注释了十部数学书（《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算经》、《缉古算经》、《缀术》），作为国子监学习和考试用书。这些注释既有宝贵的科学史料，也有李淳风本人对数学的贡献。比如，他曾记载了祖冲之父子关于球体的研究，如祖暅定理及开立圆术等。在他的《隋书·律历志》一书中，李淳风还记载了祖冲之有关圆周率的结果，后人据此得知祖冲之求得圆周率已精确到七位小数，并给出“约率”$\frac{22}{7}$和“密率”$\frac{355}{113}$这两个数

值。李淳风在天文学上也有重要贡献，他制造出新浑仪，编写了《天文志》和《律历志》，创制了《麟德历》。

李善兰（1811.1.2—1882.12.9）　中国清代数学家。少年时期就阅读了不少数学书籍。他首创的尖锥求积术在中国数学史上占有一定地位，虽然其理论结构还不甚严密，但思路与微积分学所用的方法颇相近。在级数求和方面，他得出的恒等式后被称为"李善兰恒等式"，自本世纪30年代以来，该恒等式的论证曾引起中外数学家的兴趣。他写成我国最早一部素数论专著《考数根法》，详尽研究了素数判别法，证明了著名的费马定理，且指出其逆定理不真。李善兰突出的贡献还在于他翻译介绍了大量西方新数学知识。他共翻译各类科学著作80多卷，重要的有欧几里得的《几何原本》后9卷，棣么甘（即德摩根）的《代数学》，罗密士（即卢米斯）的《代微积拾级》，艾约瑟的《圆锥曲线说》三卷等。这些著作把代数、平面几何、解析几何、微积分等首次介绍到中国。他首创的函数、变数、切线、微分等名词一直沿用至今。李善兰将自己的大量著作整理成《则古昔斋算学》。这其中包括：《方圆阐幽》一卷、《弧矢启秘》二卷、《对数探源》二卷、《垛积比类》四卷、《四元解》二卷、《麟德术解》三卷、《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷、《火器真诀》一卷、《对数尖锥变法释》一卷、《级数回求》一卷、《天算或问》一卷等。

杨乐（1939—　　）　中国数学家。中国科学院学部委员。杨乐与张广厚合作一直从事整函数和亚纯函数理论的研究工作，取得了显著成果。他们建立了整函数、亚纯函数的亏值、渐近线和茹利雅方向三个重要概念的深刻关系，获国际很高评价。他们解决了1964年、1973年两次国际函数会议上各国科学家提出有关渐近值方面的五个问题。还完全解决了50年来奇异方向如何分布的重要问题。对于函数亏值数目的估计，也获得了普遍而准确的结果，被誉之为"杨、张定理"和"杨、张不等式"。

杨辉（约十三世纪中叶）　中国南宋时期数学家。杨辉与秦九韶、李冶、朱世杰为宋元四大数学家，为数学的发展作出了杰出贡献。他在搜集和阅读了大量的数学著作的基础上，钻心进行数学研究，一生编著了五部数学书21卷。在所著《详解九章算法》一书中，他首先引用了贾宪所作的"开方作法本源图"。该图给出了二项展开式中各项系数的排列，西方将此称之为"帕斯卡三角形"，但从时间上看远远晚于贾宪。该书还引用和发展了贾宪的"增乘开方法"，这是一种开高次方的新方法。《详解九章算法》一书，选取了不少算题和算法，其中由浅入深地讲了九九口诀、算术四则运算、日用度量衡、土地丈量、堆垛、修建和商品交换等民间常用问题。杨辉所著的另一本书《习算纲目》，实际上是一份珍贵的古代数学教学计划，也是杨辉多年从事数学教育工作的经验总结。杨辉还致力于简化算法以及纵横图等的研究，并有所

创造。杨辉的主要著作除上面提到的外，还有《日用算法》、《乘除通变本末》、《田亩比类乘除捷法》、《续古摘奇算法》等。

吴敬（1450） 中国明代数学家。以善算闻名钱塘一带，因此，一时许多官吏请他解决各种数学问题，这些问题成了他数学研究的重要内容。1450年撰写成《九章算法比类大全》十卷，包括商业实用算术，各种开方术等一千多个问题。在该书中，吴敬首次给出了一种"写算"乘法，这种算法当时在欧洲、印度、阿拉伯、中亚等广大地区已非常流行。另外，该书也是较早提及算盘的数学著作。

吴文俊（1919.5.12— ） 中国数学家。中国科学院学部委员，曾任中国数学会理事长。早年从事拓扑学研究，在示性类及示嵌类等方面获重要成果，促进了拓扑学的发展。以后他致力于机械证明方面的工作，在理论上解决了平面几何与初等微分几何的机器证明，且用计算机先后证明了初等几何与微分几何的一些主要定理。这一机械证明方面的重大成果，为数学研究开辟了一个新的领域。他的《示性类及示嵌类的研究》，曾获国家首次科学奖一等奖。他致力于机械证明所取得的成就，分获全国科学大会重大科技成果奖和中国科学院科技成果一等奖。

里奇 （Ricci, Curbastro Gregorio, 1853.1.12— 1925.8.7） 意大利数学家。绝对微分学（也称里奇微分，现称张量分析）的创始人。张量分析应用于广义相对论而引起的兴趣结果，使得它在微分几何和其它数学分支中有广泛的应用。里奇在微积分学、黎曼簇理论、实数论、高等代数等方面也有贡献。

里斯 （Riesz, Frigyes, 1880.1.22—1956.2.28） 匈牙利数学家。匈牙利科学院院士，也是巴黎科学院通讯院士和其他许多科学学会的会员。里斯是泛函分析的开拓者，有许多重要发现。1907年得到的里斯—菲舍尔定理，是证明矩阵力学和波动力学等价的数学基础，这是早期量子论的一个重大突破。里斯研究的另一个重要成果是里斯表示定理，这是泛函分析发展史上的一个里程碑。随着对泛函分析研究的深入，该理论获广泛的推广和应用。1909年他与一个学生合作发表的重要著作《泛函分析教程》是泛函分析的经典文献。

迪克森（Dickson, Leonard Eugene 1874.1.22—1954.1.17） 美国数学家。美国科学院院士，曾任美国数学会主席。在数学上他的研究领域广阔，著作甚丰。其主要贡献在数论和群论方面。在对有限性群的研究中，他给出了有限域论的第一个广泛表述。他发展了韦德伯恩和嘉当两人关于线性结合代数的理论。在对堆垒数论的研究中，他还证明了猜想的华林定理。他的不朽著作是《数论史》。书中包括丰富的史料，是研究数论史必备的参考书。

迪厄多内（Dieudonné Jean Alexandre, 1906.7.1— ） 法国数学家。受法国布尔巴基学派的影响，积极参加该学派活动并成为其领导人之一。在对泛函分析的研究中，他对特殊空间、测度的无穷乘积、凸

集等方面贡献尤为突出。他引进了双紧致空间的概念；建立了形式群的理论；可换形式群理论由于他的工作而得到很大发展。迪厄多内的主要著作有《典型群的几何学》、《近代分析基础》、《现代分析基础》等。近几年来他从事数学史的研究，还著有《1700—1900年数学史简述》、《泛函分析史》等。

利马窦（Ricci, Matteo, 1552.10.6—1610.5.11） 意大利数学家。他是德国数学家克拉维乌斯的学生，1582年以传教士身份来到中国，定居北京。利马窦精通数理，在天文、地理方面也有较深的造诣。他除带来了一些西方的科学技术成果，如世界地图、自鸣钟、数学书籍等外，还与徐光启合译了《几何原本》前六卷，与李之藻合编了《同文算指》，在中国数学发展史上是为西方数学传入中国之始。

利斯廷（Listing, Johann Benedikt, 1808.6.25—1882.12.24） 德国数学家、物理学家。他最早在数学上使用“拓扑”一词，且完成了拓扑学的某些奠基性的工作。这些成果都集中在他的《拓扑学初步》，以及以后的一些著作中。

利普希茨（Lipschitz, Rudolfotto Sigismund, 1832.5.14—1903.10.7） 德国数学家。巴黎科学院及柏林、格丁根、罗马等研究院的通讯院士。在常微分方程和微分几何领域作出了重要贡献。在对常微分方程解的存在性的探求中，创立了著名的“利普希茨条件”鉴别法，得到柯西—利普希茨存在性定理。在微分几何方面，他开创了微分不变量理论的研究，被认为是协变微分的奠基人之一。后经他人发展，被爱因斯坦在其广义相对论中加以使用。利普希茨在数学基础以及代数数论的研究中也作出了贡献。他的《分析基础》一书，从有理整数论到函数理论作了系统阐述。他建立起被称为“利普希茨代数”的超复数系，为该学科的发展奠定了基础。

利亚普诺夫（Ляпунов Александр Михайлович, 1857.6.6—1918.11.3） 俄国数学家、力学家。彼得堡科学院院士。利亚普诺夫在若干数学领域作出重要贡献。在概率论中，他给出切比雪夫，马尔可夫关于中心极限定理更简单而严密的证明，其方法已在现代概率论中得到广泛应用。他提出了解决运动稳定性问题，这一自然科学中最困难问题之一的一般方法，被认为是微分方程论中运动稳定性理论的创始人。另外，他对位势理论的研究也为数学物理方法的发展开辟了新的途径。其主要著作有《关于运动稳定性的一般问题》等。

邹伯奇（1819—1869） 中国清代数学家。在前人的基础上，他进一步探讨了二项式的n次根与对数的幂级数展开式，扩大了它们的应用。他还是对数计算尺的发明者之一，制造的对数尺同现在的计算尺已十分接近。其主要著作有《学计一得》二卷，《补小尔雅释度量衡》一卷。

何承天（370—447） 中国东晋与南北朝间数学家、天文学家。443年创《元嘉历》。这是一部有较高水平的

历法，在这个历法中使用了不少先进的数学工具。他发明了“调日法”，使用不等式$\frac{a}{b}>\frac{an+cm}{bn+dm}>\frac{c}{d}$（已知$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$）（式中$a$、$b$、$c$、$d$、$m$、$n$均为正数）进行近似计算。这是数学上的一种创造。西方一直到十四世纪才出现类似的算法，较何晚八、九百年。何承天还利用上述算法求得$\pi=3.1428$。何承天曾参与撰修《宋书》，并著有《报应问》一书。

伯奈斯（Bernays, Paul Isaak, 1888.10.17—1977） 德国数学家。因力图发展一个统一的数学理论而闻名于世。他同哥德尔合作，改进、整理和简化了逻辑学家冯、诺伊曼关于逻辑和集合论的工作，得到了类的概念，称为伯奈斯—哥德尔集合论。著名数学家希尔伯特是他的老师、指导人和合作者，两人合著的《数学基础》一书被认为是经典著作。

伯克霍夫（Birkhoff, George David, 1884.3.21—1944.11.12） 美国数学家。曾任美国数学会主席和美国科学发展协会主席，被认为是进入二十世纪以后美国的数学权威。他在微分方程定性理论方面建立了动力系统的系统理论，全面阐述了各态历经理论。在代数方面他建立了格论。1912年庞加莱在研究三体问题时，声称得到了一个除几个特例外不能证明的重要的几何定理，但一年后伯克霍夫证明了这个定理。继爱因斯坦以后，伯克霍夫又提出了自己的引力理论。他还创立了美学的数学理论，并将其应用于美术、音乐和诗歌方面。以上这些工作都对世界有重大影响。伯克霍夫的主要著作有《相对论与近代物理学》、《动力系统》、《基础几何学》等。

伯恩斯坦（Бернштейн, Сергей Натанович, 1880.3.5—1968.10.26） 苏联数学家。乌克兰科学院、苏联科学院院士，还是许多国家科学院或学术机关的成员。伯恩斯坦在多项式函数的逼近理论、偏微分方程理论及概率论方面都作出重要贡献。他奠定了函数构造论的基础，将切比雪夫所创立的多项式逼近理论作了巨大的推进。他创造了一种求解二阶偏微分方程边值问题的新方法（也称伯恩斯坦方法）。他最早提出并发展了概率论的公理化结构；建立了关于独立随机变量之和的中心极限定理；在某种程度上继续完善了马尔可夫的经典研究；研究了概率论在物理学和统计学方面的应用。他的主要论著都被收入其四卷文集中。伯恩斯坦曾获比利时科学院奖金，法国科学院奖金，苏联国家奖金，并获列宁勋章及劳动红旗勋章等。

伽罗瓦（Galois, Évariste, 1811.10.25—1832.5.31） 法国数学家。很小就显示出数学才能，16岁开始研究代数方程的可解性问题。长期以来，数学家们求解1—4次代数方程，使用了只包含有理运算和求根的公式，而5次方程他们则无能为力。伽罗瓦的重要贡献在于他研究了一个方程能用根式求解所必须满足的本质条件：用根式求解是可能的，当且仅当自同构群是可解的。并于此发现解

5次和5次以上的方程需要用完全不同于解2次、3次、4次方程的办法。伽罗瓦是群论的创立者，他明确地引进了群、子群、单群、合成群和正规子群等概念，为群论的建立、发展和应用奠定了基础。以他的名字命名的“伽罗瓦域”、“伽罗瓦群”、“伽罗瓦理论”都是近世代数研究的最重要的课题，也是十九世纪数学最杰出的成就之一。可惜的是，伽罗瓦年仅21岁就死于一次决斗中。伽罗瓦的重要论文直至1846年，在他死后十几年才发表于《纯粹和应用数学杂志》上。

希思（Heath, Thomas Little, 1861.10.5—1940.3.16）　英国数学家。英国皇家学会会员，曾任英国数学协会主席。他长期从事数学史的研究，是研究古希腊数学的权威。其著作《欧几里得原本13卷》是两千多年来研究《原本》的历史总结。希思有关数学史的著作还有《希腊数学史》及《希腊数学史手册》等。

希尔伯特（Hilbert, David, 1862.1.23—1943.2.14）　德国数学家。本世纪初最有成就的数学家之一。他早期研究代数不变式论、代数数论、几何学基础，后来研究变分法、积分方程、函数空间和数学物理方法等，在数学的许多领域都有重大突破。1899年出版《几何基础》一书，把欧几里得几何学整理为从公理出发的纯粹演绎系统，并把注意力转移到公理系统的逻辑结构，形成了近代公理化思想体系，为现代公理化研究树立了榜样，被誉为近代公理化思想的代表作。1900年在巴黎国际数学会上，他选择并提出了23个尚待解决重大而关键的数学问题，对西方数学的发展起了促进作用，影响至今还在。另外，他还严格证明了狄利克雷原理，解决了数论中的“华林问题”，推出了广义相对论的数学方程，创立了数学基础中的形式主义体系和证明论。希尔伯特是一个出色的教育工作者，培养和造就了一大批学者。1910年希尔伯特荣获了由匈牙利科学院颁发的第二次波尔约奖。他的主要著作除《几何基础》外，还有《理论逻辑基础》（与阿克曼合著）、《直观几何学》等。

希波克拉底（Hippocrates of Chios，公元前5世纪下半）　希腊几何学家。早于欧几里得近100年汇编了第一本关于几何原理的著作《几何纲要》，虽未流传下来，但欧几里得的《几何原本》可能是以此为蓝本的。他研究了著名的几何学三大难题，发现倍立方问题可以化为求一个数和它的二倍数的双比例中项的问题；在化圆为方的尝试中，他证明了圆弧围成的月形面积可以化为三角形的面积。据传也是他第一个把间接证法引用到数学中来的。

狄利克雷（Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805.2.13—1859.5.5）　德国数学家。普鲁士科学院院士，英国皇家学会会员。他在数学的许多领域作出了重要贡献。在数论方面，他证明了费马方程$x^n+y^n=z^n$，当$n=5$，$n=14$时无整数解，这是对费马大定理问题的大突破；在解决数论有关问题的过程中，他引进的一些概念后都以他的名字命名，如狄

利克雷函数、狄利克雷级数等；狄利克雷还是解析数论的创始人之一。在分析学方面，他发展了傅立叶级数理论；修改了高斯关于位函数论的一个原理，引入了狄利克雷原理；他首创了三角级数的理论，引进了狄利克雷积分；他还给出了新的函数（单值）定义，一直沿用至今。这些结果在数学以及物理学领域中起着重要作用。他的遗著《数论讲义》中还包括了他在数论其它方面的大量研究成果。

亨泽尔（Hensel, Kurt, 1861.12.29—1941.6.1） 德国数学家。在代数学、函数论、数论等方面有重要贡献。他证明了矩阵的最小多项式的唯一性。提出了P—进数的一整套理论，使该理论已成为解决代数数论的有效工具。以他的名字命名的内罗克尔—亨泽尔法则，提供了代数函数域的算术基础。亨泽尔的主要著作有《代数函数论》、《代数数论》等。

库尔诺（Cournot, Antoine Augustin, 1801.8.28—1877.3.31）法国应用数学家、科学哲学家。被认为是数理经济学的真正奠基人。其代表作为《财产理论数学原理的探索》。库尔诺的另一部著作《机会与概率理论阐述》，为探索数学哲学作了尝试，在概率计算史上也占有较重要地位。

库默尔（Kummer, Ernst Eduard, 1810.1.29—1893.5.14）德国数学家。柏林科学院院士。他研究了数论中最困难的问题之一——费马大定理，创立了甚至比定理本身更重要的理想数理论。不仅证明工作获得突破，使这个问题后来的一切进展几乎都是以他的此项成果为基础，而且为代数学、函数论、方程论等学科提供了一个新的有效工具。为此库默尔获巴黎科学院奖金。库默尔还探讨了半直线系理论；发现了库默尔曲面；扩展了高斯超几何级数的研究；他的级数变换法在级数的数值计算中也有很广泛的应用。

库拉托夫斯基（Kuratowski, Kazimierz, 1896.2.2— ） 波兰数学家。波兰科学院院士，苏联科学院外籍院士，曾任国际数学家会议副主席。在集合论、拓扑学、实变函数论、数理逻辑、图论等许多领域均有建树。他用集合概念定义序偶，使函数概念得到了新的发展；他创立用闭包公理引入拓扑，独树一帜；他担任集合论杂志主编，为集合论发展作出了贡献。

辛钦（Хинчин, Александр Яковлевич, 1894.7.19—1959.11.18）

苏联数学家、教育家。苏联科学院通讯院士，俄罗斯共和国教育科学院院士。辛钦是苏联概率论学派的创始人之一。在概率论方面，他取得了一系列重要研究成果，并将概率论方法广泛应用于统计物理学。在分析数学中，他引进了渐近线导数的概念；推广了当儒瓦积分，建立了辛钦积分。他还研究了可测函数的结构，并把函数的度量理论应用到数论和概率论中。在数论和连分数度量理论方面，他也有许多研究成果和新的论点。辛钦的著作甚丰，其主要著作有《数学分析简明教程》，《关于数学分析的八篇讲义》、《费尔马定理》、《连分数》等。另外他对改进大学和中学

的数学教育也作出了显著贡献。

辛普森（Simpson，Thomas，1710.8.20—1761.5.14） 英国数学家。英国皇家学会会员。他的研究涉及到数学的若干领域。他为微积分理论的严密化作过努力。他进一步完善了牛顿学说，其后期著作《流数学及其应用》和《总论》已成为流数术计算的楷模。他还致力于将数学应用于公共事业的研究，推动了概率论的发展。现一般教科书中称求曲线下面积的辛普森公式，其实并非由他首创。辛普森的主要著作还有《流数新论》，《机遇规律》，《年金保险与赔款》，《数学论文集》等，他还撰写了三本有影响的教科书、《几何》，《代数》和《三角》。

闵科夫斯基（Minkowski，Hermann，1864.6.22—1909.1.12） 德国数学家。17岁时就解决了巴黎科学院悬赏求解的下列问题：将一个数表成五个平方数的和。闵科夫斯基在代数数论，特别是有理系数的二次型理论方面有重要贡献。他由对应几何原理引进空间距离的新定义，为建立赋范空间做了奠基性工作。他还与著名物理学家爱因斯坦同时奠定了相对论的基础，他的研究工作为相对论提供了数学工具。其主要著作有《数的几何》等。

汪莱（1768—1813） 中国清代数学家。经刻苦自学而精通天文历法和数学。汪莱系统地讨论了球面三角形有解的条件，对球面三角学的发展有一定贡献。汪莱在对方程论的研究中，提出了高次方程正根的存在和数目问题，以及方程存在正根的判别条件，发展了中国古代的方程理论。汪莱对勾股问题、组合问题、P进制以及高阶等差级数求和问题也有创见。汪莱著有《衡斋算学》七册，《衡斋遗书》九卷。另外，他还参于制造过浑天、一方等天文仪器。

沙尔（Chasles，Michel，1793.11.15—1880.12.18） 法国几何学家、数学史家。法国科学院院士及许多国外科学团体的成员。他一生积极倡导综合方法。在他的名著《几何方法的起源和发展的历史概述》中，驳斥了几何学的语言已经陈旧，将不再有用处和影响的论调；书中讨论了射影几何中直射变换和对偶的一般理论；还给出“枚举几何学”的一些结果。沙尔也是著名的数学教育家，他撰写的两部有关几何的教科书，对英、法、德等国数学教学有较大影响。沙尔对数学分析、椭圆积分和偏微分方程也有研究。他引入了交比概念，得到了交比定理。沙尔曾荣获英国皇家学会颁发的科普利奖章。其著作还有《算术史》等。

沃利斯（Wallis，John，1616.11.23—1703.10.28） 英国数学家。英国皇家学会创始人之一，也是十七世纪最富有创造性的数学家之一。他对微积分的发源有重大贡献。他的重要著作《无穷算术》计算了相当于具有任何有理指数的幂函数和某些代数函数的定积分，在微积分学前史中具有非常重要的意义。他得到的关于 π 的无穷乘积表达式

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdots},$$

被称为沃利斯公式。这不仅是数学史上第一个无穷连乘积的例子，它还具有重要的理论价值。在沃利斯的另一部著作《圆锥曲线简论》中，他指出了笛卡尔解析几何的优越性，并用代数坐标的性质来描述圆锥曲线。沃利斯在算术、代数、力学等方面也有重要贡献，其中，无穷大量的表示符号“∞”，就是由他首次引用的。他的主要著作还有《无穷算术》、《普通数学或算术大全》、《力学—运动简论》等。

沃尔泰拉（Volterra，Vito，1860.5.3—1940.10.11） 意大利数学家。对现代微积分学的发展有重大影响，在数学物理、积分方程、泛函分析、集合论等若干领域也有贡献。沃尔泰拉是积分方程一般理论的创始人。他建立了求解第二类积分方程的一种方法，得到了积微分方程的构造法。他引进了泛函分析的一般概念，建立了泛函方程的特征理论。他关于变分法的工作也推动了泛函抽象理论的发展。沃尔泰拉的主要著作均收集在他的《数学论文集》中，其中最重要的著作是《泛函、积分方程和积分微分方程理论》等。

沃罗诺伊（Вороной Георгий Феодосъевич，1868.4.28—1908.11.20） 俄国数学家。彼得堡科学院通讯院士。在数论方面作出了重要贡献。他的连分数算法推广，其方法十分优越。他对三次不定方程的研究，奠定了其一般理论的基础。他同德国数学家闵科夫斯基共同创立了数的几何这门学科。还同他人合作发展了二次型理论和几何学，他们的工作推动了多面体理论的发展，使之成为独立的几何学分支。沃罗诺伊的主要著作有《简单平行多面体的研究》、《渐近函数论的一个问题》等。

沈括（1031—1095） 中国北宋科学家、政治家。沈括“博学善文，于天文、方志、律历、音乐、医药、卜算无所不通，皆有所论著”。1088年他完成了不朽的科学巨著《梦溪笔谈》，这是我国科学发展史上的杰作，也是世界科技史上的一份宝贵遗产。该书共30卷，其中三分之一属自然科学。在数学上，他突出的成就之一是创立了二阶等差级数求和的一种方法“隙积术”。用现在的话说即：每层摆一长方形，每上一层比下一层长、宽各少一个，假定最下一层长、宽分别为c、d个，最上一层长宽各为a、b个，共堆n层。沈括给出堆物总数S的隙积术公式为$S=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$。在数学上，他突出的成就之二是得出了已知圆的直径及弓形的高，求此弓形的底和弧长的方法“会圆术”。设r为圆半径，h为弓形的高，则底长$b=2\sqrt{r^2-(r-h)^2}$；弧长$S=\frac{h^2}{r}+b$。沈括还将数学知识广泛应用于天文、历法、工程、军事中，得到许多重要结果。在物理学、地质学、医学等方面，沈括也有许多贡献。沈括是中外学者公认的卓越科学家，被誉为“中国科学史上的座标”。

怀特海（Whitehead，Alfred No-

rth，1861.2.15—1947.12.30）英国数学家、逻辑学家、哲学家。英国皇家学会会员。他是罗素的老师和朋友，他们合著的《数学原理》标志着人类逻辑思维的空前进步，被誉为永久性的伟大学术著作之一。尽管从纯粹逻辑推不出全部数学，在推导过程中使用了逻辑以外的公理，没有实现他们的予想，但还是大大推进了数理逻辑这门学科的发展。在教育方面，怀特海主张不应向学生填塞知识，而是鼓励和指导他们独立发展。1929年他的另一部著作《过程与实在》出版，成为西方形而上学最庞大的著作之一。

张衡（78—139）　中国东汉科学家。著有数学名著《算罔论》。他算出圆周率 $\pi=\frac{730}{232}$ 和 $\pi=\sqrt{10}$，虽不甚精确，却要早于得到相同结果的印度、阿拉伯数学家500年。他发现《九章算术》中球体积公式不精确，并且进行了研究，虽未得到更好的公式，但其研究方法却给后人以有益的启示。张衡是著名的天文学家，是中国古代宇宙结构理论浑天说的代表。他制成世界上第一台测地震仪器—候风地动仪，还制造指南车与记里鼓车等。在天文学研究中，他也使用了不少数学知识，如“重差钩股”等。其中“勾股”就是勾股定理，“重差”则是相似比例在测量上的应用。

张邱建（生平不详）　中国数学家。著《张邱建算经》。书中所载问题，大部分都是社会上的实际问题，测量、纺织、交换、纳税、冶炼、土木工程、利息等多方面的计算问题都有。其中对级数的研究是一个很大的进步，根据已知条件的不同，书中给出了六、七个等差级数公式。此外，《张邱建算经》还讲了线性方程组解法，二次方程、算术难题的简化解法，重差术应用等。书中最末一题是闻名于世的“百鸡问题，原题是：“今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？”其解法是：“鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。”从书中也可看出，张邱建是数学史上一题多解的首创人。

阿廷（Artin，Emil，1898.3.3—1962.12.20）　奥地利数学家。曾先后在美国一些大学任教，1962年，法国克莱蒙尔德大学授予他荣誉博士学位。阿廷在数学上的成就极为广泛，在代数、几何、数论、群论、拓扑、复变函数论、特殊函数论等多方面都有重要的贡献。其中包括证明了任意数域中的一般互反律（属于希尔伯特23个问题中的第9个问题），这样一些重要成果。许多现代数学的概念、问题都联系着阿廷的名字，如阿廷环、阿廷模、阿廷符号、阿廷L函数、阿廷猜想等。他的主要著作有《γ函数引论》、《伽罗瓦理论》、《几何代数学》等。

阿贝尔（Abel，Niels Henrik，1802.8.5—1829.4.6）　挪威数学家。阿贝尔家境贫寒。15岁时幸运地遇到一位优秀教师霍尔姆特，在他的资助、指导下，阿贝尔自学了许多当代名家的数学著作，并在18岁时进入了大学。1824年完成了论文《论代数方程，证明一般五次方程的不可解

性》，解决了困惑数学家长达三百年之久的难题——“五次方程的根式求解问题”，震动了当时的数学界。1825年阿贝尔在欧洲结识了克雷尔，这是第二个给予阿贝尔事业上极大帮助的人。在克雷尔创办的《理论与应用数学杂志》（简称《克雷尔杂志》上，发表了阿贝尔22篇关于方程论、无穷级数、椭圆函数论等方面开创性的论文。这些论文也使该杂志后来获得永恒的声誉。遗憾的是，阿贝尔这些论文的价值并没有及时地被学术界所认识，这当中包括了一些著名的数学家富立叶、柯西等。阿贝尔26岁在贫病交困中去世。死后两天，接到任命他为柏林大学数学教授的通知。死后两年，他获得法国科学院颁发的数学大奖。为了纪念这位年轻数学家对数学的巨大贡献，以阿贝尔命名了十几个重要的数学概念和定理，如阿贝尔积分、阿贝尔极限定理等。

阿尔冈（Argand, Jean, Robert, 1768.7.18—1822.8.13）　瑞士数学家。业余时间从事数学研究。他与挪威数学家韦塞尔各自完整地给出了复数的几何意义。他指出一个复数$a+bi$可以用一个有向线段来表示，复数可以运算，它的四则运算法则可以用有向线段的运算法则几何地表示出来。阿尔冈还注意到可以把$\sqrt{-1}$看成是按逆时针方向转过90°的旋转，而$-\sqrt{-1}$是按顺时针方向转过90°的旋转，这是因为阿尔冈把有向线段表示为$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$的结果。在他的主要著作《试论几何作图中虚量的表示法》中，还讨论了复数的基本性质，最早用“模”表示向量$a+bi$的长度，并将复数理论运用于三角学、几何学和代数学的研究。阿尔冈的工作消除了人们对虚数的神秘感。

阿达玛（Hadamard Jacques, 1865.12.8—1963.10.17）　法国数学家。巴黎科学院院士，多次获该院科学奖金。阿达玛的数学成就是多方面的，他对复变函数论和偏微分方程中一些基本理论的建立有重要贡献，对微分几何、整数论等方面也有贡献。阿达玛的主要著作有《泰勒级数及其解析延拓》、《线性双曲型偏微分方程的柯西问题》等。他还致力于中学数学问题的研究，编有几何教科书等。作为一个旅行爱好者，阿达玛曾访问过中国。

阿涅西（Agnesi, Maria Gaetana, 1718.5.16—1799.1.9）　意大利数学家，也是近代数学史上第一个著名的女数学家。她天资聪明，很小就学习了数学、逻辑学、哲学、物理学方面的知识，少年时期即精通几种现代语言。她数学上的成就主要以微分学的著作而闻名。因她的著作多有创见，而大受读者欢迎。在《适用于意大利青年学生的分析法规》一书中，阿涅西研究过三次曲线$x^2y=a^2(a-y)$，后被称为“阿涅西箕舌线”。根据阿涅西在学术上的贡献，1749年获罗马教廷金质奖章。

阿蒂亚（Atiyah, Michael Francis, 1929.4.22—　）　英国数学家。曾任英国伦敦数学会主席。阿蒂亚的研究领域包括代数学、代数几何学、拓扑学、分析学及理论物理学。他在数学上的重要贡献之一是阿

蒂亚——辛格指标定理的证明（与美国数学家辛格合作）。这个定理可以说是分析及拓扑两条大道的交叉口，它大大推广了代数几何学的黎曼——罗赫定理。他在数学上的重要贡献之二是发展了K理论。阿蒂亚的主要著作有《K理论》等。1966年阿蒂亚荣获菲尔兹奖。

阿尔福斯（Ahlfors, Lars Valerian, 1907.4.18—　）芬兰—美国数学家。1952年加入美国籍，美国国家科学院院士，曾任美国数学会副主席。阿尔福斯在数学上的主要贡献在复变函数论方面。1935年他发表了复盖面理论，使数学界为之瞩目。他和法国数学家韦伊共同创建了阿尔福斯——韦伊全纯曲线理论。以后在黎曼面有关的问题的研究中，他同另外一些数学家共同发展了拟保角映射理论及其它工具，又获得了一些重大成就，使这一领域成为复变函数最活跃的分支。阿尔福斯有《拟保角映射教程》及黎曼曲面等方面的多种著作。他曾获1936年的菲尔兹奖，又获1981年的沃尔夫奖。目前世界上同时获这两种奖的数学家仅有阿尔福斯同日本的小平邦彦两个人。

阿亨瓦尔（Achenwall, Gottfried, 1719.10.20—1772.5.1）　德国统计学家。他引入了"统计"一词，并用统计方法去描述一些先进国家的经济和税捐的情况，导致了统计学在德国的普遍应用，因而被认为是统计学之父。

阿耶波多（Aryabhata Ⅰ, 476—550?）　印度数学家、天文学家。为区别于印度另一个同名的天文学家（公元950—1100）也常记为阿耶波多第一，而另一位称阿耶波多第二。阿耶波多对数学作出了较大贡献，他总结了当时的数学知识，主要研究天文学和球面三角学，也涉及到算术、代数和平面三角。他把圆周和直径用同一单位来度量，已包含着最早的弧度制观念。他改希腊人计算圆心角所对弧的弦长为半弦长，更接近于现代的正弦概念。他制成的正弦表在三角发展史上也有很大影响。他还给出了计算如等腰三角形面积、角锥体积，以及不精确的球面积公式。给出二次方程和一次不定方程的解法。得到圆周率 $\pi=\frac{62832}{20000}=3.1416$。值得一提的是，他用连分数处理不定方程本质已是现代方法。阿耶波多的著作以其名字命名，名为《阿耶波多历数书》。内有《天文表集》、《算术》、《时间的度量》、《球》等。

阿基米德（Archimedes, 公元前287——公元前212）　古希腊数学家、力学家。后人常把他和牛顿、高斯并列为有史以来三个贡献最大的数学家。有关他的故事也广为流传。据说，为了替叙拉古的亥厄洛王鉴定金皇冠中是否掺有银子，有一次阿基米德在浴盆中洗澡，从水漫溢到盆外得到启示。他高兴得赤身奔回家中，口呼"我找到了"。由此他总结得出了流体静力学的基本原理——物体在液体中减轻的重量，等于排去液体的重量。阿基米德一生有许多重大的数学成就。在几何学方面，他确定了许多几何体的表面积和体积的计算方法；

他求得圆周率$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$；他研究过许多曲线的性质，如椭圆、抛物线、双曲线，以及后用他的名字命名的阿基米德螺线等；他还用几何的方法解决相当于三次方程$x^2(a-x)=b^2c$求解的问题。1906年发现了阿基米德一篇重要著作，内容是探讨解决力学问题的方法。这种阿基米德方法，已经具有现代使用的近代积分论思想。尽管当时还没有摆脱对几何的依赖，也没有使用极限方法，但他的思想是具有划时代意义的。因此，将阿基米德誉为近代积分学的先驱，他是当之无愧的。阿基米德在物理学方面也有重要贡献，他发现了杠杆定理，以及浮力定理（后称阿基米德定理）等。阿基米德还有许多其他的发明。可以说没有一个古代的科学家，能象阿基米德那样将熟练的计算技巧和严格证明融为一体，将抽象的理论和工程技术的具体应用紧密结合起来。据说在罗马大军围攻叙拉古时，阿基米德为祖国献出自己的聪明才智，设计制造了若干机械和武器，给敌人以沉重打击。在叙拉古陷落后，阿基米德被攻城的罗马士兵杀死。现流传下来阿基米德的著作有：《论球与圆柱》、《圆的度量》、《劈锥曲面与旋转椭圆体》、《论螺线》、《抛物线求积》、《平面图形重心》、《数沙者》、《论浮体》等。

阿皮安努斯（Apianus, petrus, 1495.4.16—1552.4.21）　德国数学家、天文学家。他编著的算术书，在欧洲最早用表格表示二项展开式$(a+b)^n$的系数到$n=9$。虽比中国的“贾宪三角形”晚近500年，却比帕斯卡要早100年。另外，书中还给出了普通分数与十进分数之间的简单情况下的变换法则，以及如何利用二项展开式求二至八次方根的方法。

阿波罗尼奥斯（Apollonius of perga，公元前262?—公元前190?）

希腊数学家、天文学家。当时以“大几何家”闻名。他建立了完善的圆锥曲线理论。他撰写的《圆锥曲线论》在阿拉伯和西欧长期被视为经典之作。甚至几乎二千年后，开普勒和牛顿还可以原封不动地搬用来推导行星轨道的性质。除此而外，他还撰有《论切触》、《平面轨迹》等许多论著。他研究过用基数为10000的位值制表示大数问题；探讨过“无序无理数”，扩展了最初由欧多索克斯提出，并在欧几里得《几何原本》中出现过的无理数理论；他计算过π的值，比阿基米德的$3\frac{1}{7}$和$3\frac{10}{71}$更好。在射影几何学、天文学方面，他也有新的见解和建树。他与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大前期数学上的三大家。

陈子　（约公元前6、7世纪）　中国数学家。曾给出陈子测日法，载于《周髀算经》。书中记述了荣方、陈子之问答，意思是说荣方向陈子请教测量太阳距离的方法。陈方答曰：“…日中立竿测影，…周髀长8尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者，股也。正晷者，勾也。正北千里，勾一尺七寸。”可以看出当时已经能够熟练地

运用勾股定理。这也是历史上对使用勾股定理的最早记录。

陈建功 （1893、9—1971、4） 中国数学家。中国科学院学部委员，曾任中国数学会副理事长。陈建功在函数论，特别是其中的直交函数、三角级数、实变函数、单叶函数和函数逼近论方面都取得了重大成就，受到国际数学界的重视和赞誉。他是我国第一个获得日本理学博士学位的人。在日本求学时发表的第一篇论文《无穷乘积的若干定理》，被誉为“在时间和质量上，都标志着我国现代数学的兴起”。他的《三角级数》一书，也是该领域世界上第一部专著。陈建功不仅是我国函数论方面的带头人，也是我国许多现代数学分支的拓荒者，还是著名的数学教育家，指导和培养了一大批数学专业工作者。陈建功共发表60多篇论文，近十种专著和译著，其主要著作有《直交函数级数的和》、《实函数论》等。

陈省身 （Chen Sheng—shen，1911.10.26— ） 中国—美国数学家。美国科学院院士，曾任美国数学会副主席。陈省身被誉为创立现代微分几何学的大师。他结合微分几何与拓扑方法建立了两者之间的联系，推进了整个几何学的发展。他先后三次获得美国数学会的肖夫内奖、斯蒂尔奖，以及美国国家科学奖。1982年荣获菲尔兹奖，1983年又荣获国际的沃尔夫奖。1985年—1987年，中国数学会通过决议，设立陈省身数学奖，作为我国最高数学奖。奖励那些作出突出数学成就的我国中青年数学工作者。陈省身还是一位杰出的数学教育家，指导和培养了许多在国际上知名的科学家。

陈景润 （1933.5.22— ） 中国数学家。中国科学院学部委员。他在证明哥德巴赫猜想上取得了突破性的进展，在世界上处于领先地位。1966年陈景润证明了简记为（1＋2）的命题：每一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和。后经进一步补充修改，1973年完成重要论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》，为世界所瞩目。其中的一个定理被誉为“陈氏定理”。1978年又发表了论文《1＋2系数估计的进一步改进》，推进了上述问题的研究。陈景润曾获全国自然科学一等奖。除已发表70余篇论文外，尚有著作《初等数论》等。

纳皮尔 （Napier，John，1550—1617.4.4） 英国数学家。在数学上他最重要的贡献是发明了对数。1914年出版的重要著作《奇妙的对数规律的描述》，第一次制定了对数及对数表。书中二百多页的对数表就化费了他近20年的心血。对数及对数表的出现，对当时世界贸易以及天文学中数字计算的简化都起了重要作用，是数学史上的一项重大发明。恩格斯把它与笛卡尔的解析几何、莱布尼兹—牛顿的微积分并列为“最重要的数学方法”。伽里略甚至说：“给我空间、时间及对数，我即可创造一个宇宙”。纳皮尔在球面三角与除法运算中也有贡献。纳皮尔的另一部著作《奇妙的对数表的构造》是在他去世后出版的。

纳速拉丁 (Nasīr ad—Dīn al—Tūsī, 1201.2.18—1274.6.26) 阿拉伯数学家、天文学家。是一个很全面的学者。在数学上最大的贡献是他使三角学脱离天文学而成为数学的独立分支。同时，他还较完整地建立了三角学的系统，从基本概念和比例开始，包括平面三角和球面三角的内容。在平面三角中，解斜三角形最困难的一种情形——根据三边求三角，是他首次提出的。在球面三角中，他给出了解球面三角形的六个基本公式，并指出怎样用现今所谓的极三角形来解更一般的三角形。纳速拉丁还评注过古希腊许多数学家的著作，对欧几里得关于平行公设的证明进行了尝试。在天文学方面，他建造了一所巨大的天文台，做了大量实测工作，撰写了一些有影响的天文学著作，如《伊尔汉历》等。纳速拉丁的主要数学著作有《横截线原理书》、《论四边形》等。在伦理学、逻辑学、哲学方面，他也有一些重要著作，如《纳速拉丁伦理学》等。

拉冬 (Radon, Johann, 1887.12.16—1956.5.25) 捷克数学家。奥地利科学院院士。拉冬对数学的贡献在于他发现了在数论中有重要应用和价值的拉冬曲线和拉冬变换。另外，在对复变函数论的研究中，拉冬又引入了拉冬积分，它包含了勒贝格积分和斯蒂尔切斯积分，使积分概念得到进一步推广。

拉梅 (Lamè, Gabriel, 1795.7.22.—1870.5.1) 法国数学家。巴黎科学院院士及许多学会的会员。拉梅在常微分和偏微分方程、数论、函数论、微分几何等几个领域均有贡献。青年时代他向巴黎科学院提交的论文《线与曲面相交》，已有许多创造性的发现，提出了某些新的定理。以后他发表的著作《解几问题各种方法的研究》，又受到当时一些著名数学家的高度评价。拉梅的主要贡献还在与数学物理相联系的那些方面。他探讨了偏微分方程的变换和求解，给出了在任何正交坐标系中表示偏微分方程的方法，一直沿用至今。他还引入了新的曲线坐标系，得到了拉梅方程及拉梅函数等。

拉盖尔 (Laguerre, Edmond Nicolas, 1834.4.9—1886.8.14) 法国数学家。巴黎科学院院士。他是最先探讨复射影平面理论的学者之一。他朝着根据射影概念来建立欧氏几何度量性质这一目标迈开了第一步。他建立了用交比定义角的度量公式，把欧氏几何与射影几何联系起来。另外，拉盖尔还论证了方程论中的笛卡尔符号法则，并将其推广。在对微分方程的研究中也取得一些有价值的结果。

拉克鲁瓦 (Lacroix, Sylvestre Francois, 1765.4.28—1843.5.24) 法国数学家。他对英国微积分学的发展起了重要的促进作用。他编著的《微积分学教程》不仅含有微积分学的许多研究新成果，也是最早流入英国的分析著作之一。拉克鲁瓦对解析几何也进行了研究，“解析几何”这一名称本身也是由他引入的。

拉格朗日 (Lagrange, Joseph Louis, 1736.1.25—1813.4.10) 法国数学家、力学家、天文学家。被

誉为当时最伟大的数学家之一。18岁时由于研究“等周问题”而获欧拉的赞赏。又因成功地解决了法国科学院征解的难题而两度获奖。在这些问题的研究中，拉格朗日发展了微分方程理论，得到了以他名字命名的方程。他探讨了微分方程的奇解问题，给出了一般方法。他成功地解决了把含任意个变量的一阶偏微分方程化为一组联立常微分方程的问题。拉格朗日还成功地得出三次、四次代数方程的拉格朗日解法，发现方程根的适当置换对方程的解影响极大，得到了五次方程不可能用根式解的结论。他关于代数方程的研究对近世代数的发展有很大的价值，导致了伽罗瓦建立了重要的群论。拉格朗日最突出的成就还在于他写成了《分析力学》这部经典力学的巨著。这是自牛顿以后最重要的著作，奠定了分析力学的基础。拉格朗日一生著述甚丰，涉及三体问题、素数理论、概率论、力学以及太阳系的稳定性等若干领域。他晚期的两部分析巨著《解析函数论》、《计算函数讲义》，曾尝试重建微积分的基础，虽然在某些方面未能成功，但他对函数的抽象处理，却是柯西、黎曼、外尔斯特拉斯等的函数论的起点。

拉普拉斯　（Laplace, Pierre Simon, 1749.3.23—1827.3.5）法国数学家、天文学家。他研究的领域广阔，一生中撰写了许多关于积分学、概率论、数理天文学、宇宙论等方面论著。他创立了一种对解微分方程特别有用的积分变换，后称拉普拉斯变换。他给出了展开行列式的法则，现称拉普拉斯展开定理。以他名字命名的拉普拉斯二阶微分方程，在物理中有广泛的应用。他的《分析概率论》一书，总结了该学科的研究成果，并增加了概率论应用方面的内容。他提出太阳系星云假说，被认为是太阳系起源的最完整的学说。他的巨著《天体力学》，集中了自牛顿以来天体力学的研究成果，以及他把数学和引力定律引入天文学所取得的成果，被认为是天体力学的主要奠基人，被誉为法国的牛顿。

拉夫连季耶夫　（Лаврентьев Михаил Алексеевич, 1900.11.19—　）苏联数学家、力学家。苏联及乌克兰科学院院士，曾任苏联科学院副院长。在函数论、常微分方程理论、变分法及复变函数论等数学领域的研究中，拉夫连季耶夫均有建树。特别对复变函数的研究有突出成绩。他重视把数学方法应用于力学和各种实际问题，取得了一系列重要成果。他关心数学教育工作，培养了一大批优秀数学人才，并为高等学校编写了一系列教科书与参考书。如《变分学教程》、《复变函数论方法》等。拉夫连季耶夫的儿子也是苏联著名的数学家。在复变函数论、偏微分方程、数值近似方法和力学中的数学方法的研究中有贡献。他是数学物理中非寻常问题理论的创始人之一。在研究地球构造理论中遇到微分方程及相关问题时，也得到重要结果。

若尔当　（Jordan, Marie Ennemond Camille, 1838.1.5—1921.1.22）　法国数学家。法国科学院院士，彼得堡科学院通讯院士。若尔当在代数学、分析学、函数论、拓扑

学、集合论等方面均有较大贡献。他运用组合论的观点探讨了多面体的对称性，引入并建立了一些重要概念。他系统地发展了有限群论及伽罗华理论，证明了一些重要定理。若尔当的论著《论置换与代数方程》，长期被作为群论的权威著作，在数学界有很大影响。他的《分析教程》一书，也是十九世纪标准的教科书。

范因 (Fine herry Bnrchard, 1858.9.14—1928.12.22) 美国数学家。参与创建美国数学会的工作，曾任该会会长。对牛顿逼近论的研究有贡献。范因还是著名的数学教育家，他写过多本优秀的数学教科书。其中的《范式大代数》在世界广为流传，在我国它作为中学教科书长达半个世纪之久，至今仍有参考价值。

范德瓦尔登 (Van der Waerden, Bartel Leendert, 1903.2.2—) 荷兰数学家。对代数学的发展有重要影响。其主要著作《近世代数》（修订本改名为《代数学》），从某种程度上确定了后来代数研究的特点和方向。它标志着“抽象”代数的初创时期已经结束。另外，他运用近世代数方法严格论证了代数几何中的基本概念。范德瓦尔登还研究了群论方法在量子物理和数理统计中的应用，在数学史方面也作出了贡献。他的主要著作还有《科学的觉醒》、《代数几何导论》、《量子力学中的群论方法》、《代数学史》等。

林尼克 (Линник Юрий Владимирович, 1915.1.21—1972.6.30) 苏联数学家。苏联科学院院士。在数论、概率论和数理统计等学科中，林尼克都创立了一些有效的新方法。他创立了数论中的大筛法；给出了二次型和整数矩阵理论中的各态历经方法；L一级数理论中的凝集方法，并用这种方法解决了一系列典型的数论问题，取得了哥德巴赫的新进展。在解析数论中，他还提出差离法等等。林尼克的主要著作有《最小二乘法和处理观察数据的数理统计理论基础》、《概率规律的展开》、《解析数论的基本方法》、《二元加法问题中的差离法》等等。

林家翘 (Lin Chia—Chiao,1916.7.7—) 中国——美国应用数学家、物理学家、天文学家。美国科学院院士，历任美国工业和应用数学委员会主席、美国数学学会应用数学委员会主席等职。他致力于应用数学、流体力学和天体物理学的研究，取得了重要成果。他推进了微分方程渐近理论的研究；他完成的星系旋涡结构的密度波理论成功地解释了许多天文观测现象。林家翘荣获过美国科学院应用数学奖和美国物理学会流体力学奖。他的主要著作有《流体力学稳定性理论》、《应用到自然科学中的确定性问题的数学》等。

林德曼 (Lindemann,Carl Louis Ferdinand, 1852.4.12—1939.3.1) 德国数学家。其突出贡献是给出圆周率π的超越性证明。这个证明彻底解决了困惑人们两千年的化圆为方问题，确定古希腊化圆为方问题只用圆规和直尺是不能解决的。林德曼培养过包括著名数学家希尔伯特在内的60多名博士生，还翻译出版过庞加莱的部分著作，为其思想在德国的传播

起了推动作用。

奈望林纳　（Nevanlinna, Rolf Herman, 1895.10.22—1980. 5. 28）　芬兰数学家。芬兰科学院院士，曾任芬兰数学协会主席和国际数学联合会主席。他是芬兰函数学派的领导人，主要从事变量解析函数理论的研究。他建立了亚纯函数的一个一般性理论（现称为奈望林纳理论），给出了第一及第二基本定理，在亚纯函数值分布理论上独树一帜，影响深远。奈望林纳的主要著作有《皮卡——波莱尔定理与亚纯函数理论》、《单值解析函数》等。

欧拉　（Euler, Leonhard, 1707. 4.15—1783. 9.18）　瑞士数学家、欧洲最伟大的数学家之一，也是十八世纪著作最多的一位数学家，至今几乎每一个数学部门都可以看到欧拉的名字。他在几何学、微积分、力学和数论等方面都有重大的开创性贡献。他发展了积分计算、三角函数、对数函数和线性微分方程的理论，发展了数学分析中函数的概念，并推进了无穷小量和无穷大量的使用。在初等数学中他也有许多重要成果。他创立了简单多面体公式：设简单多面体的面数、顶点数、棱数分别用F、V、E表示，则有$F+V-E=2$。即欧拉公式。他第一个把三角函数作为数量的比值来处理，并利用欧拉公式（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）把它们与复数联系起来。他发现了负数的虚对数，并指出每个负数有无限多的对数值。他引进了许多数学符号，如Σ（求和）、e（自然对数的底）、f（函数）、i（虚数）等。他还发现了数论中的二次互反律，现已成为近代数论的一个重要内容。欧拉著作空前丰富，其著作数学内容约占58%，物理学和力学占28%，天文学占11%，其余约占3%。1907年瑞士自然科学会开始筹集整理《欧拉全集》，计划是72卷，第一辑数学，共29卷，直到1956年才出齐。其中的《无穷小分析引论》是世界上第一本完整系统的分析引论；《微分学原理》、《积分学原理》作为微积分教科书的范本，一直流传至今。欧拉的一生基本是在逆境中渡过的，他28岁右眼失明，21年后，左眼也完全丧失视力。1771年彼得堡的大火，又将其全部手稿化为灰烬，但他仍以顽强的毅力孜孜不倦地工作，在双目失明的17年里，还口述了四百多篇论文和著作。他的精神为后人树立了光辉的榜样，被誉为“数学家之英雄”。

欧几里得　（Euclid，约公元前330—公元前275）　希腊数学家。古代最杰出的数学家，以巨著《几何原本》而闻名于世。这部西方世界现存最古老的数学著作，为两千年来用公理法建立演绎的数学体系树立了最早的典范。这部著作从他写作的年代一直流传至今，可以说除《圣经》以外，再没有一本书象《几何原本》拥有如此众多的读者，被译成如此多的语言。到十九世纪末，该书已用各种版本、各种语言印出达一千版以上。《几何原本》对人类活动起着持续的重大影响。至少在非欧几何出现以前，它一直是几何的推理、定理和方法的主要源泉。欧几里得还是一个优秀的教育家，除《几何原本》外，还

写过许多数学、天文、光学和音乐方面的著作。1916年出版的拉丁文本《欧几里得全集》，收入了他留下的全部著作。

欧多克索斯 （Eudoxus of Cnidus，约公元前400—公元前350） 希腊数学家、天文学家。他运用公理法建立了比例理论，这是他在数学上的一大贡献。由于其中包含了相当严密的实数定义，处理了不可通约量即无理量问题，因而推动了数论和几何学的发展。欧多克索斯进一步完善了穷竭法，被尊为微积分学的先驱。他用此法证明了三棱锥和圆锥的体积是同底等高柱体体积的三分之一；证明了圆的面积同它的半径的平方成正比等。他还探讨了公理法，可能是第一个对公理和命题作了系统阐述的人，欧几里得的公理方法可能也是欧多克索斯最先发展起来的。欧多克索斯是古代最杰出的学者之一，就数学而言，其地位仅次于阿基米德。他在天文学方面的贡献在古代和中世纪的欧洲也有较大影响。他的著作颇丰，仅天文学著作就有《镜》、《论速率》、《太阳的隐没》等，遗憾的是这些著作均已失传。

尚农 （Shannon, Claude Elwood，1916.4.30— ） 美国数学家、工程师。美国科学院院士，美国科学艺术研究院院士。信息论的创始人之一。他将通讯理论建立在严格的数学基础之上，为信息论成为一门独立的理论学科奠定了基础。他给出的关于无记忆信道的尚农定理已成为信息论基本定理。这种理论的发展已成为当今最重要的数学领域之一。尚农的上述工作还大大地促进了离散的自动机的一般原理、概率图表理论和控制系统论的发展。尚农的主要著作有《信息论和控制论》等。

尚克斯 （Shanks, William，1812.1.25—1882 ） 英国数学家。以计算圆周率π而著名。1853年他分别将π计算到530位和607位10位小数，1873年则算至707位。尽管后人曾在其计算结果的528位上发现错误，但他的结果仍被认为是π值计算上的重要里程碑。

旺德蒙德 （Vandermonde, Alexandre—Theophile，1735.2.28—1796.1.1） 法国数学家。巴黎科学院院士，国家研究院院士。旺德蒙德首次对行列式理论作出了系统的逻辑的论述，成为行列式理论的奠基人之一。他也把行列式理论应用于解线性方程组，并给出了用二阶子式及其余子式展开行列式的法则。旺德蒙德的主要论著是他向巴黎科学院提交的四篇论文。

明安图 （约1692—1765） 中国蒙古族数学家、天文学家。他完整地证明了当时西方引入我国的三角函数幂级数展开式和π的无穷级数表示式，并进一步发现了六个这样的展开式，其中有的是世界上的最早成果。证明中，他创造了“割圆连比法”，把弦与弧联系起来，使曲、直互变，因而也被誉为中国变量数学的先驱。明安图在天文学和测绘学方面也有重大贡献。他参加了三部重要天文学著作的编写工作，也参与了绘制新疆等地区的地图工作。明安图的数学成就主要集中在《割圆密率捷法》一书中。该

书在他生前只完成一部分，余下部分由他的儿子明新和学生陈际新在1774年完成。

罗门　(Roomen, Adriaan Van, 1561.9.29—1615.5.4)　比利时——德国数学家。在几何学与三角学方面有贡献。他对圆面积和弦长的计算作过有益探索，发现了三种计算正多边形的方法；还曾计算过$15\cdot 2^{60}$边形，并得到过精确到16位小数的π值。罗门首次系统地使用了三角学符号，在三角学理论等方面做了大量工作。他的主要著作有《天文学之鉴》、《球面三角学法则》等。

罗尔　(Rolle, Michel, 1652.4.21—1719.11.8)　法国数学家。以他的名字命名的罗尔定理，是现在微分学的一个重要定理。早在1691年罗尔在其《方程的解法》一书中，经论证得出：在多项式$f(x)=0$两个相邻的实根之间，$f'(x)=0$至少有一个实根（当时没有导数概念，也没有$f'(x)$的写法，但根据定理的结论，恰好相当于多项式的导数）。此定理本与微分学无关，后人将其推广于一般连续函数，并加上罗尔定理之称，一直沿用至今。罗尔在代数学上的贡献，还在于他积极采用简明数学符号撰写数学书籍，提出用所谓"级联"法则分离代数方程的根等。

罗素　(Russell, Bertrand Arthur William, 1872.5.18—1970.2.2)　英国数理逻辑学家。英国皇家学会会员。他在数学上力图建立逻辑和数学之间的联系，用逻辑将全部数学推出来。他同怀特海合作写成的巨著《数学原理》，对数理逻辑的发展作出了卓越的贡献。他提出的"罗素悖论"，轰动一时，对20世纪的数学基础发生过重大影响。他发展了类型论，引进等价类的概念，阐述数学哲学的思想，倡导数学基础的逻辑主义等。罗素一生完成40余部著作，除数学内容外，还涉及到哲学、科学、伦理学、社会学、教育学、历史、宗教以及政治等各个方面，成为二十世纪声誉卓著，影响深远的思想家之一。他一生获得很多荣誉，1950年荣获诺贝尔文学奖金。罗素的主要著作还有《西方哲学史》、《哲学大纲》、《数理哲学导论》等。

罗特　(Roth, Klaus Friedrich, 1925.10.29—　)　德国——英国数学家。主要从事解析数论的研究，且有重大突破。他将其中的图埃——西格尔定理，发展成为图埃——西格尔——罗特定理，大大促进了有关问题的进展，从而荣获1958年菲尔兹奖。

罗贝瓦尔　(Roberval, Gilles Personne de, 1602.8.8—1675.10.27)　法国数学家。巴黎科学院的创始院士。在几何、代数方面有较大贡献。他研究确定立体表面积和体积的方法，改进并发展了数学家卡瓦列里在计算某些简单问题的不可分法，比卡瓦列里更接近于积分学的概念。他还引入了运动合成法则，将平面曲线看成为一个质点受两个作用力的合力所推动的运动轨迹，用以求曲线的切线，求极值和比较曲线的长度等，构成了所谓运动几何的基础。在物理学、天文学方面，罗贝瓦尔也有新的见解。他还发明了罗贝瓦尔天

平，做过关于真空的著名实验。

罗巴切夫斯基　(Побачевский Н•И　1792.12.1—1856.2.24)　俄国数学家。罗巴切夫斯基是非欧几何的创始人之一。这种几何不是基于欧几里得的平行公设，即在平面上过直线外一点可以作唯一一条直线与该直线平行，而是从以下命题："在平面上过直线外一点可作不止一条直线与该直线平行"出发，在严密的推导下，得到一个和欧几里得几何不同的新的几何体系。为了扩大自己学说的影响，他先后用俄文、法文、德文继续发表他的思想，并在这些著作中进一步给出了新几何学完整而系统的论述。在他近于失明的情况下，还口述用俄、法两国文字完成了《泛几何学》一书，进一步阐述了他的理论。罗巴切夫斯基生前，非欧几何并未获普遍的接受。他去世后不久，经高斯、黎曼等数学家的推荐、肯定，他的学说才逐渐被普遍承认。非欧几何更深刻地反映了现实世界的空间形式，是人类空间认识史上的一次质的飞跃，它成为近代几何全新发展的开端，并在相对论中得到论证，在多领域得到应用。除几何外，罗巴切夫斯基在无穷级数理论，特别是三角级数以及积分学和概率论等方面也有出色工作。罗巴切夫斯基还是一位杰出的教育家和管理者。

帕朗　(Parent, Antoine, 1666.9.16—1716.9.26)　法国数学家。巴黎科学院院士。帕朗在数学上的最大贡献是他最早把解析几何推广到三维空间，使用三个坐标变量的方程表示曲面。他的研究还涉及到球面、柱面以及其它曲面的几何性质，也包括了螺旋线的几何性质，涉及到算术和射影问题。帕朗的主要论著都集中在他的《数学与物理论文集》一书中。

帕斯卡　(Pascal, Blaise, 1623.6.19—1662.8.19)　法国数学家。少年时就写成数学成就很高的《圆锥截线论》，其中得出了著名的"帕斯卡六边形定理"，这成为射影几何的基本理论之一。他还建立了概率论的基本原理和若干重要的组合定理，成为概率论的创始人之一。帕斯卡在无穷小分析方面作出了重要贡献，他建立的积分法的基本思想对微积分学的创立和无穷小分析的发展起了重要作用。帕斯卡还对几何学的哲学基础作了精辟的阐述，指出定义和公理的意义，说明了它的准确性和严密性，并认为还可以把这些概念推广到其它学科及人类思维领域中去。他研究了二项式展开的系数规律，提出了由这些系数所组成的所谓"帕斯卡三角形"（但晚于我国数学家贾宪）。帕斯卡还设计制成了一个计算装置，从某种意义上说这是第一架数字计算器。他的主要著作有《算术三角形》、《论摆线》等。

帕波斯　(Pappus of Alexandria　约300—约350)　希腊数学家。亚历山大时期最后一位伟大的几何学家。他给欧几里得的《几何原本》和《数据》、托勒密的《大汇编》和《球极平面投影》作过注释。他更大的贡献在于他写成《数学汇编》一书，这是一部在数学史上颇有声望的伟大著作，是一部研究希腊数学，并附有现存定理和证明的历史批注、改进和增

减的综合性文献。现在关于希腊数学的许多材料由此书而得，是名副其实的希腊几何学宝库。这本书系统地介绍了古希腊数学家及其成就，也补充了帕普斯本人对于立体几何、高次平面曲线、等周问题等的研究成果。

凯莱　(Cayley, Arthur, 1821.8.16—1895.1.26)　英国数学家。伦敦皇家学会会员，还拥有许多国家的荣誉学位。凯莱年轻时就显示了数学才能，他的研究几乎涉及到纯粹数学的各个领域。他是不变量理论的奠基人之一。他第一次引入n维空间概念，详细讨论了四维空间的性质，为复数理论作出了贡献，并为射影几何开辟了道路。他给出了矩阵论的一系列基本概念，系统地阐述了关于矩阵的理论，因而也是矩阵理论的先驱。他所发展的矩阵代数以及不变量思想，对现代物理的量子力学和相对论的创立起了推动作用。他定义了抽象群，研究了四元数和八元数，以及图论、微分方程、微分几何中的一系列问题。他还设计了一种把投影几何和度量几何结合起来的方法，为把欧几里得几何和非欧几何看作为同一种几何的特殊情况铺平道路。凯莱仅有一本专著《椭圆函数初论》出版，但却发表了近千篇论文，其中一些影响深远。

凯拉吉　(al—Karaji, 10世纪末，11世纪初)　阿拉伯数学家。在代数学方面作出了重要贡献。他首次论述了代数多项式理论；研究了单项式与多项式的加、减、乘、除、开方运算；证明了单项式乘法运算法则；给出了正系数多项式开方以及根式运算的方法。凯拉吉还探讨了一元二次方程，某些高次方程和不定方程的解法等方程论方面的问题。

凯特勒　(Quetelet, Lambert—Adolphe—Jacques, 1796.2.22—1874.2.17)　比利时数学家。布鲁塞尔皇家科学院院士。凯特勒在统计学、几何学、天文学、气象学、地球物理学等方面均有贡献。以将统计学和概率论应用于社会现象而著名。他发起并组织了在布鲁塞尔举行的首届国际统计学大会，是数理统计学的主要开创人之一。

图灵　(Turing, Alan Mathison, 1912.6.23—1954.6.7)　英国数学家、逻辑学家。英国皇家学会会员。他开拓了计算机理论，对计算机过程的逻辑分析作了重要贡献，是计算机科学的先驱。图灵解决了数理逻辑中的一个重大问题，即怎样判断一种数学问题是否机械可解？他引用了一种"理想计算机"，即图灵机，可以按照适当的程序写出任何可计算数，给出了一个检验可计算数的标准。他还论证了不可计算数的存在，突破了希尔伯特所持的结论。图灵参于设计和研制了电子计算机，他在制造早期计算机和发展早期程序技术方面的努力，在现代计算机的进程中是极为重要的。图灵有不少见解可以说是跨时代的。为纪念图灵在科学上的贡献，60年代美国计算机协会专门设立了一年一度的图灵奖，以表彰那些在该学科作出重大贡献的人。图灵的主要论著有《论高斯误差函数》、《论可计算数》、《计算机和智能》等。

彼得罗夫斯基　(Петровский Иван

Георгиевич，1901.1.18—1973.1.15） 苏联数学家。苏联科学院院士，曾任莫斯科大学校长。彼得罗夫斯基数学研究领域广阔，涉及到偏微分方程、常微分方程定性理论、积分方程、函数论、概率论、代数几何学、拓扑学等。其中他提出对偏微分方程组的分类，即把偏微分方程组分为椭圆、双曲和抛物三种类型，并分别进行研究，是二十世纪数学研究的重大成果，并为此荣获1946年苏联国家奖金。彼得罗夫斯基还为高等数学教育作出了重要贡献，他撰写了大量数学教科书，其中《偏微分方程讲义》、《积分方程论讲义》、《常微分方程论讲义》等曾获斯大林奖金。

庞加莱 （Poincare，Jules Henri，1854.4.29—1912.7.17） 法国数学家、物理学家、天体力学家。曾当选为法国科学院主席，法国科学院院士，获得了“他的国家所能给予他的一切荣誉”，被公认为十九世纪进入二十世纪时最伟大的数学家。庞加莱研究领域广阔，几乎遍及数学和物理学的一切前沿阵地。“单复变自守函数”是他的划时代发现，其完美程度几乎是他自己开创并结束了这个理论。庞加莱还是多复变解析函数论和代数拓扑学的创始人。在对天体力学，特别是三体问题的研究中，他发展了强有力的新数学方法，包括渐近展开和积分不变量理论，并对微分方程的积分曲线在奇点附近的状态作出了基本性的发现。他还独立于爱因斯坦得到了狭义相对论中的许多结果。庞加莱一生著作甚丰，仅创造性的数学论文就达五百篇之多。其主要著作还有《天体力学的新方法》、《用微分方程确定的曲线》、《科学的假说》、《晚年的思想》等。在庞加莱去世以后，巴黎科学院于1916—1954年出版了《庞加莱全集》共十卷。

庞斯列 （Poncelet，Jean—Victor，1788.7.1—1867.12.22） 法国数学家、力学家。巴黎科学院院士，彼得堡科学院通讯院士。庞斯列是现代射影几何学创始人之一。他研究了图形在投影下保持不变的性质，发展了对合与调和点列的理论，系统地阐述了所谓连续性原理，讨论了“反极”法则，促进了对偶原理的建立。为表彰、纪念庞斯列在科学上的贡献，巴黎科学院特设立了庞斯列奖金。

庞特里亚金 （Понтрягин，Лев Семенович，1908.9.3— ） 苏联数学家。苏联科学院院士。庞特里亚金14岁双目失明，以顽强毅力进行学习和科学研究。他建立了著名的庞特里亚金对偶定理，更新了代数拓扑的内容，是二十世纪拓扑学最卓越的成就之一。他给出了庞特里亚金类，使其对同伦论的研究取得了重要进展。在对控制论的研究中，他提出了所谓庞特里亚金最大值原理，又使他成为最优化过程的数学理论的奠基者。庞特里亚金在振荡理论、代数李群理论和微分几何等方面也有贡献。他的专著《连续群》，曾获1941年斯大林奖金。其它著作还有《组合拓扑学基础》、《最佳过程的数学理论》等。

法尼亚诺 （Fagnano dei Toschi，Giulio Carlo，1682.12.

6—1766．9．26） 意大利数学家。英国皇家学会会员、柏林科学院院士。自学成才。被认为是三角形几何学的创始人。他证明了“三角形中各顶点到重心距离的平方和等于各边平方和的$\frac{1}{3}$”等若干几何定理。他最先使用了虚指数，发现了关系式$\frac{\pi}{4}=\log\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}$，还提出了三次和四次代数方程的新解法。另外，对椭圆函数论的建立他也作出了一定贡献。

波尔约 （Bolyai，Jónos，1802．12．15—1860．1．27） 匈牙利数学家。非欧几何的创始人之一。早在大学读书之时，他就试图证明欧几里得第5公设。在失败中他决心创立新的几何学，并于1823年得到了非欧几何的基本原理。波尔约将自己的论文附在其父F．波尔约的一本数学书《将好青年引入纯粹数学原理的尝试》第一卷之末。论文共28页，内容简洁、概括，已建立起一个完整，无矛盾的非欧几何体系。波尔约致力于复数理论的研究，成功地予言了哈密顿的虚数表示法。遗憾的是，他的上述学术成就在当时都未得到公正评价。为纪念这位杰出的数学家，根据世界和平理事会的决定，建议以他的名字命名一种国际数学奖金。

波伊亚 （Pólya，George，1887．12．13—1985 ） 匈牙利—美国数学家。生于布达佩斯，1940年加入美国籍。波伊亚数学研究领域广阔，精于泛函分析、数理统计和组合分析。尤为突出的是，他还是一位优秀的教育家、数学方法论专家。他十分重视学生解题能力的培养，并致力于这方面的研究，始终把高深的数学研究同数学的普及教育结合起来。波伊亚的著作甚丰，其主要著作《分析的原理与习题》、《数学与猜想》、《怎样解题》、《数学的发现》等，均被译成几十种文字，影响很大。

波莱尔 （Borel，Émile，1871．1．7—1956．2．3） 法国数学家。巴黎科学院院士，也是苏联科学院和其它科学院的外国院士。波莱尔积极地发展了现代数学分析的不同方向。他系统地发展了可知性级数理论，用无穷积分建立了发散级数理论的表达式；引进了可和与绝对可和性概念；证明了绝对可和的发散级数可以象收敛级数那样进行运算。在集合的测度问题上，他跨出了重要的一步，提出了波莱尔测度。他使历时18年未得到证明的皮卡定理得以证明，为复值函数理论的推广提供了方法。他还最先将康托尔集合论的思想应用于函数论。其主要著作发表在《函数论专集》中，该专集在很长时期内对函数论方面的研究起过重大的影响。波莱尔还发表过300多篇涉及数学若干领域的论文，因而数学中的若干概念、定理以他的名字命名。波莱尔多次获得巴黎科学院的奖金。

波斯特 （Post，Emil Leon，1897．2．11—1954．4．21） 波兰—美国数理逻辑学家。美国数学会会员，也是美国符号逻辑协会的创始会员。波斯特在学术界相当活跃，他是现代证明论和现代机器计算理论的开

创人之一。在数理逻辑和数学基础方面有重要贡献。他证明了罗素和怀特海提出的命题演算的相容性和完备性，系统地运用了真值表法则，引入了多值真值表。他与图灵几乎同时引入了“图灵机器”。他还给出了分析学中与拉普拉斯变换相联系的反演公式等。

波尔茨曼 (Boltzmann, Ludwig Eduard, 1844.2.2—1906.9.5) 奥地利数学家、物理学家。维也纳科学院院士，也是欧洲许多国家科学院院士。波尔茨曼是统计物理学及动力学的创始人之一，他同吉布斯提出的遍历性假设，后成为经典统计力学的基础。他建立了速度分布函数所满足的分布律，并针对速度分布函数随时间而变化建立了一个偏微分方程，后称波尔茨曼方程。他还把偏微分方程理论、数理统计和数学物理方法应用于物理研究之中。其主要著作有《力学原理教程》、《动力学气体理论教程》等。

波尔查诺 (Bolzano, Bernard, 1781.10.5—1848.12.18) 捷克哲学家、数学家、逻辑学家、宗教家、伦理学家。他开始将严格的论证导入分析学中，对于分析基础的建立做出了重大贡献。他指出，要在数学中合理地使用无穷级数，必需先给出无穷级数收敛性的定义和判别法，他研究并给出了级数收敛的概念。他还给出函数连续的恰当定义，证明了多项式函数是连续的。波尔查诺对无穷理论的研究，虽当时不为人注意，其哲学意义却比数学意义更大。波尔查诺的主要著作有《纯粹分析的证明》、《无穷的悖论》等。

波戈列洛夫 (Погорелов Алексей Васильевич, 1919.3.3—) 苏联数学家。乌克兰科学院、苏联科学院院士。波格列洛夫主要研究大范围的几何问题，完全解决了一般凸曲面的单值确定性问题；证明了关于等矩闭曲面，全曲率为2π的无穷阶凸曲面以及在某些补充条件下，曲率小于2π的无穷阶凸曲面的三个等式。波格列洛夫还解决了任意黎曼空间中二维黎曼流形的浸入问题，以及一般凸曲面的无穷小变形等问题。他曾荣获1950年苏联国家奖。其主要著作有《黎曼空间中某些“大范围”几何问题》、《微分几何讲义》、后一部著作是波格列洛夫编著的大量教科书之一。

项名达 (1789—1850) 中国清代数学家。他研究了明安图与董祐诚的数学著作中的“方圆互通”问题，创立了“零整分递加法”，指出形与数能够统一，可以转化。他用自己的方法把董祐诚的四个幂级数概括为两个，使其更具普遍性。项名达用初等方法求得椭圆周长的级数表达式，同利用近代椭圆积分所得的结果完全相同，其中已明显包含“无限细分无限求和”的积分思想。项名达的主要著作有《勾股六术》、《三角求和较术》、《开诸乘方捷术》。晚年作《象数一原》六卷，因年老病重未完而去世，后嘱友戴煦续成。

赵爽 (约222年) 中国东汉末至三国时代数学家。他在我国数学史上贡献较大，其不少数学思想和方法对后世有影响。他为《周髀算经》作

过详细注解，并撰写了序文《勾股圆方图》。序文虽然只有五百多文字，附图6张，但却是重要的数学文献。序文总结了东汉时期勾股算术的成就，给出了我国最早的勾股定理的理论证明。印度数学家波什迦罗也曾用过类似的证明方法，但比赵爽晚约九百年。赵爽证法的基本思想是图形经“移补凑合”而面积不变，这种方法后为许多人所用，发展为“演段术”。序文还研究了二次方程问题，得到同“韦达定理”类似的结果，时间却比韦达提早了一千三百多年。另外，赵爽还得到世界上最早的二次方程求根公式之一。

赵友钦　(1280年左右)　中国数学家。他对古代一些圆周率π的近似值如3、$\frac{157}{50}$、$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$进行了比较。他用割圆术的方法，从圆内接正方形起算，一直求到圆$16384 = 4 \times 2^{12}$边形，证明了$\pi = \frac{355}{113}$最精密。赵友钦具有朴素的极限观念，他已认识到当圆内接正多边形的边数无限增加时，正多边形的极限就是圆。同时他还认识到，虽然从“一、二次求至十二次，可谓极其精密。若节节求之，虽至千万次，其数终不尽。”就是说，虽可以继续求下去，而且不会求到头，这比以前刘徽的认识又前进了一步。

茹科夫斯基　(Жуковский Николай Егорович, 1847.1.17—1921.3.17)　俄国数学家、力学家。彼得堡科学院通讯院士，曾任莫斯科数学会主席。茹科夫斯基是现代流体力学和气体动力学的创始者，被称为“俄国航空之父”。在数学上，他研究了偏微分方程和方程近似积分法，最先将复变函数广泛应用于流体力学与气体动力学中。茹科夫斯基对解析函数也有研究，边界理论中的定律之一就是以他的名字命名的。他还是一位著名的教育家，对俄国科技队伍的形成与发展起了重大作用。为纪念茹科夫斯基在科学上的功绩，苏联政府和部分苏联高等学校分别建立了茹科夫斯基奖金，莫斯科市还建立了茹科夫斯基科学博物馆。

胡世华　(1912—　　)　中国数学家。中国科学院学部委员。在对拓扑学、数理逻辑等方面的研究中取得一些重大成果。他建立了拓扑空间中“非完整点”的概念和理论，提出了把减少值具有函数完全性的逻辑嵌入到较多值逻辑中去的系统方法；他还提出了一种程序（算法）语言的描述方法，建立了“原形文法”的概念和理论。另外，他建立的有穷基自由半群上的递归函数概念和理论也是富有开创性的。

柯西　(Cauchy, Augustin—Louis, 1789.8.21—1857.5.23)　法国数学家、力学家。伦敦皇家学会会员和几乎所有外国科学院的院士。柯西的研究涉及到数学的各个领域。他奠定了数学分析的严格逻辑基础，提出了关于极限理论的ε方法（后又改写成δ），把整个极限过程用不等式来刻划，使无穷的运算化为一系列不等式的推导，后经改进一直沿用至今。他用极限理论把连续、导数、微

分、积分等概念严密化，给出了严格定义。他为复变函数论作了奠基性工作，他所取得的成果，如复变函数的几何概念，柯西积分定理和公式，以及残数理论等具有重要的意义。他发现了行列式的所有性质，从而发展了行列式理论。他也是有限界群论的创始人。他首次研究了不定三次方程，精心地证明了代数基本原理。曾因证明关于多角数的费尔马定理而轰动数学界。柯西对力学、天文学也有重要贡献。他一生至少出过七部书和八百多篇论文，柯西全集已达27卷之多。以他名字命名的概念、定理、公式至今仍大量出现在数学书籍中，仅弹性论方面，以他名字命名的概念与定理就有16个之多。柯西的主要著作有《分析教程》、《无究小计算讲义》、《无穷小计算在几何中的应用》等。

柯伦 (Ceuien, Ludolph van, 1540.1.28—1610.12.31) 德国数学家。以计算圆周率π值而闻名。他曾利用圆内接和外切正15×2^{31}边形，将π值计算到20位。最终又推进到35位。柯伦为此付出了毕生精力，甚至在他的墓碑上都刻有35位小数的π值。他的主要著作为《算术与几何基础》。

柏拉图 (Plato，公元前427—公元前347) 希腊哲学家、学者。他虽不是数学家，但他热心于这门学科。公元前387年，他创办了一所学园，广交学者，传道授业，世人称柏拉图学园。柏拉图的数学思想对该学派产生了强有力的影响，可以说公元前四世纪的重要数学工作几乎都是柏拉图的朋友和门人搞的。为表明数学在柏拉图学园的地位，学园门口挂了一块字牌，上写“不懂几何者，不得入内”。柏拉图及其学派提出了分析的证明方法，将其提炼成普遍适用的合乎理性的形式，引入了术语“分析”和“综合”。这是其最大成就之一。在前人工作的基础上，柏拉图对几何中所采用的逻辑方法作了重要改进，给几何的概念、公理以更为明确的阐述。几何学被奠定在逻辑的基础之上，与柏拉图及其学派的努力是分不开的。柏拉图还推动了立体几何学的发展。由于古代希腊的许多数学家出自柏拉图学派或受过该学派教育，因而柏拉图被誉为“数学家的生产者”。

威尔逊 (Wilson, Edwin Bidwell, 1879.4.25—1964.12.28)

美国数学家、物理学家、统计学家。华盛顿自然科学学会会员。他和他的老师吉布斯是向量分析的创始人。威尔逊把概率论和数理统计应用于人口统计方面，并研究了误差理论在生物学和天文学中的应用。在统计推断方面，他改进了区间估计，并阐明了如何严格地构造一个置信区间。他的主要著作有《向量分析》、《高等微积分》、《航空学》等，其中的《高等微积分》在同类书中享有盛誉。

威格纳 (Wigner, Eugene Paul, 1902.11.17—) 匈牙利——美国数学家。他是把李群理论应用于量子物理学的首创者之一。由于他发现原子核中质子和中子相互作用力的对称性原理而荣获1963年诺贝尔奖金。他的主要著作有《群论及其在原子光谱

的量子力学中的应用》等。

奎伦　(Quillen, Daniel, 1940.4.22—　)　美国数学家。美国科学院院士。他解决了代数K理论中的亚当斯猜想；得到了K理论中塞尔猜想的证明，并开始将代数归结为拓扑，形成代数k理论的基础。奎林在发展k理论方面所作的重大贡献，使他荣获1978年菲尔兹奖。在同伦理论、形成群理论，以及上同调论等方面奎林也有重要研究成果。

卢伊　(Lewy Hans, 1904.10.20—　)美国数学家。他与弗里德里希斯合作提出了解偏微分方程的收敛性问题的差分方法。他给出了著名的光滑线性偏微分方程无解的例子，为后来建立该问题的一般理论作了奠基性工作。他还简化了希尔伯特第19个问题的证明。卢伊荣获了1984年沃尔夫奖。

哈尔　(Haar Alfvéd, 1885.10.11—1933.3.16)　匈牙利数学家。匈牙利科学院通讯院士。1903年曾赢得第一届厄特弗什数学竞赛奖，1920年参与创办《数理科学》杂志。在对分析理论的研究中，他把傅立叶系的发散、求和、振荡推广到其它的正交系，并发现某些正交系的奇异性质。哈尔在数学上的最大贡献还在于他给出了群上的“哈尔测度”，并证明了每一个局部紧群均具有不变测度。这一定理已成为近世代数和拓扑学的基石。

哈代　(Hardy,Godfrey Harold, 1877.2.7—1947.12.1)　英国数学家。英国皇家学会会员，巴黎科学院院士。哈代的研究领域广阔，在数学上的贡献甚多。比较突出的成果是：他同利特尔伍德合作完成了关于华林定理的新证明，使华林问题的解决获得新的进展；他还同拉马努金合作完成了多项课题，特别在正整数的分析理论上取得了一系重要成果，对于推动近代堆垒数论的发展有重要的意义。哈代还是著名的数学教育家，他培养了许多优秀的数学人才。他的《纯数学教程》一书，论及数、函数、极值等课题，是英国的优秀教科书。他的另一部著作《傅立叶》也被译成中文。

哈密顿　(Hamilton, William Rowan, 1805.8.4—1865.9.2.)　英国数学家、物理学家。美国、爱尔兰等多国科学院院士。荣获过英国皇家学会皇家勋章。哈密顿天资聪明、数学成就卓著，是十九世纪前仅次于牛顿的英国伟大的数学家兼物理学。他发现了四元数，深化了人们对“数”的认识，直接推动了向量代数、向量分析和物理学的发展。他的四元数是建立超复数理论的开端，超复数是将复数囊括在自身中的更加抽象的数系理论。四元数引起了代数学领域的一场变革，恰恰相当于非欧几何学理论引起了几何学的一次质的飞跃。哈密顿在变分法及微分方程方面的贡献与他在物理上的成就紧密相连。他提出了“哈密顿原理”，使人们终于认识到光学和力学只不过是变分法研究的两个侧面，其影响深远。以致有许多科学家把它看作是数学物理中功效最大的一个原理。他引入和建立的“哈密顿函数”及“哈密顿正则方程”等在现代物理学领域都获得了广泛地应

用。他的著作有140多篇（部），其中主要著作有《四元数讲义》、《光线论》、《动力学一般方法》等。

哈里奥特 （Harriot, Thomas, 1560?—1621.7.2） 英国数学家、天文学家、物理学家。在代数方面，哈里奥特系统地阐述了韦达等人的思想观点，讨论了方程的性质和结构，探讨了根与系数的关系，并最早将方程化为简单因式之乘积问题。由于他不承认负根与虚根，因而无法完整地得出对证明韦达定理十分有用的“因式定理”。哈里奥特在数学符号上也有创造，其中沿用至今的大于“>”，与小于“<”，就是他在1631年引入的。哈里奥特对天文学、物理学也颇有研究。他的主要著作《实用分析技术》，是在他死后十年才出版的。

科恩 （Cohen, Paul Joseph, 1934.4.2— ） 美国数学家。美国科学院院士。他在数学基础方面作出了突出贡献。因证明了连续统假设和选择公理的独立性而荣获1966年菲尔兹奖。他在证明中创造了一种新方法——力迫法，在集合论中已得到广泛应用。科恩的工作使连续统假设成为一个既不能证明，又不能推翻的现代逻辑工具。科恩在分析学和连续群方面也获重要研究成果。他的主要著作有《集合论与连续统假设》等。

科尔莫戈罗夫 （Колмогоров, Андрей Накокаевич, 1903.4.25— ） 苏联数学家。苏联及许多国家科学院院士。是二十世纪最有影响的苏联数学家之一。在实变函数论方面获许多重要成果。他同辛钦一起将实变函数论的方法应用于概率论，建立了在测度论基础上的概率论公理体系，解决了概率论中一系列难题，奠定了近代概率论的基础。他还在数理逻辑、拓扑学、微分方程、泛函分析、信息论等许多数学领域作出过重要贡献，他的名字联系着这其中许多定理、准则、不等式和方程等。他曾任《苏联大百科全书》第二版数学学科的主编，也是著名的数学教育家，培养了一批优秀的苏联数学家。1980年荣获沃尔夫奖。科尔莫戈罗夫的论著甚丰，多达230余种，其主要著作有《概率论的基本概念》、《函数论与泛函分析初步》等。

科瓦列夫斯卡娅 （Ковалевская, Софъя Василъевна, 1850.1.15—1891） 俄国女数学家、小说家。彼得堡科学院通讯院士。对微分方程理论有重要贡献。他推广了柯西提出的偏微分方程解的存在定理，现称柯西——科瓦列夫斯卡娅定理。他的两篇关于刚体旋转问题的论文，是继欧拉和拉格朗日的经典著作之后仅有的关于刚体力学的著作。他用椭圆函数积分解决问题的方法，开辟了近代力学中应用数学分析的新方向。她的这篇题为《关于刚体绕固定点旋转的问题》曾获巴黎科学院的博尔丁奖。科瓦列夫斯卡娅除发表十几篇重要论文外，还有一些文学作品问世。

施瓦兹 （Schwarz, Hermann Amandus, 1843.1.25—1921.11.30） 德国数学家。普鲁士科学院和巴伐里亚科学院院士。施瓦兹对二十世纪初的数学发展作出了重要贡献。他将几何学融会于分析领域，为综合几何学的发展开辟了道路。他针对黎

曼数学成果中的某些缺陷，作了一些富有成果的“拯救”工作。在对最小曲面的研究中，他给出了泊松积分的严格理论。为解决任意外形的狄利克雷问题，他提出了著名的“交替方法”。在施瓦兹涉及到的广泛数学领域中，以他的名字命名的有施瓦兹引理、施瓦兹函数、施瓦兹导数、施瓦兹不等式等。

施泰纳　(Steiner, Jokob, 1796.3.18—1863.4.1)　瑞士数学家。近代射影几何学的奠基人，被誉为是阿波罗尔奥斯以后最伟大的几何学家。他的重要著作《几何形的相互依存性的系统发展》，被认为是射影几何学的经典著作。他运用射影概念，从简单的图形构成更复杂的图形。他利用对偶概念，把许多点圆锥曲线的定理对偶化。通过把图形分类和注重对偶命题，施泰纳系统地发展了射影几何。射影几何学的许多概念和定理是以施泰纳的名字命名，如施泰纳曲面，施泰纳定理、彭赛列——施泰纳定理等。他的著作收为全集（二卷）发表。

施密特　(Schmidt, Erhard, 1876.1.13—1959.12.6)　德国数学家。曾任德国科学院数学所所长。施密特是现代泛函分析理论的创始人之一。其主要贡献是建立积分方程和希尔伯特空间理论，化简和扩展了希尔伯特积分方程中的许多结果。施密特也是最早将一般欧氏空间概念推广到更复杂抽象的理想结构几何的数学家。除重要论文《线性非线性积分方程理论》外，施密特还有微分方程和函数论方面的专著。

施陶特　(Staudt, Karl Georg Christian von, 1798.1.24—1867.6.17)　德国数学家。在射影几何学方面作出重要贡献。他完全摆脱了代数和度量的关系，以一种全新的方式建立起纯粹的几何理论，被誉为近世几何学的创始人之一。他还首次完善了虚点、虚线、虚平面的理论，并用尺规作出了圆内接十七边形。他的主要著作有《位置几何学》、《位置几何学论文》等。

施瓦尔茨　(Schwartz Laurent, 1915.9.15—　　)　法国数学家。广义函数论的创始人。1945年施瓦尔茨建立了广义函数的完整理论，这一理论现已成为泛函分析的重要分支，是研究现代数学特别是分析数学的有力工具。施瓦尔茨还从事偏微分方程、概率论等方面的研究，取得一系列成果。由于施瓦尔茨对现代分析方面的贡献而荣获1950年菲尔兹奖。他的主要著作有《分布论》、《广义函数论》、《物理科学中的数学》等。

施蒂菲尔　(Stifel Michael, 约1487—1567.4.19)　德国数学家、神学家。被认为是十六世纪德国最重要的代数学家。他的研究领域主要涉及算术、代数和数的神秘性。他研究了二项式系数，多项式除法以及无理数的运算，引进了“指数”这一术语，并认识到了指数与对数之间的联系。他还首次提出了解方程的一般方法。施蒂菲尔的研究工作直接影响了代数符号体系的发展。他的主要数学著作有五部，其中最主要的是《整数算术》。

施尼雷尔曼　(Шнирельман, Лев

Генрихович, 1905.1.15—1978.9.24) 苏联数学家。苏联科学院通讯院士。在对哥德巴赫问题的研究中取得了重要进展，还证明了广义华林定理，上述工作导致了数论的一个新分支——数字叙列的度量理论。他的论文《赋范代数域中的函数》，建立了这一领域中函数的理论。在数学的其它领域，施尼雷尔曼也有不少贡献。如他同人合作解决了1908年庞加莱提出的关于闭合大地测量线的问题；为了确定变分问题的解数，他引入了闭集范畴的重要概念等。

施坦因豪斯 (Steinhaus, Hugo, 1887.1.14—1972.2.25) 波兰数学家。波兰科学院院士。以他和巴拿赫为主形成了当时重要的泛函分析研究中心。他俩创立的泛函分析中的共鸣定理（也称巴拿赫——施坦因豪斯定理）等，以其深刻和概括著称于世。施坦因豪斯在级数论、概率论、拓扑学等方面也进行过研究，与他人合著有《正交级数论》一书。他还编写了大量通俗数学读物，被翻译成多国文字，广为传播，如《数学是什么》、《数学万花镜》、《数学100题》、《数学的严密性》等。

姜立夫 (1890.7.4—1978.2.3) 中国数学家、数学教育家。姜立夫是中国现代数学教育的先驱，对新旧数学会和数学研究所的筹建均起了重要的促进作用。他独自一人办起了南开大学数学系，培养了包括江泽涵、陈省身、吴大任在内的一批杰出数学家。他不遗余力地收集整理了大批数学书籍，使南开大学的数学书籍、文献相当丰富。姜立夫主要研究几何学，著有《圆和球的方阵理论》等论文，翻译过黎曼几何学方面的著作。他还主持数学名词审查委员会的工作，出版了《算学名词汇编》和《数学名词》。

洛必达 (L′Hospital, 1661—1704.2.2) 法国数学家。欧洲早期微积分领域的先驱。他在同著名数学家雅冬·伯努利、莱布尼兹以及牛顿的长期通信联系中萌发了许多科学理论的新思想，导致了微积分学的创立与发展。他的著作《阐明曲线的无穷小分析》，是世界上第一本系统的微积分教科书。该书还给出一个求一个分数当分子和分母都趋于零时的极限法则，后称洛必达法则，一直沿用至今。他的主要著作还有《圆锥曲线分析论》。但此书是在他去世后，根据他遗留的大量手稿整理出版的。

祖暅 (5—6世纪) 中国南北朝时期数学家。著名数学家祖冲之的儿子。他修补编辑了祖冲之的“缀术”，采用巧妙的方法，即“幂势既同，则积不容异”的原理，推导出球体积公式。这一原理在西方通常称“卡瓦列里原理”，但它的出现要比祖暅晚1100年。祖暅还几次上书，实现了父亲的遗愿，推行了《大名历》。

祖冲之 (429—500) 中国南北朝时期南朝数学家、天文学家。祖冲之最大的成就在数学方面。他计算出圆周率π在3.1415926和3.1415927之间（准确度达小数点后六位），并提出圆周约率为$\frac{22}{7}$，密率为$\frac{355}{113}$。其中密率值要比欧洲早一千多年，直年十六世纪才由德国的奥托得到，因而密率

也称“祖率”。祖冲之还同儿子祖暅首次求得球体积的正确公式。他的数学著作有《缀术》、《九章算术注》等，可惜均已失传。祖冲之在天文历法、机械制造等方面也有很深的造诣和众多发明。他制定的《大明历》，在中国历法上第一次考虑岁差影响，在391年间设置144个闰月，开辟了历法史的新纪元。

费马　(Fermat Pierre de, 1601.8.17—1665.1.12)　法国数学家。热爱古典文学、数学是他的业余爱好，被誉为“业余数学家之王”。根据他对解析几何、数论、概率论等数学领域的重要贡献，被认为是十七世纪上半叶杰出的数学家之一。他独立于笛卡尔创立了解析几何学，他也是微分学、概率论的创始人之一。在对数论的研究中，他得出了若干结果，其中最著名的是费马大定理，亦称费马大猜想。当$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$没有整数解。许多数学家为此化费了大量时间，甚至毕生精力，但至今仍未获得证明。费马的主要著作是据他的笔记、批注、通信，由其儿子整理编成的《数学论集》。

费弗曼　(Fefferman, Charles, 1949.4.18—　　)　美国数学家。1971年21岁时被聘为芝加哥大学教授，成为美国大学三百年历史中最年轻的正教授。费弗曼主要研究古典分析。他对三角级数收敛问题的研究成果推动了整个领域的大发展。费弗曼在复变函数、偏微分方程以及多复变函数论等多方面都做出了重要贡献。他曾获多种数学奖金，1978年获菲尔兹奖。

费希尔　(Fisher, Ronald Aylmer; 1890.2.17—1962.7.29)　英国数学家、生物学家。英国皇家学会会员。现代数理统计学的奠基人。他发展了实验设计，研究如何测量数据中的信息，缩减数据而不损失信息，以及估计模型中的参数等问题。理论上虽未臻完备，但实用价值及影响很大。在他的主要著作《理论统计的数学基础》中，他对统计中的多元分析、相关系数、样本分布及其在生物遗传方面的应用进行了论述。

费拉里　(Ferrari, Ludovico, 1522.2.2—1565.10.5)　意大利数学家。他得到了三次方程的某些解法，给出了四次方程$x^4+ax^2+b=cx(a>0, b>0, c>0)$的降阶解法，现称为“费拉里解法”。他的成果被收入他的老师卡尔达诺的著作《大术》中。该书还公布了另一数学家塔尔塔利亚有关三次方程的一些结果。由于违背原订的守密誓约而引起冲突，诱发了数学史上有名的一场论战和数学竞赛。

费尔巴哈　(Feuerbach, Karl Wilhelm, 1800.5.30—1834.3.12)　德国数学家。初等数学中著名的“九点圆定理”（亦称费尔巴哈定理）就是他发现的。九点圆定理是：三角形的三条边的中点、三条高的垂足和各顶点与垂心连线的三个中点所在的同一个圆（此称九点圆，亦称费尔巴哈圆）与该三角形的内切圆及三个旁切圆都相切。费尔巴哈的这一发现是在他的《直线三角形某些特殊点的性质》一文中给出的。

泰特　(Tait, Peter Guthrie,

1831.4.28—1901.7.4） 英国数学家、物理学家。对四元数的基本理论作了重要贡献，促进了四元数的发展。四元数是一种高等代数，它导致了向量分析的产生，对现代数学物理的发展起了作用。泰特的主要数学著作有《四元数浅论》、《四元数导论》。他在热力学方面也作过许多工作，著有《热力学史概要》等物理学著作。泰特还写出了一系列关于气体动力学的论文，参加了学术界几次大的论争。

泰勒 （Taylor, Brook, 1685.8.18—1731.12.29） 英国数学家。英国皇家学会会员，曾任皇家学会秘书。因对发展微积分有贡献而著名。他的《直接与间接的增量方法》一书，开创了一个新的数学分支，现称有限差分演算。他提出的泰勒公式，被认为是微分学的基本原理。他撰写的《直线投视》、《直线投视新原理》，论述了透视的基本原理，包含了对"投影点"原理最早的一般论述，是权威的透视法著作。

泰勒斯 （Thales, of Miletus, 约公元前625—约公元前547） 希腊数学家、哲学家。希腊几何学的先驱。他最早在数学中引入逻辑证明，开始了命题的证明，以后几何学就沿他的方向发展，最后由欧几里得加以系统化。泰勒斯所叙述的命题有：两线相交对顶角相等；等腰三角形底角相等；两个等角三角形对应边成比例；圆被任一直径所平分；对半圆的圆周角是直角等等。泰勒斯还是公认的希腊哲学的鼻祖，他第一个提出整个宇宙是自然的，否认神是世界的创造者。

泰特托斯 （Theaetetus, 约公元前414—约公元前369） 希腊数学家。虽未有著作流传下来，但许多材料表明，他对希腊数学的发展有较大影响。他为无理数的详细分类奠定了基础，规定并命名了一些新的数学概念。他可能是第一次给出正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体的理论作图的人，并阐述了怎样将其内接于一个球体。他还可能发展了一般比例理论，并应用于不可公度量和可公度量。

秦九韶（约1202—1261） 中国南宋数学家。著《数书九章》，这是一部划时代的数学巨著。其中的"大衍求一术"和高次方程的解法，在世界数学史上均占有重要地位。自《孙子算经》给出"物不知数"题以后，直到秦九韶才得以理论上的证明，并把这类解法定名为"大衍求一术"。西方解决此类问题用同余式，是1801年高斯建立的，但比秦九韶晚554年。秦九韶利用开方法还很好地解决了任意次方程的有理或无理根的求解问题，实质上和"霍纳法"相同，但后者较秦九韶也要晚572年左右。秦九韶给出的三斜求积公式：

$$s=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

容易证出它同海伦公式

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 是等价的。鉴于秦九韶在数学上的重大贡献，近几年国内外已形成了一股研究秦九韶的热潮。

秦元勋 （1923— ）中国数学家。

在常微分方程定性理论方面，他研究了希尔伯特第16个问题中的极限环问题，取得了居国际领先地位的研究成果。他开辟了微分方程近似解析解的理论这一新分支，还在中国开辟了计算物理这一新分支。在计算机方面，秦元勋写出了《X装置分析》一书，这项理论经国家试验检验符合实际，其结果为世界公认。对于犁面设计问题以及旋涡星云的稳定性问题，对爱因斯坦的相对论，秦元勋也作出过富有成效的研究工作。

热尔岗　(Gergonne, Joseph-Diea, 1771.6.19—1859.5.4)　法国数学家。近代射影几何与代数几何的创始人之一。1810年他创办了数学杂志《纯粹与应用数学年刊》（也称热尔岗年刊），并任该刊主编达二十年之久。他先后在该刊发表了有关射影几何、代数几何等多领域的论著二百余篇，创造性地提出并解决了一系列有价值的数学问题。他还首创用解析法证明几何定理，为几何学开辟了新的发展方向。

热尔曼　(Germain, Sophie, 1776.4.1—1831.6.27)　法国女数学家。她对费马大定理有过专门研究，证明了当p是100以下的素数，且与xyz互素时$x^p y^p = z^p$无正整数解。她给出了有关弹性表面的数学表达式，赢得了法国科学院悬赏征答的奖金，她还进一步发展了她已获得的结果。其主要著作有《自然研究备注》。她的哲学著作对当时的数学家和物理学家也有一定的影响。

埃尔米特　(Hermite, Charles, 1822.12.24—1901.1.14)　法国数学家。巴黎科学院院士，彼得堡科学院名誉院士。他对函数论的研究成果突出，是发展了代数型理论、二次型的算术理论、以及阿贝尔函数的一个主要人物。他借助于椭圆函数首次求解五次方程。他第一个证明了数e的超越性，即e不是任何具有有理系数的代数方程的根。他研究正交多项式中的一类，被命名为埃尔米特多项式。在有关数论、高等代数、数学分析中还有不少概念和定理是以埃尔米特命名的。

莱维　(Lévy, Paul Pierre, 1886.9.15—1971.12.15)　德国数学家。巴黎科学院院士。在对概率论的研究中，他奠定了一般极限理论和随机过程论的基础。在对泛函分析的研究中莱维也作出了贡献，其中“泛函分析”这个名称就是由他引进的。莱维的主要著作有《随机过程和布朗运动》、《随机变量的加法理论》、《概率计算》、《泛函分析教程》等。

莱布尼茨　(Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646.7.1—1716.11.14)　德国自然科学家、数学家、哲学家。西方文明最伟大的人物之一。年轻时就写出了《组合之艺术》一文，其中表述了成为某些现代计算机的理论先驱的模型：一切推理，一切发现，不管是否用语言表述，都能归结为诸如数、字、声、色这些元素的有序组合。他还改进了帕斯卡早年的计算机，制作了一台能够进行加、减、乘、除四则运算的计算机。莱布尼兹在数学上最重要的贡献在于他同牛顿彼此独立地创立了微积分学。

1684年他发表了论文《一种求极大极小和切线的新方法，它也适应于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。这是世界上最早的微分学文献。他的第一篇关于积分学的论文发表于1686年。他计算积分实际上是求原函数。他还给出了一些特殊的积分法：变量替换法，分部积分法、以及利用部分分式求有理式的积分方法等。莱布尼兹所创立的微积分符号一直沿用至今，他的微积分学在欧洲大陆得到迅速传播和发展。在数学的其他领域，如组合分析理论、代数行列式理论、曲线族的包络理论等莱布尼兹都有建树。另外，莱布尼兹还是一位唯心主义哲学家，作家和爱国主义者。他的哲学著作《单子论》，综述了他的哲学观点，其中也有辩证法的因素。

莫尔斯 (Morse, Harold Marston, 1892. 3. 24—1977. 6. 22) 美国数学家。莫尔斯的重要贡献在于他把拓扑学方法应用于变分学、常微分方程理论和复变函数论等数学分支。他把由庞加莱和伯克霍夫所创立的理论发展成为现代的形式，创建了大范围变分学理论，为微分几何与微分拓扑提供了有效工具。莫尔斯的主要著作有《大范围变分法》、《全局分析和微分拓扑中的临界点理论》，以及与凯恩斯合著的《复变函数论中的拓扑方法》等。

莫佩蒂 (Maupertuis, Pierre Louis Moreau de, 1698. 9. 28—1759. 7. 27) 法国数学家、物理学家、生物学家。法国科学院院士，曾任柏林科学院院长。在数学方面，他不断修正和扩展了著名的最小作用原理，不仅对数学学科的发展起了推动作用，对物理学和哲学也产生了深远影响。另外，莫佩蒂还探讨了有关图形和曲线中极大极小问题，求积问题以及一般曲线的性质等问题，并有这方面的一些专著。莫佩蒂在物理学和生物学方面也有不少成果，其中包括他进行过实地测量，证实了地球扁平学说等。

莫德尔 (Mordell, Louis Joel, 1888. 1. 28—1972. 3. 12) 英国数学家。学术活动十分活跃，曾在近百所大学和各种国际会议讲学和主持讲座。他对不定方程的有理解有独特研究，曾提出有名的莫德尔猜想。1983年他的猜想被德国青年数学家法尔廷斯证明，从而将费马大定理的研究大大推进一步。莫德尔荣获了1986年菲尔兹奖。其著作有《丢番图方程》等。

格林 (Green George, 1793. 7. 14—1841. 3. 31) 英国数学家、物理学家。格林自学成才，是英国近代数学物理的先驱。为研究数学分析在电磁理论中的应用，他引入位势概念，给出了数学分析中著名的"格林公式"和"格林函数"，对n维位势方程理论的发展起了奠基作用。在数学物理方面，他还发展了能量守恒定律，将其运用于变形弹性体，得出了弹性理论的基本方程。格林关于结晶体中光反射与折射的研究也具有特别重要的意义。

格尔丰德 (Гелъфонд, Аяександр Осиповин, 1906. 10. 24—1968. 11. 7) 苏联数学家。苏联科学院通讯

院士。他成功地解决了希尔伯特第7个问题，并由此得到"代数数的对数的超越性"定理，进而又得到了"所有不等于10^k（k为整数）的自然数的常用对数都是超越数"的结果。在对数论的研究中，除在数论的随机方法中发现著名的格尔丰德方法外，最大贡献是他建立了数论中的一个新分支——超越数论。其主要著作有《超越数和代数数》、《有限差分法》、《方程式的整数解》等。

格拉斯曼　(Grassmann, Hermann Günther, 1809.4.15—1877.9.26)　德国数学家。他把通常的解析几何坐标推广到n维，首次提出关于多维欧氏空间理论的系统学说，在现代物理中有重要的应用价值。格拉斯曼还致力于推广复数，同哈密顿分别建立起超复数理论。他富有独立性的工作揭示了数学的新的前景，不仅为以后建立向量代数创造了条件，并有助于创立张量理论。数学中有许多概念，如环、锥体、代数簇等，以格拉斯曼命名。格拉斯曼在电学、声学、植物学和语言学等领域也有贡献。其主要著作有《线性扩张理论》、《算术教本》等。

格罗斯曼　(Grossmann, Marcel, 1878.4.9—1936.9.7)　匈牙利——瑞士数学家。他把万有引力定律表示为绝对微分几何的形式，并把绝对微分学介绍给挚友爱因斯坦，使广大相对论得到了完美的表述。为纪念格罗斯曼的上述功绩，从1975年起开始举行纪念格罗斯曼的国际会议。

格涅坚科　(Гнеденко Борис Владамиович 1912.1.1—　)　苏联数学家。乌克兰科学院院士。主要从事概率论、数理统计和数学史的研究工作。他在概率论和数理统计方面所获得的研究成果，在理论上和实用上都具有重要价值。格涅坚科还是一个出色的教育家和科普作家。除参加苏联《中学数学》杂志的编辑工作外，还有大量论著问世。其中有不少被译成中文出版，如《概率论教程》、《概率论初阶》（与辛钦合作）、《相互独立随机变数之和的极限分布》等。

格雷戈里　(Gregory, James, 1638.11—1675.10)　英国数学家、天文学家、光学家。英国皇家学会会员。英国十七世纪最有影响的数学家，主要从事分析理论的研究。他用无穷级数求圆及双曲线所围面积，给出函数的新定义；得到了计算曲线长度的具体方法；证明了切线与面积的互逆性；提出了著名的格雷戈里——牛顿插值公式，以及函数$\mathrm{tg}x$和$\sec x$的无穷级数展开式。他也是最早使用级数收敛和发散等概念的数学家，并专门研究级数的收敛速度问题。另外，他对超越数π、e以及代数方程数值计算、根与系数关系等也有研究。其主要著作有《论圆和双曲线的实际求积》、《几何的通用部分》等。

格罗唐迪克　(Grothendieck, Alexandre, 1928.3.28—　)　法国数学家。在泛函分析、代数几何学方面有重要贡献。他深刻、系统地研究了拓扑向量空间理论，引进了"核空间"、"张量积"概念；他建立起代数几何学一整套抽象的庞大体系，解决了许多猜想和难题，扩张和更新了

现代抽象代数几何学。以他的名字命名了许多代数几何学中的概念。格罗唐迪克上述创造性的工作，使他荣获1966年菲尔兹奖。他的主要著作有《代数几何基础》和《抽象代数簇的上同调理论》等。

哥尔丹 (Gordan, Paul Albert, 1837.4.27—1912.12.21) 德国数学家。对数学的若干分支均有贡献。他同数学家克莱布什合作，着力于阿贝尔函数理论的研究，开辟了代数几何研究的一个新方向。他们的一系列研究成果，包括克莱布什—哥尔丹定理等，将不变量理论提高到一个新的发展阶段。后经他的学生E·诺特的进一步发展，不变量理论已成为现代代数领域的重要分支。哥尔丹对常数e、π超越性的证明也远比前人简便。其主要著作有《阿贝尔函数论》（与克莱布什合著）。

哥德尔 (Gödel, Kurt, 1906.4.28—1978.1.4) 奥地利——美国数学家、逻辑学家。在数学上他的突出贡献，是证明了在任何一个严格的数学系统中，必定有用本系统内的公理不能证明其成立或不成立的命题，因此不能说算术的基本公理不会出现矛盾。这个证明结束了近一个世纪来形式主义流派为建立能为全部数学提供严密基础公理的企图，成了二十世纪数学的标志，至今仍有影响和争论。1951年哥德尔获爱因斯坦勋章。数学家冯·诺依曼说过："哥德尔在现代逻辑中的成就是非凡的不朽的——它的不朽甚至超过了纪念碑，它是一个里程碑，是永存的纪念碑。"哥德尔一生论著不多，其重要的一篇论文题为《〈数学原理〉（指怀特海和罗素所著的书）及有关系统中的形式不可判定命题》。

哥德巴赫 (Goldbach, Christian, 1690.3.18—1764.11.20) 德国—俄国数学家。因提出"哥德巴赫猜想"而知名。1742年他在给欧拉的信中提出一个猜想：任何一个大于2的偶数都是两个素数之和。此猜想举例容易验证，但给出一般证明异常困难，至今仍未彻底解决。二百多年来，围绕着上述猜想，许多科学家做了很多努力，创立了一些新的数学方法，取得了一系列成就，促进了数学的发展。其中我国数学家陈景润走在了解决此问题的世界先列。

贾宪 (11世纪) 中国北宋时期数学家。贾宪给出了世界上最古老的二项式定理系数表。即下图：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

欧洲人将此表称为"帕斯卡三角形"。而帕斯卡比贾宪要晚600年。贾宪在任意高次方程数值解法方面也作出了卓越贡献，他给出了"贾宪立成释锁平方法"、"增乘开平方法"、"贾宪立成释锁立方法"、"增乘开立方法"等多种方法。其中的增乘开方法，其演算程序大致同现在流行的所谓鲁菲尼——霍纳方法基本相同。而后者的霍纳比贾宪要晚770年左右。贾宪的主要著作有《九章细要》、《算法斅古集》，可惜均已失传。

夏侯阳　（六世纪）　中国数学家。曾著三卷《夏侯阳算经》。但现存本已非原书，可能是唐代韩延增修本。这是一部实用算术书，在十部算经中内容最为简要。其中的“明乘除法”中记载：“十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等”；还记载：“十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除退四等。”可分别解释为$10=10^1$，$100=10^2$，$1000=10^3$，$10000=10^4$；$\frac{1}{10}=10^{-1}$，$\frac{1}{100}=10^{-2}$，$\frac{1}{1000}=10^{-3}$，$\frac{1}{10000}=10^{-4}$。实际上已有指数和负指数的概念。

夏斯莱　（Chasles,Michel，1793.11.15—1880.12.18）　法国数学家。他与瑞士数学家施泰纳独立地研究出现代射影几何学理论，是该理论的创始人之一。他的《计算论文集》一书，发表了基于他的“特征线法”和“对应原理”而得到的对大量问题的解法。其“特征线法”中已包含了枚举几何学的基础。夏斯莱还致力于数学史的研究，其著作《几何方法的起源和发展史概要》，至今仍是权威的数学史参考书；另一本《关于几何进展中的报告》则继续了数学史的研究。

夏鸾翔　（1823—1864）　中国数学家。是我国近代数学史上较为优秀的数学家之一。二次曲线系统传到我国以后，他首先进行了全面研究，同时还研究了超越曲线和双曲函数，且有新的发现。在对各种曲线求积问题的研究中取得一些成就，他把项名达、戴煦的椭圆求周术和李善兰的尖锥术加以广泛应用，得到了不少有价值的成果。比如他用幂级数展开解决求椭圆一段弧长问题，以及求椭圆上一段弧绕长轴或短轴所成的旋转曲面的面积问题等。夏鸾翔还用招差法造了正弦表和正矢表。其主要著作有《洞方求图解》二卷，《万象一原》九卷，《少广缒凿》一卷，《致曲术》一卷和《叹曲图解》一卷等。

夏道行　（1930—　）　中国数学家。中国科学院学部委员。在函数论、泛函分析及数学物理方面有重要贡献。他在泛函分析方面的成果，被国外数学家多次引用。在函数论方面，有一类解析函数以他的名字命名；他建立的“拟似共形映照的参数表示法”，近20年一直被国外函数论家所称道。在现代数学物理方面，他的一些研究成果要比北美、欧洲许多物理学家的研究成果深入。

顾观光　（1799—1862）　中国数学家。继承世业为医生，但兼通古今中西天文算学。他纠正了传刻本《周髀算经》中多处错误，写成《周髀算经校勘记》一书。又撰写《读周髀算经书后》的论文，发挥其对盖天说的意见，有助于对中国古代天文学史的研究。他著书十二种，其中《九数外录》、《算剩初编》、《算剩续编》、《算剩余稿》为四种算书。其中《算剩续编》中载有顾观光关于造对数表法以及对圆面积的研究。

钱宝琮　（1892.5.29—1974.1.5）　中国数学史家、数学教育家。中国数学史学科的奠基人。从1921年起开始发表中国数学史论文，先后出

版了《古算考源》、《中国算学史》上册、《中国数学史话》、《算经十书》（校点）等论著，并主持编写了《中国数学史》、《宋元数学史论文集》等专著。他还是《科学史集刊》的主编。钱宝琮的主要著作在其逝世后被整理成《钱宝琮科学史论文选集》。钱宝琮长期从事数学教育工作，他治学严谨，认真培养青年一代，造就了一批数学家和数学史家。

侯振挺 （1936— ） 中国数学家。致力于概率论的研究。1961年他发表的论文《排队中巴尔姆断言的证明》，解决了许多名家未能解决的“巴尔姆断言”这一难题。在对概率论“马尔可夫过程”的研究中，他提出了有极大应用价值的“Q过程唯一性准则”的一个“最小非负解法”，使国际上四十年未能解决的这一难题得以彻底解决，因而获国际概率论卓有成就奖——戴维逊奖。侯振挺对运筹学在铁路上的应用也有重要的研究成果。

殷长生 （1914— ） 中国珠算专家。长期从事珠算算理、算法和算史的研究。曾创制适合产业工人班组经济核算使用的“新式算盘”，后又提出并试制成功电子算盘。在国内外他也发表许多珠算论文。其中他写成的《新珠算法》，是我国第一部国际珠算书籍。

徐有壬 （1800—1860） 中国清末数学家。曾任江苏巡抚等官职，著《务民义斋算学》七种。其中《测圆密率》三卷、《造表简法》一卷、《截球解义》一卷、《弧三角拾遗》一卷四种为数学著作，余三种为天文学著作。《截球解义》一卷，阐明了球面积与同径同高的圆柱面积相等的道理。《测圆密率》和《造表简法》主要研究三角函数及反三角函数的幂级数展开问题。这些书既集合了当代诸家已有的成果，还有不少徐有壬自己的创见。

徐光启 （1562.4.24—1633.11.8） 中国明末科学家。他与利玛窦合译欧几里得《几何原本》前六卷和《测量法义》等书。其中《几何原本》一书，首次把欧几里得几何学及其严密逻辑体系和推理方法引入中国，同时，确定了许多诸如点、线、面等几何名词。徐光启积极引进西方科学知识，他一方面试图用《几何原本》严谨的逻辑推理去解决我国古代的数学问题，另一方面又很注意数学在实践中的应用。虽然他在数学上少有创造性的成果，但他的工作对我国数学的发展也起了不小的作用。徐光启还受命修改历法，编辑了百卷以上的《崇祯历书》，编著了《农政全书》60卷，内容已涉及到广泛的科学领域。徐光启还翻译编写了《简平仪说》，《筹算》，《几何要法》等，自己撰写了《测量异同》，《勾股义》等书。

爱尔特希 （Erdös, Paul, 1913—） 匈牙利数学家。主要贡献在数论和概率论方面，在数论上的成就尤为突出。他研究了整数分拆问题，并用初等函数论方法估计了n的分拆数$P_{(n)}$的值；他还证明了存在无穷多个自然数n，使得$P_{n+1}-P_n<C\log P_n$，其中P_n为第n个素数，C为欧拉常数。爱尔特希的著作甚丰，多

达300余种，其主要著作有《数论的一些新进展和当前的问题》、《组合分析中的概率方法》等。1983年他同陈省身同获沃尔夫奖。

高斯　(Gauss, Carl Friedrich, 1777.4.30—1855.2.23)　德国数学家。在数学上的贡献可与阿基米德、牛顿并列。高斯很小就显示了超人的数学才能，10岁时能以简便算法得出1到100这100个数的和为5050；11岁时发现了二项式定理。他第一个用尺规作出正十七边形，基本上解决了两千年悬而未决的几何难题。他使用了复数，并借助于复数在x、y平面上的表示，建立了严密的复数理论。他证明了代数基本定理（即每个复系数代数方程必有复根），而在他之前的证明都是不完全的。他系统而广泛地阐述了数论里有影响的概念和方法，发现并证明了二次互反律。高斯关于数论的研究成果都集中在他的《算术探究》一书中。此书奠定了近代数论的基础，是历史上具有代表性的数学巨著之一。他出版的《曲面的一般研究》，将微分几何大大推进一步，他的曲面论是近代微分几何的开端。他对非欧几何的研究，虽没有著作问世，实际上他也是非欧几何的创始人之一。在物理学和天文学方面，高斯也有突出贡献，其成果大都发表于《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》、《对高等大地测量学对象的研究》等著作中。

高木贞治　(Takagi, Teiji, 1875.4.21—1960.2.28)　日本数学家。帝国学士院会员，曾任国际数学家大会副主席和第一届菲尔兹奖评委会成员。高木贞治在代数数论方面作出了重要贡献。他彻底解决了称为“克罗内克青春之梦”的著名猜想。他把类域的定义作了推广，创立了类域论，据此研究结果写成的论文，也是日本数学家近代第一次获得具有世界水平的成果，因而他被认为是日本近代数学的开拓者。高木贞治还是一位杰出的数学教育家，他编写了不少教科书，其中有较大影响的是《解析概论》、《代数学讲义》等。

郭守敬　(1231—1316)　中国元代数学家、天文学家、水利学家。1276年与王恂等修新历法，经4年测算编成中国古代最精良的历法《授时历》，通行了360余年。他还设计了多种观测天文仪器，主持了大量的测量工作，取得一系列精确度较高的数据。郭守敬在数学上的贡献，是在计算日、月、五星位置时创用了三次差内插法，并由此导出内插公式。他的工作发展了宋元时代的数学方法。在黄赤道差和黄赤道内外度的计算中，他还创用了弧矢割圆术，既将解法列成公式，又给出详细证明，这在球面三角中也是首创。

海伦　(Heron of Alexandria, 约62)　希腊数学家、测量学家、机械发明家。海伦是一个优秀的应用数学家，他的《度量论》一书，给出了大量的数值运算，涉及到无理数和分数。还从理论上证明了许多公式，如著名的以海伦命名的三角形面积公式$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（其中$\triangle$为三角形的面积，$a$、$b$、$c$为三角形三边的长，$s$为三角形的半个周长）等。海伦发明了许多机械，其中著名

的有所谓气转球，被称为人类历史上第一台蒸汽机兼喷气机。他在《测量仪器》一书中还描写过一种测量仪器，类似现在的经纬仪。

海涅 （Heine Heinrich Eduard，1821.3.16—1881.10.21） 德国数学家。普鲁士科学院通讯院士，格丁根科学协会会员。1877年获高斯奖章。海涅在数学分析及应用数学方面有较大贡献。他证明了连续函数的一致收敛定理，得到了海涅——波莱尔复盖定理。他还给出了无理数的算术定义。海涅对球面函数、拉梅函数、贝塞尔函数及其有关课题都进行过研究。著有《球函数指南》等。

诺特 （Noether，Amalie Emmy，1882.3.23—1935.4.14）德国女数学家。抽象代数的创始人之一，被誉为“抽象代数之母”。由于她确切地表述了一些抽象的概念，将有关结果，特别是关于不变量理论纳入代数的范畴，从而统一了许多重要的数学思想及成果，远远扩大了抽象代数的影响。进而，她又用全新的观点和纯概念方法建立起非交换代数理论，使该理论也有了长足发展。她以忘我的精神从事科学研究，影响、吸引了一批年青数学家从事抽象代数的研究。她主要的论文及著作有《环中的理想论》、《超复数系及其表述》、《非交换代数》等。

诺维科夫 С.П（Новиков，Сергей Петрович，1938.3.20— ） 苏联科学家。苏联科学院院士。在微分拓扑学方面有重要贡献。他利用同伦论和配边理论相互解决问题，推进了同伦论的发展，也使配边理论成为现代拓扑学的重要方向之一。他证明了微分流形有理庞特里亚金示性类的拓扑不变性。在对与物理相关的数学问题的研究中也有较大贡献，他把孤立子理论与代数几何学联系在一起，引起了数学界与物理界的普遍重视。由于在代数拓扑学方面有突出成就，诺维科夫荣获1970年菲尔兹奖，也是获该奖荣誉的第一个苏联人。

桑代克 （Thorndike，Edward Lee，1874.8.31—1949.8.9） 美国数学家、心理学家、教育家。他创立了教育的新的心理体系，著有《算术心理学》、《代数心理学》、《数学原理》等数学心理著作。

基弗 （Kiefer Jack Carl 1924.1.25—1981.8.10） 美国数理统计学家。美国国家科学院院士，曾任美国数理统计研究会会长。基弗是最优化设计的开创者，在数理统计方面作出了突出贡献。他一直倡导统计决策论，并用其解决了一系列实际问题；他提出的最优化准则及随机化设计等，在数理统计中非常著名；他还提出了许多诸如“优选法”中的0.618法（也称斐波那契导优法）等解决实际问题的方法。基弗热衷于中美学术交流，1980年亲自来中国讲学，他的一些解决实际问题的方法在中国得到广泛应用，有很大影响。

基谢廖夫 （Киселёв Андрей Петрович，1852.12.12—1940.11.8） 俄国、苏联数学教育家。长期从事初等数学的教学和研究工作，编著了《中学算术系统教程》、《初等代数》、《初等几何》等一系列初等数学教程。在苏联这些书被列入中学

标准课本，广泛使用。1950年中国解放初期，这些书也被编译作为我国中学的试用教材。

勒尔 （Lull, Ramon, 约1232—1316.3） 英国学者。他提出了发现真理的方法概要，即以逻辑为基础，综合已有理念产生新理念的扑素方法，被认为是现代符号逻辑和计算科学的先声。这种方法对十七世纪莱布尼兹创立泛代数也产生过积极影响。勒尔的主要著作有《发现真理的方法概要》等数百部（篇）。

勒雷 （Leray, Jean, 1906.11.7— ） 法国数学家。巴黎科学院院士，苏联科学院外籍院士。在代数拓扑和泛函分析方面作出了重要贡献。他建立了谱序列的理论，用不动点定理证明了微分方程解的存在性定理，其方法被称为勒雷——绍德尔不动点方法。他研究了微分算子理论，还从数学观点研究了关于粘性不可压缩流体理论，取得不少成果。勒雷曾荣获1979年沃尔夫数学奖。其主要著作有《双曲型微分方程》、《复变量解析流形上的微积分学》等。

勒贝格 （Lebesgue,Henri Léon, 1875.6.28—1941.7.26） 法国数学家。法国科学院院士，英国皇家学会会员。勒贝格将集合的测度和积分相联系，创立了"勒贝格积分"理论。大大推广了黎曼积分，在分析方面开创了新纪元。他把"勒贝格积分"应用到傅立叶级数中，也是傅立叶级数理论和位势论发展的转折点。在拓扑学方面，他引入了紧性定义及紧度量空间的勒贝格数，他的覆盖定理是对拓扑学的一大贡献。勒贝格一生写了大量论文，其主要著作有《积分法和原函数分析的讲义》、《三角级数讲义》等。

勒让德 （Legendre, Adrien-Marie, 1752.9.18—1833.1.9） 法国数学家。巴黎科学院院士，伦敦皇家学会会员。他在数学分析、数论、几何等多个领域都有重要贡献。他同拉格朗日，拉普拉斯并列为法国数学界的"三L"。勒让德最早发现了最小二乘法原理。他的名著《几何原理》详细讨论了平行公理，给出了π是无理数的简单证明，对π^2是无理数第一次作了证明。该书将几何理论算术化、代数化，说理透彻，简明易懂，被欧洲各国用做教科书达一个世纪之久。他的另一部著作《数论》，系统地发表了自己和前人对数论的研究成果，其中包括他对二次互反律的证明及素数个数的经验公式等。以他的名字命名的有在特殊函数理论中著名的"勒让德多项式"，和确定极值函数存在的"勒让德条件"。勒让德的主要著作还有《椭圆函数论》等。

勒威耶 （Le Verrier, Urbain Jean Joseph, 1811.3.11—1877.9.23） 法国天文学家。巴黎科学院院士，伦敦皇家学会会员。他虽然一直从事天体力学和气象学的研究，但也精通数学。1845年，他同英国数学家亚当斯分别用微分方程方法推算出当时尚未发现的海王星位置，1846年被德国天文学家加勒发现并证实。这一成就影响深远，意义巨大，被认为是数学解决实际问题予见未来的典型事例。

黄宗宪 （十九世纪中期） 中国数

学家。他在前人研究的基础上对求一术作进一步研究。“大衍求一术”本是中世纪中国数学家的一项杰出创造，其中所涉及的理论同现代通常所谓的一次同余式理论颇相似。在他的《求一术通解》一书中，黄宗宪不仅改进了秦九韶的方法，使计算程序大大简化，还用同一术解决二元一次不定方程问题。黄宗宪的主要著作还有《容圆七术》三卷，《曲面容方》一卷等。

菲尔兹　(Fields, John Charles, 1863.5.14—1932.8.9)　加拿大数学家、教育家。加拿大皇家学会、英国皇家学会会员，苏联、葡萄牙等许多科学院院士。他不但在代数函数理论中有建树，更突出的是他具有远见卓识的科研组织能力。他第一个在加拿大推进研究生制度；他是1924年多伦多国际数学家大会的领导者；会上他建议用剩余的会议经费设立国际数学奖，并捐赠了自己的大量资金。菲尔兹的建议在1932年苏黎世国际数学家大会上被接受通过。为纪念他的功绩，这项奖被命名为菲尔兹奖。对青年人来讲这也是最高国际奖，每四年在国际数学家代表大会开幕式上颁发一次。

萨蒙　(Salmon, George, 1819.9.25—1904.1.22)　英国数学家。初期从事综合几何研究，后研究代数形式的不变量与共变量理论在曲线、曲面几何中的应用。先后写出几十篇论文和四本重要的教科书《圆锥曲线》、《高阶平面曲线》、《三维解析几何》等，在西欧各国出版，广泛流传，影响较大。萨蒙在数学上的其它贡献还有：三次曲面上的27条直线的发现；限定条件下的曲面性质；代数方程重根的条件等。

萨克斯　(Saks, Stanistaw, 1897.12.30—1942.11)　波兰数学家。主要从事实变函数可微性及“当儒瓦——佩龙积分”的理论研究。其代表作《积分理论》，从可数加性集函数的观点系统地发展了积分与微分理论，影响巨大，是该研究领域的经典著作之一。他参加编写的《解析函数》一书，也有重要的参考价值。

萨凯里　(Saccheri, Girolamo, 1667.9.5—1733.10.25)　意大利数学家。主要从事几何学的研究，是非欧几何的先驱。他讨论了定义的一致性，还试图证明欧几里得的第五公设，在详细研究前人工作的基础上，他给出了第五公设的所谓反证法证明。虽最终未能成功，但萨开里开创了富有启发性的新方法，且由此为非欧几何的产生开辟了道路。萨凯里的主要著作有《几何问题》、《逻辑证明》和《免除所有污点的欧几里得几何》等。

菊池大麓　(Kikuchi Dairoku, 1855.3.17—1917)　日本数学家、地震学家。曾任日本东京帝国大学校长和日本教育部长。明治以后，日本数学虽然转入以西方近代数学为主体的阶段，和算同时结束发展，但菊池大麓促使了日本以希腊传统为基础的欧洲式的数学研究，他积极保存和算文献，阐明其内容，开拓了所谓“和算史”研究的新领域。

梅森　(Mersenne Marin, 1588.9.8—1648.9.1)　法国数学家。

他提出了梅森数，这是推导出可以代表一切素数的公式的开拓性探索。虽然他的推导并不完全正确，却推动了数论的发展。梅森长期为欧洲的哲学家和科学家的通信服务，加强了他们之间的联系和学术交流，为法国乃至整个欧洲的科学发展作出了贡献。梅森写下了大量著作，涉及到物理、音乐、哲学、数学等广泛的科学领域。其主要著作有《普遍的和谐》、《物理——数学探索》、《科学中的真理》等。

梅文鼎　(1633.3.16—1721)　中国清代天文学家、数学家。他研究数学的领域广阔，在算术、几何、代数、三角等方面均有重要贡献。他写成中国第一部笔算数学书《笔算》，使笔算在中国真正生根、开花、结果。他设计了一种证明勾股定理的简单方法。在立体几何方面他的成就特别显著。他研究了四等面体、八等面体、十二等面体、二十等面体的几何性质，并获得计算各体的内切球半径和体积的方法等。他的《平三角举要》和《弧三角举要》是我国最早的平面三角和球面三角著作，书中系统而全面地介绍了三角知识。他的《堑堵测量》和《环中黍尺》，则对球面三角公式作了补证。梅文鼎既重视我国传统数学成就的继承，又重视西方数学成就的移植。在移植中，他坚持独立思考，提倡吸其精华，去其糟粕的正确态度，这是十分可贵的。他一生著述甚丰，大部分数学著作被编入《梅氏历算全书》中。其主要书目如下：《筹算》二卷、《度算释例》二卷、《西镜录订注》一卷、《比例数解》四卷、《筹算要指》、《少广拾遗》一卷、《方程论》六卷、《勾股举隅》一卷、《几何通解》一卷、《方圆幂积》一卷、《几何补编》四卷、《几何摘要》二卷、《勾股阐微》四卷、《正弦简法补》等。

梅珏成　(1681.5.19—1763.11.28)　中国数学家。曾参加编写有关天文、历法、数学书若干部。其中的《数理精蕴》五十三卷，是中国古代的一部初等数学的百科全书。他曾研究了我国的“天元术”与当时西方译进的“借根方”之间的关系，说明两者实质相同，并作《赤水遗珍》附录在《梅氏历算丛书辑要》中作为卷六十一，使我国古代的数学成就重新显露于世。在编书的同时，梅珏成还进行了许多研究，如他重新测定了30多种物质的比重，收入书中作为计算的依据。梅珏成还著有《兼济堂历算书刊缪》一卷，《柳下旧闻》十六卷，增删《算法统宗》十一卷，重编《梅氏丛书辑要》六十三卷等。

曼海姆　(Mannheim, Victor Mayer Amédée, 1831.7.17—1906.12.11)　法国数学家。主要从事几何学的研究，在曲面理论、运动图形理论、射影几何、画法几何、微分几何等方面均有贡献。曾荣获1872年的庞斯列奖。沿用至今的计算尺上装游标，也是他的发明。

笛卡尔　(Descartes, René du perron, 1596.3.31—1650.2.1)　法国数学家、物理学家和哲学家。他在数学上的最大贡献是创立了解析几何学。笛卡尔指出了平面上的点与实数对(x, y)的对应关系；指出对于

一个二元方程$F(x, y)=0$而言，满足这个方程的x、y值无限多，x、y不同数值所确定平面上许多不同的点，便形成了一条曲线。这样，一个代数方程可通过几何直观处理。反之，则可用代数方法研究几何图形。解析几何学的建立，引起了数学的深刻革命，促进了科学技术的发展。对此，恩格斯给予极高的评价："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。"笛卡尔还探究了代数中的某些问题。他给出了笛卡尔正负号法则；第一次用x、y、z表示未知数，a、b、c表示已知数；首先引入了平方根号$\sqrt{\ }$；最早使用了虚数的名称等。笛卡尔一生强调科学的目的在于"造福人群"，使人成为自然界的"主人和统治者"。他反对经院哲学，认为必须抛弃所有因袭的见解，提出"我思故我在"的原则。但在思维与存在的关系问题上他是二元论者。在认识论上他主张唯理论，提出"天赋观念"的唯心主义学说。笛卡尔的思想深深地影响了17世纪。笛卡尔的主要著作有《思想的指导法则》、《论世界》、《方法论》、《哲学原理》等。

康托尔 (Cantor, Georg, 1845.3.3—1918.1.6) 德国数学家。曾任柏林数学会主席，组建德国数学会并兼任第一任会长。康托尔是集合论的创始人，他的工作给数学带来一场革命，是十九世纪数学最伟大的成就之一。他给出了集合，以及集合的并与交的定义，建立起被称为"康托尔公理"的实数连续性公理，构造了实变函数论中著名的"康托尔集"。在他的名著《关于超穷混合理论的论证》中，康托尔又提出了关于无限集、无穷基数、无穷序数的理论。康托尔的集合论，不仅为数学分析奠定了基础，而且对现代数学结构具有十分重大的影响。集合论在本世纪已渗透到各个数学分支，成为分析理论、测度论、拓扑学及数理科学中必不可少的工具。其最重要的著作是《超限数理论基础》。

盖尔范德 (Гелъфанд Израилъ Моиосеевин, 1913.8.26—) 苏联数学家。苏联科学院通讯院士，也是许多国家科学院的外籍院士和荣誉院士。他研究了连续群的无限维表示和非紧群的调和分析，提供了在发展基本粒子对称理论中广泛应用的技术。他创立了赋范环（巴拿赫代数）理论，别开生面。另外，他在研究广义函数对微分方程理论的应用上，在用数学模型研究神经生理系统方面也取得了重要进展。盖尔丰德荣获1978年沃尔夫数学奖。他编著的关于线性代数、广义函数和变分法等方面的著作影响较大，并广为流传。

婆什加罗 (Bhāskaraд, 1114—1185) 印度天文学家、数学家。他总结了早期印度数学家的成就，创造性地写出了《丽罗娃提》、《根的计算》两部反映1000—1500年印度数学最高成就的数学著作。婆什迦罗最早对除以零的意义有所认识，指出$\frac{3}{0}$是无限大量，已接近现代观念。他认识到一元二次方程有两个根，但舍弃负根。他研究一次、二次不定方程的解

法，求出了佩尔方程$y^2=ax^2+1$的多组解。他还得到了π很好的近似值，$\pi=3.14166$，以及$\sin18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$的精确表达式。婆什迦罗对天文学的研究成果以及上述两部数学著作均收集在他的《天文系统极致》一书中。此书在印度影响深远，后世不仅有专门研究此书的学派，且有不少学者对此书作过注释。

婆罗摩笈多　（Brahmagupta, 598—665）　印度数学家、天文学家。他是印度最早使用负数的数学家，并正确给出了负数四则运算法则。他也是当时印度数学家中处理级数问题最杰出的一位，提出了确定等差级数的末项和一个给定级数之和的法则。他还得出了解决比例问题的"三率法"，对一元二次方程求根公式，以及佩尔方程$y^2=ax^2+1$（a为非平方整数）也有一定研究。在几何方面，他得到了一个求四边形面积的类似公式$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$（其中$a$、$b$、$c$、$d$是四条边长，$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$）。但遗憾的是只有当给出的四边形内接于圆时，该公式才是正确的。他撰写的《婆罗摩笈多修正体系》一书，是一部重要的天文学著作。其中有两章《算术讲义》和《不定方程讲义》，反映了他上述的数学成就。

维纳　（Wiener, Nortert, 1894.11.26—1964.3.18）　美国数学家。英、美、德等国数学会会员，曾任美国数学会会长。自小维纳就表现出非凡的才能，11岁上大学，14岁即获学士学位。早期他研究泛函分析，是赋范空间理论的奠基人之一。以后他研究布朗运动成功，这是概率论的开创性工作。维纳的最大贡献在于他创造了控制论。1948年维纳的专著《控制论》出版，它标志着这门对后世影响十分深远的学科的诞生。维纳既阐述了控制论的基本理论，又揭示了控制论的发展趋势，现在控制论队伍几乎和数学一样庞大，其前景无可限量。维纳的控制论已经超出了数学范围，在更大范围内造福于人类。维纳一生发表文章近300篇，写了14本书。他的主要著作有《控制论（或关于在动物和机器中控制和通讯的科学）》、《人有人的用处——控制论和社会》等，其中还有一本长篇小说、两篇短篇小说及两本自传。

维恩　（Venn, John, 1834.8.4—1923.4.4）　英国数学家。英国皇家学会会员。维恩对数学的贡献主要在概率论和逻辑学方面。在概率论方面，他修正了棣莫佛的一个经典概率论定义，并研究了著名的彼得堡诗论（或称彼得堡问题）。在逻辑学方面，他澄清了布尔《思维法则》中一些含混和矛盾的概念，系统解释并发展了几何表示的方法。他作出了一系列简单闭曲线，将平面分成若干间隔，利用这种图表阐明演绎推理的基本原理，现称这种逻辑图为维恩图。维恩的主要著作有《机会逻辑》、《符号逻辑》、《思维法则》等，这些著作在十九世纪末至二十世纪初享有很高的声誉。

维特　（Witt, Jan de, 1625.9.

24—1672.8.20）　荷兰数学家。主要贡献在解析几何方面。他的重要著作《曲线初步》，可以说是最早的解析几何教程。维特在阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》的基础上，引进了坐标的定义（但放弃了负坐标）和坐标变换，系统地发展了直线和圆锥曲线理论。维特曾任荷兰共和党的领袖，并主持过荷兰王国的国务工作，他用于研究数学的时间不多，但成效显著。

维布伦　（Veblen, Oswald, 1880.6.24—1960.8.10）　美国数学家。他为美国数学学派的建立作出了较大贡献，在几何基础、拓扑学及微分几何等方面都有研究成果。在对欧氏几何的研究中，他对欧氏几何进行了不同于希尔伯特的公理化处理，还进一步探讨了分析基础和有限射影几何。他写成的《拓扑学》一书，在一段时间内是该领域仅有的一部影响巨大的系统著作。维布伦同他人合作还著有《射影几何学》、《微分几何基础》等书。

维德曼（Widmann, 1460—约1499）德国数学家。在算术和代数方面有贡献。他首次使用符号“+”和“−”用来表示加法和减法，还列出了一个乘法表。维德曼的上述贡献，集中在他的《商业中的巧妙速算法》一书中。

维尔钦斯基　（Wilczynski, Ernest Julius, 1876.11.13—1932.12.14）德国——美国数学家。曾任美国数学会副主席，美国数学会会刊的副主编。维尔钦斯基是现代射影微分几何的创始人。他发明了一些新方法，使曲线射影微分几何理论更加深刻，并把这些方法推广到曲面问题上去，使他的工作具有射影微分几何的现代形式。他的著作甚丰，其主要著作有《曲线和曲纹曲面的射影微分几何》等，还与斯劳特合著了《威斯西氏大代数》。

维诺格拉多夫　（Виноградов, Иван Матвеевич, 1891.9.14—1983.3.20）　苏联数学家。苏联科学院及许多国家科学院院士。在解析数论方面有突出贡献。他建立了一种最有效的普遍的解析数论方法之一，即三角和方法。根据这种方法，几乎所有的解析数论问题都能用某种形式的简单和来描述。并依此获得了一整类经典数论问题的基本结果。他给出了华林问题的新解法。他还证明了“任何一个充分大的奇数都能表示为三个素数之和”等重要结果，推动了哥德巴赫猜想的解决。维诺格拉多夫在国内曾获一等国家奖金，并多次获得国家勋章和各种荣誉称号。其主要著作有《数论基础》、《解析数论的新方法》、《数论中的三角和方法》、《最简整序变量中的三角和方法》等。

琼斯　（Jones, William, 1675—1749.7.3）　英国数学家。英国皇家学会会员，曾任该会副主席。沿用至今的用π表示圆周率就首创于他。他还第一次系统地阐述了用幂指数定义对数的思想。他的重要著作《新数学引论》论述了流数术、无穷级数和二项式定理。由于他同牛顿有密切联系，因而保存了许多牛顿数学手稿的抄件及书信。

塔尔塔利亚　（Tartaglia, Nicolò,

1499—1557．12．13）　意大利数学家。数学上他的最大贡献是发现了解三次方程的方法。由于塔尔塔利亚将自己的解法告诉了卡尔达诺，而卡尔达诺不守信首先公开了解法，故三次方程求根公式叫做“卡尔达诺公式”。塔尔塔利亚对算术基础、数值计算、根的开方法、分母有理化、组合分析以及数学智力游戏等均有研究。他还翻译整理出版了阿基米德的《几何原本》及其它著作，对这些名著的流传起了重要作用。他将数学知识广泛应用于军事科学和其它技术领域，创立了弹道学。他最著名的著作是《论数字和度量》。

博叙　(Bossut, Charles, 1730．8．11—1814．1．14)　法国数学家、力学家。波伦亚科学院及都灵、圣彼得堡等几个科学院的成员。博叙的主要成就是作了大量数学普及工作，编写了很多颇受欢迎的数学教科书及数学史读物，为欧洲的科学教育事业作出重要贡献。另外，博叙对力学及几何学方面的研究也有一定成就。

博苏克　(Borsuk, karol, 1905．5．8．—1982)　波兰数学家。波兰科学院院士，曾任该院副院长。博苏克是收缩核理论的创始人。收缩核理论是现代拓扑中最重要的分支之一，是介于一般拓扑学与代数拓扑学间的一门边缘学科。博苏克在组合几何等方面也作了一些工作。著作有《收缩核理论》等。

斯图姆　(Sturm, Charles—Francois, 1803．9．23—1855.12.18)　瑞士数学家、物理学家。英国皇家学会会员，柏林、彼得堡、巴黎等科学院院士。在代数方程论、微分方程论、微分几何学方面，斯图姆都有贡献。其中斯图姆定理（也称斯图姆判别法）是对方程论的重要贡献，它对求代数方程在某一给定范围内的根的数目问题提供了一个完全的解法。他的主要著作有《论数字方程》、《分析教程》、《力学教程》等。后两部著作从1861年问世直到二十世纪初一直在广泛应用。

斯特灵　(Stirling, James,1692—1770.12.5)　英国数学家。英国皇家学会会员，柏林科学院院士。在无穷级数和微积分理论方面有重大贡献。他考察了一些级数的性质；阐述了使级数快速收敛以加快计算的求和方法；研究了级数的插值，得到了一系列重要结果。斯特灵还证明了牛顿关于三次曲线分类研究的若干命题，并对牛顿已提到的72种三次曲线作了补充，另增加了四种，还把x和y的一般二次方程化为几种标准型。斯特灵的主要著作有《微分法》和《牛顿的三次曲线》等。

斯梅尔　(Smale, Stephen, 1930．7．15—　)　美国数学家。他证明了微分拓扑学中最重要的定理之一——广义庞加莱猜想，从而荣获1965年的维布伦奖和1966年的菲尔兹奖。斯梅尔还是现代抽象动力系统理论的创始人之一，在应用数学，特别是运筹学的研究中他也取得一定的成果。

斯蒂文　(Stevin, Simon, 1548—1620)　荷兰数学家。他促进了十进制小数使用的标准化。虽然十进制小数不是他发明的，他用的符号也并不

方便，但他确立了小数在数学中的应用。他的《算术》一书，给出算术和代数的一般论述；他引进新的记号表示多项式，还给出二次、三次、四次方程的统一解法。他否定了亚里士多德关于重的物体坠落比轻物体快的说法，并于1586年发表了实验报告。这一发现早于伽里略自由落体的理论著作。斯蒂文的著作收入2卷《数学论文集》中，他理论联系实际，其著作以独特风格吸引了国内外读者。

斯豪滕 （Schouten Jan Arnoldus，1883.8.28—1971.1.20） 荷兰数学家。荷兰皇家科学院院士，曾被选为阿姆斯特丹国际数学会理事。斯豪滕是张量分析的创始人，他的多部著作和近二百多篇论文全部论述张量分析及张量分析在多学科中的应用。斯豪滕还培养和影响了一批当代优秀的数学家，推动了本国及世界数学的发展。

斯托伊洛夫 （Stoilow，Simion G，1887.9.14—1961.7.4） 罗马尼亚数学家。罗马尼亚科学院院士，曾任罗马尼亚数学研究所第一任所长。他奠定了解析函数的拓扑这一新数学分支的理论基础。他给出了解析函数的拓扑性质；发现了半纯函数的零点和极点的当儒瓦定理的拓扑内容；推广了胡尔维茨公式；导出了内部映射和局部同胚的相互单值性原理。他引进的与内部映射相关的概念，不仅对拓扑学，而且对多复变函数均有重要意义，还借助于它解决了确定黎曼面的复盖面，这一解析函数论的第二个基本问题。斯托伊洛夫的主要著作有《解析函数论的拓扑原理教程》等。

斯米尔诺夫 （Смирнов，Николай Васильевич，1887.6.10—1974.2.11） 苏联数学家。长期与索博列夫合作在复变函数、泛函分析和弹性理论方面取得重要研究成果。他的研究领域广阔，还涉及到微分方程、变分学和应用数学，并开辟了地震理论研究的新方向。斯米尔诺夫是一个优秀的数学教育工作者，他撰写的《高等数学教程》是一本数学百科全书，在苏联、中国等多次重印，他培养的学生有许多后来成为著名的数学家。

蒂伊 （Tilly，Joseph—Marie de，1837.8.16—1906.8.4） 比利时几何学家。比利时皇家科学院院士。蒂伊通过对欧几里得第五公设的讨论，独立地得到了罗巴切夫斯基几何学的内容。他还在探讨罗巴切夫斯基空间的基础上，首先研究了非欧几里得力学，创建了一门新的力学学科。此外，蒂伊在数学史、军事科学等方面也有贡献。他的主要论著有《几何原理探究》、《抽象力学研究》、《论几何学与力学的基本原理》、《一般解析几何论文集》等。

棣莫弗 （De Moivre，Abraham，1667.5.26—1754.11.27） 法国——英国数学家。柏林科学院、巴黎科学院院士，英国皇家学会会员。他写成的《机会的学说》一书，是概率论的最早著作之一。书中已包含了现称为棣莫弗——拉普拉斯定理的特殊情况。在研究三角学时，他得出“棣莫弗定理”的著名公式$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$（$\theta$为有理数）。此

公式给复数乘方的运算带来了极大的方便。在他的另一部名著《分析杂论》中，他得到了n阶乘的级数表达式，及当n很大时，后被误称的斯特灵公式。他还用阶乘的近似公式导出近似于二项分布的正态分布的频率曲线。

惠更斯　(Huygens, Christiaan, 1629.4.14—1695.7.8)　荷兰数学家、物理学家、天文学家。法国科学院院士，也是伦敦皇家学会的第一个外国会员。年轻时惠更斯就发表了关于计算圆周长、椭圆弧及双曲线的著作。他研究了曳物线、对数螺线、悬链线以及其它平面曲线，还得出了曲线的求长法、旋转曲面面积计算法和惯性力矩计算法等。他撰写的《论赌博中的计算》一书，是概率论的最早论著。惠更斯在物理学和天文学方面也有许多发现和创造。

惠特克　(Whittaker, Edmund Taylar, 1873.10.24—1956.3.24)　英国数学家。英国皇家学会会员，曾任爱丁堡皇家学会会长。在对微分方程的研究中，他得到三维空间拉普拉斯方程最一般的解法。他提出了一种以他名字命名的超几何方程，这种方程的解也被称为惠特克函数，是贝塞尔函数的特殊情况。他发表了多篇有关相对论的论文，给出了弯曲的时空连续体中距离的定义，推广了电磁学中一般相对论的公式等。惠特克在对数学物理、数值分析、解析动力学等方面的研究中也有贡献。他的主要著作有《现代分析》、《解析动力学》、《观测验算》等，后一部书的前四章有中译本。

雅可比　(Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1804.12.10—1851.2.18)　德国数学家。伦敦皇家学会会员，柏林科学院及许多国家科学院院士。他和挪威的阿贝尔同是椭圆函数理论的创始人。他引入并研究了δ函数和其它某些超越函数。他将椭圆函数论应用于动力学，创立了所谓哈密顿——雅可比方程，得出了此类微分方程的许多奇妙解法，使微分方程进入了一个新的发展时期。他研究了行列式的结构和性质，对行列式论作了开拓性的贡献。他发明了函数行列式，又称雅可比行列式，该行列式在许多分析研究中有重要作用。雅可比在数论、线性代数、变分法、微分方程论等方面也有很多建树。在数学中，以他的名字命名了不少定理、公式，以及函数恒等式、积分、矩阵、根式等。他的主要著作有《关于行列式的结构和性质》、《天文消息》、《椭圆函数新理论基础》等。

雅各布森　(Jacobson, Nothan, 1910.9.8—　)　波兰——美国数学家。美国科学院、美国科学艺术研究院院士，曾任美国数学会主席。雅各布森的主要贡献在抽象代数和偏微分方程方面。他成功地建立了交换域的一般伽罗瓦理论。抽象代数中有许多概念和定理以他的名字命名。其主要著作有《李代数》、《抽象代数学》、《若尔当代数的结构和表示》等。

雅各布·伯努利　(Jacob, Bernoulli, 1654.12.27—1705.8.16)　瑞士数学家。十七、十八世纪瑞士有一个伯努利数学大家族，祖孙四代有数学家十一人。其中比较突出的有雅各

布·伯努利、约翰·伯努利、丹尼尔·伯努利。雅各布·伯努利对微积分的创建有重要贡献。作为莱布尼茨的朋友，在牛顿—莱布尼茨的微积分学遭到保守界势力的攻击时，他坚定地捍卫了微积分学。1690年他首先使用了“积分”一词，并把微积分应用于桥梁建设，研究并解决了比较复杂的悬链问题。他首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式，极坐标从此开始使用。他的《关于无穷级数及其有限和的算术应用》一书，是级数理论的第一部教科书。他的巨著《猜度术》，则是概率论的一部经典著作。

斐波那契 (Fibonacci, Leonardo, 约1170—1250) 意大利数学家。曾随父到各国经商、旅游、了解了各国数学研究及应用情况，回国后写出《算盘书》一书，被认为是中世纪欧洲最主要的数学著作。这本书不但向欧洲人介绍使用了印度—阿拉伯数码的计算方法，还通过兔子繁殖问题，导出了一个著名的斐波那契级数：1，1，2，3，5，8，13，21，……。该级数有若干重要而有趣的性质，成了近几百年若干数学家研究的对象。有关斐波那契级数的数学理论已应用于数论及运筹学等多方面。美国从60年代起创办了一个以斐波那契命名的数学季刊，专门刊登这方面的研究成果。斐波那契的另一部著作《平方数书》，还使他成为数论中介于丢番图与费马之间贡献最大的人物。其主要著作还有《实用几何》、《开花》等。

程大位 (1533.5.3—1606.9.18) 中国明代数学家。1592年编成《直指算法统宗》，简称《算法统宗》17卷。这是古代算书中印行数量最多，流传和影响最广的一部总结珠算理论的著作。长时间成为学习珠算的入门书。中国算盘盛行数百年而不衰，与该书的普及有一定关系。《算法统宗》传入日本、朝鲜、东南亚各国，对这些国家的珠算使用也起了重要作用。

策梅罗 (Zermelo, Ernst Friedrich Fevdinand, 1871.7.27—1953.5.21) 德国数学家。他是公理化集合论的先驱。他明确地说明把集合论公理化的目的，他在这方面的研究成果是公理化集合论成为此后一切发展的基础和出发点。策梅罗提出的集合论公理化后经弗伦克尔加以修改和补充，称为策梅罗—弗伦克尔集合论公理体系，简记为Z—F。该系统已比较完整，且已经在目前集合论的文献中广泛地被应用。以后又经伯奈斯和哥德尔进一步改进和简化，被称为伯奈斯—哥德尔集合论公理体系。另外，策梅罗在变分学、概率论在统计物理的应用等方面也有贡献。

傅立叶 (Fourier, Jean Baptiste Joseph 1768.3.21—1830.5.16) 法国数学家、物理学家。巴黎科学院院士，英国皇家学会外籍院士，彼得堡科学院荣誉院士。傅立叶是法国分析学派公认的代表。在热传导理论的研究中有突出贡献。他首次推出热传导方程。给出不同边界条件下的积分法及求解热传导方程的变量分离法。他把函数表示为由三角函数所构成的级数，后称傅立叶级数，形成了一种在

数学物理问题中具有普遍意义的方法，开创了近代数学的一大分支。他进一步发展了积分理论，提出了“傅立叶积分”。他还给出了在确定区间上代数方程实根个数的判别方法，称为“傅立叶定理”。他的成果对于十九世纪数学理论和应用的发展有很大影响。其主要著作有《热的分析理论》等。

焦循 (1763—1820) 中国清代数学家、哲学家。他著作甚丰，其内容主要是对古代一些数学著作的研究，也包括有关椭圆、球面三角学的论述。在他的《加减乘除释》一书中，他从运算理论上对古代数学进行了总结，记载了一些算术基本运算律。在外国，这些基本运算律也差不多在同时代被提出。焦循还开创了我国符号数学教学研究的先例。焦循知识广博，经、史、历、算、声韵、训诂诸学皆精。他的数学著作还有《大衍求一术》一卷、《开方通释》一卷、《乘方释例》三卷等。

奥托 (Othq, Valentin, 约1550—1605) 荷兰数学家。约1573年他得出了圆周率 π 的近似值为 $\frac{355}{113}$。此为祖冲之的密率，在欧洲也称此为安托尼斯率。从时间看，奥托的这一发现先于安托尼斯百年以上，但晚于中国祖冲之千年之后。奥托还最终完成了三角函数表，并将其刊于世。这一数学用表包含了每隔10″的正弦、正切和正割值。为值此表，在奥托之前他的老师雷蒂库斯和他的助手，在全凭手算、计算浩繁的情况下，已经坚韧不拔地工作了12年。

奥卡涅 (Ocagne, Philbert Mauriced, 1862.3.25—1938.9.23) 法国数学家。法国科学院院士。奥卡涅在应用数学方面的建树很多，在画法几何、微分几何、射影几何、近似计算以及科学史方面的著作多达200余种。奥卡涅对实用几何学，特别在图解演算和算图系统理论上的贡献尤为突出。他引入了共线点图算方法，实际上是图算法学科的开创人。其主要著作《图算法论》曾被译成多国文字，广为流传。

奥雷姆 (Oresme, Nicole, 约1320—1382) 法国数学家。巴黎大学教授，曾任诺曼底主教。他是继斐波那契之后，欧洲14世纪数学的代表人物。在其未发表的著作《比例算法》中，他最早引入了分数指数及其算法，并由此触及到对数思想。他得出 $4^{1\frac{1}{2}}=8$，其记法为 $\frac{1\cdot p}{1\cdot 2}4=4^{1\frac{1}{2}}$。这已远远走在时代之前，因为分数指数确切意义的阐明，已在奥雷姆270年之后。奥雷姆对数学的另一个重要贡献是对变化的研究。他实际上是提出了函数和函数图形的初始概念，并创造了直角坐标系的早期形式。他的这些研究成果均发表在《论均匀与非均匀的强度》和《论图线》两本著作中，这些研究成果对17世纪的无穷小方法，以及伽里略力学的发展都起了很大的作用。

奥特雷德 (Oughtred, William, 1575.3.5—1660.6.30) 英国数学家。曾任伦敦附近教区的教区长和

家庭教师。他重视数学符号的运用，现通用的乘号“×”与比例“:”（开始为“::”）就是由奥特雷德首先引入的。他编著了一本算术和代数教科书《数学之钥》，在英国和欧洲产生了很大影响，牛顿曾对其给予高度评价。他还编著了另一本数学著作《三角学》,主要研讨平面和球面三角形问题。书中采用了缩写符号表示各三角函数，如用sin及s表示正弦等。虽然奥特雷德选用的百多个数学符号现在仍留用的已不多，但他对数学符号的推广和使用是有贡献的。奥特雷德还是直线对数尺，特别是圆形计算尺的发明者之一。

奥马·海亚姆 （Omar—Khayyam,1048? 5.15—1131? 12.4） 阿拉伯数学家、天文学家、哲学家、诗人。他详尽地研究了三次方程，并指出了用圆锥曲线解三次方程的方法，这是中世纪数学的最大成就之一，也是希腊圆锥曲线论的发展。他讨论了二项式的展开，给出了$(a+b)^6$的展式。他评注了欧几里得的著作，分析了有关平行公设，比和比例的问题。他对算术理论也十分重视，在天文学方面，奥马、海亚姆还与他人合作创作了哲拉里历，明显地比当时的格里历精密。格里历3330年相差一日，而哲拉里历要积5000年才差一日。奥马、海亚姆是一位全能的学者，在数学、天文、哲学、文学、音乐等方面都有著述。其主要著作有《代数学》、《算术问题》、《智慧的天平》等。

鲁宾逊 （Robinson, Julia Bowman, 1919.12.8—1985.7.30） 美国女数学家。美国科学院院士，也是科学院中数学方面唯一的女性，曾任美国数学会的第一任女会长。1959年他同普特南证明了一个辅助定理,使希尔伯特第10个问题,即丢番图方程可解性的判定，获得了突破性进展。另外，鲁宾逊在数理逻辑和博奕论方面也做出了重要贡献。

普吕克 （Plücker, Julius, 1801.6.16—1868.5.22） 德国数学家、物理学家。法国科学院院士，曾获英国科普利奖章。普吕克在几何学方面有重大贡献。他用缩写的符号与几何推导，证明了平面解析几何中许多结论和定理。他解析地阐述了对偶性原理，引入了所谓三角形坐标，把配极的概念推广到所有的平面代数曲线。他讨论了三次平面曲线，给出了它们的构造和分类，证明了著名的“普吕克公式”。他还发展了线几何理论，引入了“普吕克坐标”，建立了线丛、线汇等概念，并将其分类，为二次线丛的研究奠定了基础。普吕克的主要著作有《解析几何的发展》、《解析几何系统》、《代数曲线理论》等。

普法夫 （Pfaff, Johann Friedrich, 1765.12.22—1825.4.21） 德国数学家。对微积分、级数理论和微分方程的解法有重要贡献。以他的名字命名的普法夫型理论，是偏微分方程积分基本理论的一个起点。他还为解所谓“普法夫方程”提供了一种有效的方法。普法夫的主要著作有《分析研究》和《欧拉积分法的观察》等。

道格拉斯 （Douglas,Jesse, 1897.7.3—1965.10.7） 美国数学家。

他的主要贡献在变分法方面。因解决并推广了普拉托极小曲面问题，即求出通过给定边界而面积为最小的曲面，这一历代大数学家都未能解决的难题而荣获1936年第一次菲尔兹奖。另外，他还解决了三维空间变分问题的可逆问题，在对群论的研究中也有贡献。

富比尼　(Fubini, Guido, 1879.1.19—1943.6.6)　意大利数学家。意大利许多科学机构的成员。富比尼是意大利多产数学家之一，其研究领域几乎涉及所有数学分支。他研究过变分学、积分化简、微分几何、非欧几何、概率分析以及函数级数的极限等问题。他通过线性群与运动群理论在群论中建立起制定连续群的准则。在分析中，他还出版过有关线性微分方程、偏微分方程、多复变解析函数和单调函数方面的著作。自1928年起富比尼担任了《纯粹与应用数学年刊》编辑达十年之久。1919年他荣获王室奖金。

富克斯　(Fuchs, Immanuel, Lazarus, 1833.5.5—1902.4.26)　德国数学家。柏林科学院院士。曾任《纯粹与应用数学杂志》编辑，对函数论、高等几何与数论均有研究，但在微分方程理论的研究上更有建树。在此领域内他的一系列创见，如在线性微分方程领域建立起“富克斯理论”；引入“基础系统”来描述线性微分方程的几个线性无关的解，对于微分方程理论的发展起了重要的推动作用。

谢尔品斯基　(Sierpikski, Wactaw, 1882.3.14—1969.10.21)　波兰数学家。波兰科学院院士，同时还是12所外国科学院的院士或通讯院士，得到过十几所大学、研究院或数学会的职衔。谢尔品斯基是波兰数学学派的创始人之一。共发表、出版七百多篇论著，主要探讨集合理论和数论，给出许多重要定理。其中有较大影响的专著有《连续统假设》、《基数与序数》、《初等数论》等。此外，他还参与创办《数学基础》杂志，恢复出版了国际性的数论杂志《算术学报》并任主编。谢尔品斯基的研究工作对波兰数学乃至世界数学的发展均有重要影响。

瑟斯顿　(Thurston, William, 1946.10.30—　)　美国数学家。他借助电子计算机基本完成了三维闭流形的拓扑分类，他还讨论了三维流形上叶状结构，并进一步对一般流形上叶状结构的存在性质，及其分类得出更加普遍的结果。瑟斯顿曾荣获1982年菲尔兹奖，及美国数学会五年一度的维布伦奖。

蒙日　(Monge, Gaspard, 1746.5.9—1818.7.28)　法国数学家。巴黎科学院通讯院士。他创立了画法几何学，在工程技术中有极大的应用价值。他用分析的方法研究几何的问题，把微积分应用于曲线和曲面的研究，在三维微分几何方面所取得的成就远远超过了欧拉。他的《分析在几何学中的应用》一书，是关于微分几何学最早的著作之一。蒙日对解析几何学也有突出贡献，他和他的学生证明了“二次曲面的每一个截口是一条二次曲线”，还证明了“单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面”。由于拉格

朗日、蒙日等人的工作，解析几何发展成了一门独立的数学分支。蒙日还是一个教育家，培养和影响了一大批有成就的几何学家。其主要著作还有《画法几何学》等。

蒙蒂克拉 (Montucla, Jean Étienne, 1725.9.5—1799.12.19) 法国数学家、数学史家。柏林研究院通讯院士。对数学史的研究有重要贡献。著有《数学史》一书，这是一部全面阐述数学历史的名著。他将数学分为纯粹抽象与同其它各科相混合两大部分，对一切能用数学方法进行研究处理的力学、天文学、光学、音乐等都作了介绍。内容不仅包括了数学古老的各个分支，也包含了数学的最新成果，其中有不少蒙蒂克拉的论述和创见。这实际上是十八世纪前的一部科学史，在出版后的百年内，一直被誉为数学史及科学史的经典著作。蒙蒂克拉还著有最早系统地研究圆周率历史的《圆求积的历史探索》一书。

赖厄 (Reye, Theodor, 1838.6.20—1919.7.2) 德国数学家。在综合几何学的研究上作出了贡献。他是点系列几何的创立者之一。他研究二次曲线、二次曲面及其线性系统，以及三次和四次曲面、二次线汇中的有关问题，获得了一些重要成果。赖厄的主要著作有《位置几何学》、《球体综合几何学》等。

甄鸾 (535年左右) 中国北周数学家、天文学家。他编注了多种数学著作，主要的有《五曹算经》、《五经算术》、《数术记遗》三种。其中《五曹算经》可能是他任地方官时写的一本算术问题及解答集。《五经算术》则是对古代经典如《孟书》、《周易》、《论语》、《周礼》、《礼记》等书一些与数学有关问题的注释集。《数术记遗》记录了我国古代的各种记数方法和计算器械，且第一次出现了"珠算"一词。据书中所记推想，这里的珠算与后世珠算有相似之处。

雷科德 (Recorde, Robert, 约1510—1558) 英国数学家。是英国数学科学的奠基人之一。他用通俗易懂的本国语言编写了多部数学书，内容涉及到算术、平面几何、代数诸领域。对于代数符号他也作出了贡献，比如用"="表示相等就是最先由他引入的，他认为最相象的东西无过于两根平行线。他的主要著作有《技艺基础》、《学问之路》、《知识入门》、《智力磨石》等。其中《技艺基础》一书是第一本英国数学著作。

雷蒂库斯 (Rheticus, George Joachim, 1514.2.16—1574.12.4) 奥地利数学家、天文学家。在三角学和天文学方面有重要贡献。他重新给出了三角函数的定义，把它定义为直角三角形的边长之比，建立了三角函数与角度的直接联系，改变了过去必须依赖圆弧的作法。他全部使用了六个三角函数，首次编制出三角函数表，为了编制更精密的三角函数表，雷蒂库斯勤奋工作了十几年，直至逝世，以后由其学生奥托最终完成。他还想方设法帮助哥白尼出版了《天体运行论》这部划时代的天文学巨著。

雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus,

1436.6.6—1476.7.6）　德国数学家。主要贡献在三角学方面。他正式使三角学脱离天文学而成为一个独立的科目。他的名著《论一般三角形》是欧洲第一部独立于天文学的三角学。书中包括了平面三角和球面三角的内容，记述了三角的基本定律，并取半径为6×10^5和10^7制造了较前都为精密的正弦表。在《方位表》一书中，他还给出了取十等分角度的五位正切表，创立了十七世纪所称的正切、余切函数。雷格蒙塔努斯在代数方面也作出过贡献。

塞尔　(Serre, Jean—Pierre, 1926.9.15—　)　法国数学家。巴黎科学院院士，美国科学艺术研究院院士，曾被选为国际数学联合会执委会副主席。塞尔在代数拓扑学方面有重要贡献。他发展了纤维丛的概念，得出一般纤维空间概念；他利用谱序列等工具证明了同伦论中最重要的一般结果；他所引进的局部化方法把求同伦群的问题加以分解，得到一系列重大结果。塞尔还利用“层”的理论用于多复变函数论以及代数几何学的研究。塞尔荣获1954年菲尔兹奖。他的著述甚丰，多数被翻译出国。

塞雷　(Serret, Joseph Alfred 1819.8.30—1885.3.2)　法国数学家。在微分几何的研究中，他与弗雷内一起建立起切线、次法线和法线的方向导数等公式，对曲面理论和空间曲线理论作出了奠基性工作。这其中以他的名字命名了一些公式。另外，塞雷的数学研究还涉及到函数论、伽罗瓦群论、微分方程、数论等领域。其主要著作有《高等数学讲义》、《微积分讲义》等。

塞格雷　(Segre, Corrado, 1863.8.20—1924.5.18)　意大利数学家。图灵研究院成员。主要从事空间几何学的研究。他讨论了线性变换下不变的几何性质，给出一套在三维空间探索高维空间性质的方法，并创立直线的新体系，其成果对本世纪的几何学发展产生了一定影响。在对黎曼曲面性质的研究中，他建立起二重复形理论，是这一新型超代数理论的奠基人之一。在数学中，以他的名字命名的有“修滕—塞格雷不变量”、“塞格雷线”等。塞格雷曾长期担任“纯粹与应用数学年刊》编辑，并为《数理科学百科全书》撰写过有关超空间理论的长文。

塞尔伯格　(Selberg, Atle, 1917.6.14—　)　挪威——美国数学家。挪威科学院及美国科学艺术研究院院士。他第一次用初等方法证明了素数分布定理，提出了后以他名字命名的塞尔伯格筛法。由于他在数论研究上的杰出贡献，而荣获1950年菲尔兹奖。塞尔伯格的研究领域广泛，并不断开拓新的研究方向。在二十世纪的数学史上以他的名字命名的还有塞尔伯格等式，塞尔伯格不等式，塞尔伯格渐近公式，塞尔伯格猜想，塞尔伯格函数等等。

福赛恩　(Forsyth, Andrew Russell, 1858.6.18—1942.6.2)　英国数学家。英国皇家学会会员。他著有《函数论》一书，这是一部为数学现代化起了引导作用，且在英国影响较大的巨著。福赛恩其它著作还有《变分学》、《理想空间的内蕴几何

学》等，但影响不及前书。

赫尔曼 (Hermann Jakob, 1678.7.16—1733.7.11) 瑞士数学家。柏林科学院、巴黎科学院院士。在对解析几何的研究中，他提出了极坐标概念，用z、n、m三个数表示P点的位置，其中z是P到极点o的距离，n和m相当于$\cos\theta$和$\sin\theta$。同时，还给出了直角坐标和极坐标的变换公式。他阐明了极坐标是普遍可行的，并应用极坐标去研究曲线。赫尔曼还撰写过不少微分学论文，接触和解决了有关常微分方程论问题，在微分学、常微分方程、微分几何等方面有贡献。

赫尔德 (Hölder, Otto Ludwig, 1859.12.22—1937.8.29) 德国数学家。巴伐利亚科学院通讯院士，曾任科学院院长。赫尔德在数学分析、函数论、级数论、群论、几何学、数学基础等多方面均有重要贡献。以他的名字命名的体积密度连续性条件、不等式、若尔当——赫尔德序列、若尔当——赫尔德定理等都有重要意义和广泛应用。赫尔德还研究了与物理学有关的数学问题。著有《几何学中的观点和思想》、《数学方法》等。

赫谢尔 (Herschel, John Frederick William, 1792.3.7—1871.5.11) 英国天文学家、数学家。十九世纪英国接受并研究、宣传莱布尼兹微积分原理及符号的代表人物之一。他最早用符号$\sin^{-1}x$、$\mathrm{tg}^{-1}x$表示反三角函数。赫谢尔还是著名的天文学家。他编制了南北天星云表和双星表，测定了许多恒星的亮度，在恒星天文学方面作出了巨大贡献。他的主要著作有《有限差分学的例题汇编》、《天文学大纲》等。

赫尔曼德 (Hörmander, Lars Valter, 1931.1.24—) 瑞典数学家。美国科学艺术研究院院士。他得到并研究了伪微分算子，且发现伪微分算子构成一个算子代数，使伪微分算子的理论和应用成为近十几年来偏微分方程理论的热门。进一步他又把伪微分算子推广到傅立叶积分算子，这些理论构成了现代偏微分方程理论的基石。赫尔曼德还对变系数线性偏微分方程解的存在性、唯一性及正则性进行了富有成果的研究，并荣获1962年菲尔兹奖。他的主要著作有《线性偏微分算子》、《多复变函数论导引》等。

嘉当E (Cartan, Elie—Josephe, 1869.4.9—1951.5.6) 法国数学家。法国科学院院士，英国皇家学会会员。他彻底解决了有限参变量连续群问题，奠定了李群代数理论的基础。他振兴了微分几何学，嘉当创造的方法开辟了解决几何问题的有效途径。他还研究过微分方程组理论，定义了全微分方程中的通常积分元和正则积分元，给出了适应一类方程组的嘉当——克勒存在定理，推动了普法夫问题的求解。晚年，他发展了对称空间理论。嘉当的专著《连续群理论与广义空间》、《旋量理论》，为近代法国数学的发展指出了方向。他创造性的工作使他获得过罗巴切夫斯基国际奖及巴黎科学院的多次奖励。其主要著作还有《黎曼空间几何学》、《积分不变式》、《李群几何学与对称空间》等。

嘉当 (Cartan, Henri, 1904.

7.8—) 法国数学家。数学家E·嘉当的儿子。曾任国际数学联合会会长。嘉当是法国布尔巴基学派的代表人物之一，他的研究涉及到现代数学的许多分支。在解析函数论方面他取得了根本性进展，解析几何现在用来表示多复变函数论在大范围的情形就是由嘉当提出。他引进的有关概念和证明的定理，对解决位势论公理化及与概率论的关系等都起着重要作用。另外，嘉当对于代数拓扑学、李群论、同调论等都有贡献。1980年他荣获沃尔夫奖。他的主要著作有《同调代数》、《微分学、微分形式》、《单变量或多变量的初等解析函数论》等。

豪斯多夫 (Hausdorff, Felix, 1868.11.8—1942.1.26) 德国数学家。在集合论和拓扑学方面有突出贡献。他引入了一套公理并设立起拓扑空间(也称豪斯多夫空间)理论，对拓扑学和度量空间理论的发展有重要意义。豪斯多夫对数学的其它领域，如数学分析、连续群论、泛函分析、数论等也有较大贡献。其主要著作有《点集论纲要》、《集论》等。其中《集论》被译成中文。

熊庆来 (1893.10.20—1969.2.3) 中国数学家、教育家。中国科学院数学研究所研究员，学术委员会委员。是我国著名的函数论专家。主要研究整函数和半纯函数等，取得若干重要结果，其研究工作推动了函数论的发展。熊庆来还是出色的数学教育家，培养和影响了包括陈省身、华罗庚在内的一批优秀数学家。熊庆来共发表论著60余种，其主要论文及著作有《关于整函数与无穷级数的亚纯函数》，《关于亚纯函数及代数体函数、奈望林纳的一个定理的推广》等。

黎曼 (Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 1826.9.17—1866.7.20) 德国数学家。被誉为十九世纪最有创造力的数学家之一。他的论文《单复变函数的一般理论基础》，推广单值解析函数到多值解析函数，把拓扑学的概念引入复变函数论中，导致了黎曼曲面论的产生，他的研究工作为复变函数论的全面发展奠定了基础。黎曼提出了一种广泛的几何观点，为几何学开拓了更广阔的领域，建立了黎曼几何。他提出的黎曼猜想，后被希尔伯特列为其23个问题中的第八个问题，至今尚未证明，许多数论问题需待此问题证明后方能解决。黎曼还开创并促进了解析函数论的发展。在数学的其他若干领域内，黎曼也都有重要贡献。以他的名字命名的方法、定理和概念就有数十个。另外，黎曼关于空间几何特具胆识的思想，对近代理论物理的发展也有深远影响，在很大程度上为后来用在相对论中的概念和方法提供了基础。黎曼的重要论文有《复变函数论的基础》、《关于利用三角级数表示一个函数的可能性》、《关于几何基础的假设》、《在给定大小之下的素数个数》等。

德恩 (Dehn, Max, 1878.11.13—1952.6.27) 德国数学家、教育家。挪威科学院院士。受数学家希尔伯特的几何公理化影响较大。他解决了希尔伯特1900年在国际数学家大会上提

出的著名23个问题中的第3个问题，即不能用割补的方法来证明两个等底等高的四面体的体积相等。在研究拓扑学中还得出了关于拓扑流形的一个重要定理，后称德恩引理。

德扎格 (Desargues, Girard, 1591.2.21—1661.10) 法国数学家。射影几何学的创始人之一。他的重要著作《试论锥面截一平面所得结果的初稿》，被誉为近世纯粹几何初期发展的经典之作。在书中德扎格导入了无穷远点、无穷远线，将直线看作具有无穷大半径的圆，切线则是割线的极限，从而奠定了射影几何的基础，而且使研究射影变换成为可能。他所发现的德扎格定理则是射影几何的基本定理。德扎格的主要著作还有《用透视表示对象的一般方法》。

德利涅 (Deligne, Pierre, 1944.10.3—) 比利时数学家，26时就被聘为巴黎科学研究所终身教授。他主要从事代数曲线和代数曲面的几何理论的研究，获重要成果。他证明了韦伊猜想这一代数几何的中心问题，得到了ζ函数理论中的“韦伊—德利涅定理”。德利涅两次获得国家的奖励，1978年荣获该年度的菲尔兹奖。

德摩根 (De Morgan, Augustus, 1806.6.27—1871.3.18) 英国数学家。他是伦敦数学会的筹建人之一，并任第一任会长。他对数学的最大贡献是发展了一套适合推理的符号，并提出逻辑关系，后称之为德摩根律。这一工作使其成为布尔代数的先声。德摩根的研究领域很广。在微积分方面，他曾给出一个确定无穷序列收敛性的法则。在代数方面，他的“双重代数”系统用来帮助复数性质的几何表示，并提出了四元数的思想。他还最先提出解决四色问题，并有所推进。德摩根的著作甚丰，对19世纪的数学产生了相当的影响。其中1835年他写成的一本代数教科书，曾被李善兰及英国人伟烈亚力译成中文，名为棣么甘《代数学》，是我国第一本代数教材。

德谟克利特 (Democritus, 约公元前460—约公元前370) 希腊数学家、哲学家。他认为物体是由大量的、但数量有限的终极微粒——原子组成的。用此方法，他第一个得出圆锥和棱锥的体积是同底等高的圆柱和棱柱体积的三分之一的结论。他的原子论观点也是后来数学积分思想的先声。德谟克利特有六十多部著作，遗憾的是只有三百多句断语被保存下来。

潘承洞 (1934—) 中国数学家。对于哥德巴赫猜想的研究取得一系列重要成果。他最早证明了大偶数可以表成一个素数及一个不超过五个素数的乘积之和，即(1＋5)。后又改进为(1＋4)。在对L函数的零点分布的研究中，潘承洞改进了苏联数学家林尼克的结果，得出了算术级数中最小素数上界的定量估计。他的主要著作有《哥德巴赫数的例外集合》(与陈景润合作)、《哥德巴赫猜想》(与潘承彪合作)。

薛凤祚 (?—1680) 中国清代数学家。与波兰传教士穆尼阁合作编译天文学、数学等书籍，后由薛凤祚把这些书汇编为丛书《天学会通》三集四十种出版。该书分正集、续集、外集

三部分，内容十分庞杂，主要介绍天文学，同时包括数学、物理学、医药学以及水利、火器等。书名会通是把中、西法、融会贯通之意。书中有关数学的内容，除包括第一次在我国介绍的对数和对数表外，还有平面三角学、球面三角学、三角函数表、三角函数对数表等。上述内容都包含在该丛书的《三角算法》一卷，《比例对数表》一卷，《比例四线新表》诸书中。

薛定谔　(Schrödinger, Erwin, 1887.8.12—1961.1.4)　奥地利学者。在数学物理、相对论和原子物理等方面有重要贡献，是量子力学的创始人之一。他提出量子力学的基本方程，也称薛定谔方程，还给出了各种特殊情况下的解法。他所引进的波动函数及由他发展起来的数学形式主义，是研究量子力学及其应用的有力的数学工具。薛定谔荣获了1933年诺贝尔物理学奖。

霍夫曼　(Hofmann, Joseph Ehrenfried, 1900.3.7—1973.5.7)　德国数学史家。德意志民主共和国科学院通讯院士，巴黎国际科学史研究院院士，也是比利时科学史学会的外籍会员。因编著《数学史》一书而闻名于世。该书内容精简，行文通俗流畅，为广大读者所欢迎。

霍普夫　H.(Hopf, Heinz, 1894.11.19—1971.6.3)　德国数学家。世界许多国家科学协会成员，曾被选为国际数学协会主席。霍普夫致力于拓扑学和微分几何学的研究，取得不少重要成果，这些成果包括：证明了霍普夫扩张和分类定理；建立了霍普夫映射度理论；提出了霍普夫不变量；引入了霍普夫代数等等。霍普夫在群论、数论、泛函分析等方面也多有建树。其主要著作有《拓扑学》(同亚历山德罗夫合著）等。

霍普金斯　(Hopkins, William, 1793.2.2—1866.10.13)　英国地质学家、数学家。英国皇家学会会员，曾任英国科学促进协会主席，伦敦地质学会主席。他将数学运用于地质学和物理学研究，取得一系列成果，荣获伦敦地质学会的沃拉斯顿勋章。霍普金斯的数学著作为两卷本的《三角学原理》。在地质学方面，霍普金斯有更多的建树，在他去世以后，剑桥大学哲学学会专门设立了一种奖金来纪念他。

戴煦　(1805—1860.2)　中国清代数学家。一生潜心研究数学，著作甚丰。他独立发现了指数为任何有理数的二项式定理；列出了对数函数及某些三角函数的幂级数展开式，并利用这些展开式阐述了三角函数对数表的造法。他早年写成的《重差图说》、《勾股和较集成》、《四元玉鉴细草》等书均未出版。40岁以后出版了《对数简法》二卷、《续对数简法》一卷、《外切密率》四卷、《假数测圆》一卷。四书合刊总名为《求表捷法》。

戴震　(1724—1777)　中国清朝数学家、思想家。1744年撰《策算》一卷，叙述西洋筹算的乘除法和开方法。后又撰《勾股割圆记》三篇。上篇介绍三线八角和平面三角形解法，中篇为球面三角形解法，下篇为球面斜三角形解法。但其内容基本同于梅

文鼎的两部著作。戴震还有《孟子字义疏证》、《原善》等包含辩证唯物论因素的哲学著作，并想依据考据学来反对宋儒理学。戴震参与了《四库全书》的编纂工作，在搜集、校勘古代天文算书中做出了重要贡献。其中的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》等以后的刻本均根据戴震的校订本传刻。戴震的著作还有《准望简法》一卷，《割圆弧矢补论》一卷，《方圆比例数表》一卷等。

戴德金 (Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 1831.10.6—1916.2.12) 德国数学家。是著名数学家高斯的得意门生。格丁根科学院、柏林科学院、巴黎科学院、罗马科学院院士。戴德金是抽象代数学的真正创始人之一，也是实数理论的奠基人之一。其中以他的名字命名的戴德金分割是研究实数理论的重要概念。在他的数学著作中，戴德金提出了算术公理的完整系统，其中包括了完全数学归纳法原理的准确表达形式，还涉及到实数系的完备性问题，并用映射等概念研究了集合论的某些问题，因而也使他成为开创数学基础研究新纪元的主要代表之一。数学上有许多命题和术语，如环、场、结构、截面、函数、定理等和戴德金的名字联系在一起。其主要著作有《连续性与无理数》、《数的意义》等。

名 著

九章算术 我国流传至今最早的一本数学经典著作。它的完成标志着我国初等数学已形成了体系。现传本《九章算术》的成书，多数认为在西汉末期到东汉初期之间。《九章算术》内容丰富，包含了算术、代数、几何等我国当时数学的全部内容。全书共有246道应用问题，和各个问题的解法。大体按数学性质分为九个大类，组成九章，每章为一卷。第一章，方田：主要讲平面形面积的计算和分数算法；第二章，粟米：主要讲各种比例问题；第三章，衰分：主要讲比例配分问题；第四章，少广：主要讲开方问题；第五章，商功：主要讲立体形体积的计算问题；第六章，均输：主要讲根据均输法纳税和输送等方面的计算问题；第七章，盈不足：主要讲算术中盈亏问题的解法和比例问题；第八章，方程：主要讲多元一次方程组应用问题的解法；第九章，勾股：主要讲勾股定理的应用。对于每类应用问题，《九章算术》都有统一的解法，相当于一些初等数学的定理和公式，但是都没有证明。《九章算术》的不少内容在当时具有世界先进水平。比如关于盈亏问题的解法，在世界数学史上就占有一定地位。后来印度、阿拉伯、中亚及中世纪欧洲一些类似解法，可能均是受其影响而发展起来的。再如正负数概念。《九章算术》已有负数记载，而在外国，首

先承认负数的是印度数学家婆罗门笈多，欧洲直到十六世纪才普遍承认负数。还有，《九章算术》给出了方程组的解法“直除法”，而外国对方程组的研究在十七世纪，而同“直除法”类似的解法是由法国数学家别朱在十八世纪建立的。《九章算术》早已流传到许多国家，现已有日、英、俄、德等多种文字的译本。

九章算法比类大全　明代数学家吴敬著。共十卷，是吴敬花了十年时间整理、研究，于1450年完成的。《九章算法比类大全》第一卷的前面有一个首卷，列举大数记法、小数记法，度量衡制单位，与乘除算法中用字的解释，整数四则运算，分数四则运算等项。第一卷至第九卷是一千多个应用问题解法的汇编。这些应用题分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股九类。第十卷专论开方，包括开平方、开立方以及高次幂、开带从平方、开带从立方。《九章算法比类大全》关于商业的算题很多，包括合伙经营、商品交换等等。它说明明朝的商业较宋元时期有了更进一步的发展，商业经济的发展，推动着商业算术的发展。另外，《九章算法比类大全》还有一种“写算”乘法，是以前我国数学书中从未见过的算法。这种算法当时在欧洲、印度、阿拉伯、中亚等广大地区非常流行。

几何学　1637年法国数学家笛卡尔(1596—1650)出版了哲学史上的经典著作《方法论》。为证明其方法是有效的，书后有三篇附录，其中一篇即为《几何学》。另两篇分别为《折光学》和《论流星》。《几何学》共分三卷。第一卷题名为“关于只用圆和直线的作图可能问题”。前半部实际上是韦达工作的继续，虽然也是代数用于几何的具体实践，但还不是现在的解析几何。后半部分则通过解决帕普斯问题的过程，明确地叙述了他的解析几何方法。第二卷题为“曲线的性质”。主要叙述了对曲线按方程的次数进行系统分类的方法。第三卷题为“关于立体和三次以上问题的作图”。实际上是代数问题，介绍了利用圆锥曲线在代数方法下解立体问题的方法。其中包括了笛卡尔在代数学上的两个重要发现：代数方程根的个数低于它的次数；以及所谓的“笛卡尔符号法则。笛卡尔的解析几何方法把数学的两个研究对象“数”与“形”统一起来了，并在数学中引入了变量的思想，这是数学史上划时代的变革。后世的数学家都把笛卡尔的《几何学》作为解析几何学的起点。恩格斯高度评价了这一成果，他说：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……”。

几何原本　公元前三世纪古希腊数学家欧几里得所著。这是一部内容丰富、论证精彩的数学经典著作。它不仅总结了前人的几何知识和研究成果，其伟大意义还在于它是用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范。它标志着几何知识已从零散、片断的经验形态转变为完整的逻辑体系。《几何原本》共十三卷。第一卷用23个定义提出了点、线、面、圆和平行

线的原始概念，提出了五个公设和五个公理，进一步研究了三角形全等的条件.三角形边和角的大小关系,平行线的理论，三角形和多角形等积的条件。第二卷研究多边形的等积问题。第三、四卷分别讨论了圆的问题及圆的内接和外切多边形。第五卷详细探讨了关于量的比例的理论。第六卷为相似多边形的理论。第七、八、九卷为数论，共一百个命题。第十卷是全书最长也最难深的一卷，共115个命题，其重点在于对形如$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$（$a$、$b$为两有理线段）的无理量所有25种可能的形式进行分类。第十一、十二、十三卷则主要是立体几何的内容。自《几何原本》问世以来，已出版一千余版，仅次于《圣经》。在初等几何方面，现代的中学课本与《几何原本》无论基本内容还是论证方式都相差无几。《几何原本》在我国最早的译本是1607年利玛窦、徐光启合译的前六卷。1857年伟烈亚力、李善兰合译了后九卷。元朝已有《几何原本》传入，可惜未见译本。现流行的英译本是近代数学家希思于1908年翻译注释的版本。《几何原本》不仅深刻影响到后世数学的发展，它采用的演绎结构被移植到其它学科后，也同样促进了这些学科的发展。由于受时代限制，《几何原本》也有明显的不足，如部分证明有遗漏和错误，基础部分不够严密等。

几何基础 德国数学家希尔伯特(1862—1943)所著。由于时代的限制、欧几里得《几何原本》的理论体系，尚存不少破绽和漏洞。许多数学家曾致力于整理、完备欧几里得几何体系的工作，希尔伯特工作最为出色。他的《几何基础》一书，提出了一个比较完善的几何学的公理系统，使《几何原本》中的不足得以修正，并创立了希尔伯特公理体系。在《几何基础》一书中，希尔伯特提出的公理体系最重要的思想包括：（1）把几何中的点、直线、平面等概念，作为不加定义的“原始”概念，叫做基本对象；（2）给出几何元素的一些基本关系：结合关系、顺序关系、合同关系；（3）规定了五组公理：结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理、平行公理，用它阐述基本对象的性质。《几何基础》不仅提出了一个完善的几何体系，并且还提出了一个建立公理系统的三条原则，即共存性、独立性、完备性。公理化的方法给几何学的研究带来了一个新颖的观点，使几何学研究的对象更加广泛、抽象，给近代几何学的发展带来了深远的影响。

三角全书 德国数学家雷格蒙塔努斯(1436—1476)著。该书写成于1464年，1533年发表。《三角全书》分五卷，前两卷讲平面三角，后三卷讲球面三角。书中，雷格蒙塔努斯有效地把平面三角、球面三角和球面几何中有用的知识综合起来，给出了现代三角学的雏型，使三角学在科学中的地位得以确立。《三角全书》给出了球面三角形的正弦定律：$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$，和边的余弦定律：$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cdot\cos A$。此外，书中还讨论了一个新颖的极值问题：

天花板挂一垂直的杆，长10尺，下端离地面4尺，在地面上找一点（或这点的轨迹）使对杆所张的角度最大。这也是数学史上第一次明确讨论的极值问题。《三角全书》造出了取半径为10^7单位的正弦表，还给出了取十等分角度的正切表，推动了三角函数表的编制工作。

大术　意大利学者卡尔达诺（1501—1576）著。《大术》共有40章，是最早的一本拉丁文代数专著。此书第一次公布了一般三次代数方程的求根公式，这是他从数学家塔尔利亚那里以守密誓约换取的结果。尽管已注明方法的出处，其中也加入了自己的见解和证明，但终因失信而引起一场与塔尔塔利亚的争论。由于《大术》的出现，该法还是以“卡尔达诺公式”而流传于世。《大术》还载有其仆人、学生和朋友费拉里解四次方程的方法。对于各种方程，卡尔达诺先给出主要步骤的几何证明，然后用语言叙述求解细则，其实质与现代方法一致。书中还用降阶法解决复杂的三次方程问题，探讨了根与系数间的密切关系，注意了虚根问题。这些内容构成了代数方程论的雏形，对后世影响很大。

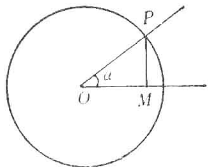
大著作　英国科学家、哲学家培根（1219?—1292）的重要著作之一。在《大著作》中，培根强调了所有科学都需要数学，他指出，逻辑不能比数学证明更多的东西，因此逻辑必须依赖数学。他也强调实验，充分肯定实验在检验理论正确性方面的作用。《大著作》列举了数学的各种实用，从地理、年表学、音乐、虹彩的解释，编日历、确定信念到气象、水文、占星、透视、光学及国家管理等等。从而进一步强调数学是科学认识中所必要的，数学是实际应用的科学，数学是关于美的科学。

马苏德天文学和占星学原理　阿拉伯数学家、天文学家、历史及地理学家比鲁尼(973—1050?)著。此书是比鲁尼为其保护人马苏德写的一个总结整个天文学的报告。共十一卷。其中的第三卷主要研究了平面三角学及球面三角学，它在整个三角学史上十分重要。第三卷共有10章组成。第1章计算了圆内接正三角形、正方形、正五、六、八、十边形的边长。第2章证明了与两角和差、倍角和半角的正弦公式等价的弦的定理。第3章利用三次方程和特殊迭代过程作出了圆内接正九边形的边。第4章研究了更一般的三等分角问题，给出了十二种分法。第5章计算了圆周长和直径的比。第6章给出了一个正弦表。第7章讲述了这个表的使用法则。第8章研究了正切和余切函数，并给出了正切表及其使用方法，特别是插值法。同时证明了平面三角学的正弦定理。第9、10章讨论了球面三角，证明了球面三角的正弦定理。

开方说　清朝数学家李锐著。共三卷，最后一卷未成李锐去世，后由其学生黎应南将书补成。《开方说》在我国方程理论史上占有重要地位，它不单纯讲开方问题，而是讲述方程的理论，其中最重要的部分是根与系数间关系的讨论。《开方说》卷上在有理数范围内讨论方程系数的变号与正根个数之间的关系。李锐把有正根叫“可

开”，无正根叫“不可开”。他总结出，有“可开”数与系数符号变化的关系，得到一条定理：“凡可开三数或止一数，可开四数或止二数，其二数不可开，是为无数。凡无数，必两无，无一数者”。此定理十分重要，已非常接近实系数方程虚根必成对的思想。《开方说》的下两卷，讨论的范围有所扩大，可以说是在实数范围内进行。李锐打破了过去总认为正根才合理的局限性，明确提出了负根，而且在我国数学史上第一次有了重根概念。《开方说》卷下还补充了很多命题，使方程论形成一门比较完整的学科。《开方说》体现的思想是先进的，从某种意义上说，已经接近了代数基本定理的初步思想。

无穷小分析引论 瑞士数学家欧拉(1707—1783)著。这是一部划时代的代表作，也是世界上第一部完整系统的分析引论。它首先突出函数概念，并把它作为分析学的基础。在这部著作中，欧拉定义了多元函数、区分了显函数和隐函数、单值与多值函数，这对加深函数意义的认识具有很重要的作用。这一著作也最终确立了具有广泛理论意义和实用价值的三角学。它定义了三角函数，认为三角函数是一种函数线与圆半径的比值。如图，



$\sin\alpha=\dfrac{MP}{OP}$，$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}$，$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{MP}{OM}$等。令半径为单位长，则所有六个三角函数又可大为简化。上述定义使三角学从静态地只是研究三角形解法的狭隘天地中解放出来，从而去反映现实世界中一切可用三角函数反映的运动或变化关系。《无穷小分析》使用了三角函数的符号，也就是三角函数的现代形式。《无穷小分析》引进了弧度制，大大简化了三角公式和计算。欧拉在书中还发现了著名的欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，把三角函数同指数函数联系起来。

五经算术 北周甄鸾编或注。算经十书之一。《五经算术》二卷对于《尚书》、《诗经》、《周易》、《周官》、《礼记》、《论语》等经籍，有需要数学知识或计算技能的地方均作了详细的注解。此书有助于我们了解古代经典，但是有些问题的数学解释，比如他用勾股定理去解释《周官·考工记》车盖法；用等比级数去解释《仪礼》丧服经带法；用六种四分历中的周历去解释《左传》中有很多有关历日的记录等，对于数学毫无贡献，对于经学是否有益也值得探讨。

五曹算经 北周甄鸾编或注。算经十书之一。《五曹算经》是一部为地方行政人员所写的应用算术书。全书分田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹等五卷，书中算术问题都较切合当时实际，分别叙述计算各种形状田亩面积、军队给养、粟米互换、租税和仓储容积、户调的丝帛和物品交易等问

题。书中的解题方法都很浅近。在田地面积量法中，除长方形、三角形、梯形、圆、圆环的面积公式和《九章算术》章各术相同外，有很多很不准确的面积公式。《五曹算经》中有两个数学问题的解法对于十进小数的概念有了新的发展，这是中国数学史应予以重视的事件。

历学会通　清朝数学家薛风祚根据波兰传教士穆尼阁所传授的科学知识编成。《历学会通》分正集、续集、外集三部分，内容十分庞杂，主要是介绍天文学，同时包括数学、医药学、物理学、水利、火器等。“会通”，是中、西法融会贯通之意。《历学会通》中的数学著作主要有《比例对数表》一卷、《比例四线新表》一卷、《三角算法》一卷。其中《比例对数表》序称“今有对数表，则省乘除，而况开方、立方、三、四、五方等法，皆比原法功十省六七，且无舛错之患”。《比例四线新表》是正弦、余弦、正切、余切四线的对数表。《三角算法》介绍的是平面三角法和球面三角法。由于该书是为天文学需要而写，故不同于一般三角教科书，缺少图文兼备的论证。

分析引论　瑞士数学家欧拉（1707—1783）著。此书出现了现代形式下的解析几何的系统叙述，因此《分析引论》被认为是现代意义下第一本解析几何教程。在此书中，欧拉还给出了空间坐标变换公式和曲面的六种标准形式——锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶曲面、双曲抛物面以及抛物柱面。

分析教程　法国数学家、力学家柯西(1789—1857)的名著之一，其余的两部分别为《无穷小计算讲义》和《无穷小计算在几何中的应用》。柯西的这三大名著在数学史上具有划时代的意义。《分析教程》给出了一系列分析学基本概念的严格定义，包括极限、连续、导数、微分、积分以及无穷级数的和等概念。其中柯西提出极限的ε（后改成δ）描述方法，使极限概念算术化。书中柯西还第一次把定积分作为分析学的基本概念，并且给出连续函数定积分存在的第一次分析证明。沿用至今的两种广义积分也是此书给出精确定义的。柯西的上述著作使柯西成为将数学分析建立在极限理论上的第一个人。

分析概率论　法国数学家拉普拉斯(1749—1827)著。《分析概率论》总结了前人，特别是拉普拉斯本人四十多年在概率论方面的研究成果，并予以严密而又系统的表述，是一部继往开来的作品。它明确表达了概率论的基本定义和定理，成功证明了中心极限定理的某种形式（棣美弗——拉普拉斯定理），建立了观测误差理论和最小二乘法，研究了广泛的统计问题，有效地发展了概率论在实际问题中的一系列重大应用。《分析概率论》的重要性还表现在它对于数学分析方法的自由而广泛的应用上。由于拉普拉斯实行了方法上的革命，使概率论从“组合”数学的一部分，而变成了分析数学的一部分，使概率论有了实质性的进展。

分析方法入门　法国数学家韦达（1540—1603）著。这是一部关于符号代数的最早著作。在韦达之前虽然

有不少数学家曾用字母代表特定的数，但他们只是偶然用到，韦达是第一个有意识地、系统地使用字母的人。书中，不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂，而且用来表示一般的系数。书中还确定了代数与算术的分界，并预言未来将出现一种运用符号的关于量的演绎科学。

计算纲要 印度数学家马哈维拉（九世纪）著。该书为九卷本巨著，较全面地反映了当时印度数学各方面的成就和水平。该书包括术语、算术运算、分数法、面积和土方计算等内容。其突出贡献是发现了零的性质："一个数乘以零得零，一个数减去零不改变它的值"；负数的性质："一个负数不是某一个数的平方数，即它不能被开平方；乘法、除法、平方、开方、三次方、三次方根和级数求和的广泛应用；分数运算法则、两数相除可以转化为乘法运算；二次方程的解法；以$\sqrt{10}$代替圆周率π值；以$\frac{81}{20}R^3$表球的体积，并由此推得$\pi=3.036$等等。

四元玉鉴 元朝朱世杰著。三卷，分24门，包括288题。卷前有"今古开方会要之图"5幅和"四象细草假令之图"，讲述了四元术之基本原理，为全书的预备知识。其中"今古开方会要之图"是关于开方的图解法；"四象细草假令之图"是把天元术(一个未知数的代数）一步步地推广到四元术（四个未知数的代数）。《四元玉鉴》主要内容之一是解方程，其中在"假令四草"、"或问歌象"、"两仪合辙"、"左右逢元"、"三才变通"、"四象朝元"等六门中，计有二元的高次联立方程三十六题，三元者十三题，四元者七题。但此书只有解题方法，没有详细演草，因而演算过程不清楚。《四元玉鉴》还把中国宋元数学家在高阶等差级数求和方面的工作向前推进了一步，从《四元玉鉴》中可以看到更为复杂的求和问题，以及对此类问题较前更统一普遍的解法。其中朱世杰得出了一些重要的且与现代公式基本一致的计算公式。

代数学 阿拉伯数学家阿尔、花拉子模（约780—850）著。《代数学》是一本重要的数学著作，有三大部分组成。第一部分主要是初等代数内容。其中系统地讨论了六种类型的一次或二次方程的解法，提出了"还原"和"对消"两种变换，即现在解方程的两种基本变形：移项与合并同类项。第二部分主要解决各种实用算术问题。第三部分则列举了有关继承遗产的各类问题。《代数学》逻辑严密，系统性强。由于明确了解方程的概念，基本上建立了解方程的方法，因而广为流传，并使方程的解法作为代数的基本特征，被长期地保持下来。在十二世纪，《代数学》传到欧洲，它对欧洲数学发展产生了巨大影响。作为其标准数学课本被使用了几个世纪。《代数学》也有明显的不足和倒退：其一，它完全不使用字母、符号；其二，它所列举的问题比较简单，远不及希腊数学家丢番图所著《算术》水平。

印度的计算术 阿拉伯数学家阿尔·花拉子模(约780—850)的另一部重要

的数学著作。它以一份不完整的拉丁文译本手稿流传下来，后意大利数学史家邦孔帕尼于1857年在罗马出版了这份手稿。最后，由数学史家根据上述手稿及有关著作将其复原。《印度的计算术》介绍了印度人利用九个数码和零号记数的方法，即十进位制记数法。讲述了如何用印度数码进行算术，包括整数的四则运算、倍乘与倍除、六十进位分数和普通分数的四则运算、整数和分数的开平方运算等。每种运算法则书中都用例子予以解释，并给出验证的法则。《印度的计算术》是第一部用阿拉伯语在伊斯兰国家介绍印度数码和记数法的数学著作，它问世后，十进位制记数法逐渐在阿拉伯国家普及。它传入欧洲以后，对欧洲数学发展也产生了很大影响。

考工记　战国时期一部齐国人的书。它说明各项手工业产品的规格，提供了不少有关封建社会初期数学知识的资料。《考工记》记载了由于制造各种器具和器具规格的需要而大量使用了分数，特别是有了分数运算。由于在制造各种工具器械、乐器过程中，要用到角的概念，《考工记》中对于角和几种特殊角都有专门名称。其中，把非直角的角叫作“倨句”，“倨”是钝角，“句”是锐角，直角叫作“倨句中矩”，或简称“一矩”。书中还有一些车辆构件角度大小的规定，并且把不同角度的构件取了专门名称，即“车人之事：半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”其角度大小相当于：宣为$\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$；欘为$45^\circ+\frac{1}{2}\times 45^\circ=67^\circ30'$；柯为$67^\circ30'+\frac{1}{2}\times 67^\circ30'=101^\circ15'$；磬折为$101^\circ15'+\frac{1}{2}\times 101^\circ15'=151^\circ52.5'$。《考工记》还记有制造弓的规格，每张弓都成一圆弧形状，使儿张弓合在一起构成圆周，已包含着明确的等分圆周概念。

则古昔斋算学　清朝李善兰整理了自己撰写的下列十二部著作：《方圆阐幽》一卷，《弧矢启秘》二卷，《对数探源》二卷，《四元解》二卷，《麟德历解》三卷，《椭圆正术解》二卷，《椭圆新术》一卷，《椭圆拾遗》三卷，《火器真诀》一卷，《尖锥变法解》一卷，《级数回求》一卷，《垛积比类》四卷，加上他历年积累的数学笔记《天算或问》一卷，于1864年汇刻成《则古昔斋算学》十三种，共二十四卷。其中，《方圆探幽》阐述他自己创造的尖锥求积术，并以求圆面积为例说明尖锥术的应用。《弧矢启秘》阐述三角函数和反三角函数的幂级数展开式。《对数探源》认为对数可以用诸尖锥的合积来表示，对数函数可以用幂级数来展开。《四元解》用李善兰的话讲：“汪君谢城以手抄元朱世杰《四元玉鉴》三卷见示。……深思七昼夜，尽通其法，乃解明之。”《麟德历解》主要阐明唐李淳风“麟德历”术中的二次差内插法。《椭圆正术解》、

《椭圆新术》、《椭圆拾遗》以及《火器真诀》主要研究圆锥曲线。《尖锥变法解》、《级数回求》，以及《垛积比类》主要研究幂级数。

全体实代数数的集合的一个性质 德国数学家康托尔（1845—1918）在1874年发表的一篇论文。这篇论文的出现标志着集合论的诞生。在此文中康托尔提出了研究集合的主要方法——一一对应方法。比较了最基本的两种无穷集合——不可数连续统和可数的有理点集。指出了无穷集合的一个基本性质。证明了如下重要结果：（1）一切代数数是可数的；（2）任何有限线段上的实数是不可数的；（3）超越数是不可数的；（4）一切无穷集并非都是可数的，无穷集同有穷集一样也有数量（基数）上的区别。以后，康托尔在1895—1897年又出版了他的名著《关于超穷混合理论的论证》，进一步发展了集合理论。

论四边形 阿拉伯天文学家、数学家纳西尔丁（1201—1274）著。此书在三角学史上有着特殊重要地位。它不仅使三角学脱离天文学而成为数学的独立分支，而且系统化了平面三角学和球面三角学。从基本概念和比例开始，直到所有类型的问题的解法，非常完整地建立了三角学的系统。其中解斜三角形最困难的一种情形——已知三边求三角，是在这部著作中首次给出的。同时，它还给出怎样用现今的所谓极三角形来解更一般的三角形。这部著作对于三角学在欧洲的发展也有着重要的影响。

论图形的射影性质 法国数学家、力学家庞斯列（1788—1867）著。《论图形的射影性质》是射影几何发展中最重要的著作之一，它奠定了射影几何学的基础。其中，它研究了图形在投影下保持不变的性质，发展了对合与调和点列的理论。庞斯列采用了中心投影，系统地阐述了所谓连续性原理：“如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出，并且后者与前者一样地一般，那么可以立即断言，第一个图形的任何性质，第二个图形也有。”借助于这一原理，考察了在无穷远点消失或变为虚元素的点和线，证明了许多有关的定理，引入了如圆上无穷远点、球上无穷远点等新概念。

论方程的检查与订正 法国数学家韦达（1540—1603）著。此书的出版是方程论发展史中的一个重要的里程碑。韦达也因此而成为代数发展转折时期的一个关键人物。书中，韦达以一般的理论形式、叙述了所有当时所知的一次到四次方程的知识，其中有三次方程和四次方程的解法，还有代数方程根与系数的关系——著名的韦达定理。

孙子算经 作者及年代不详。现传本分上、中、下三卷。从《孙子算经》上卷记录度量衡单位名称来看，传本《孙子算经》有后人改窜和附加之处。《孙子算经》上卷讲的是算筹的摆法及筹算乘除的法则。中卷举例说明筹算分数算法和开平方法。下卷选取几个算术难题。其中有“物不知数”问题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何。”实为一次同余式问

题。此问题在欧洲一直到十九世纪初，才有法国数学家高斯在《算术探究》中给出一般性定理。因此，“物不知数”问题在世界数学史上有一定地位，外国称其为“孙子定理”，或“中国剩余定理”。《孙子算经》内容远不如《九章算术》丰富和深奥，所选的应用问题大都浅近易晓，其中有几个也不是实事求是的。

丽罗娃提　印度数学家、天文学家婆什迦罗（1114—1185？）著。此书同《根的计算》代表了印度自1000—1500年间数学的最高成就。《丽罗娃提》主要讲述算术内容，它汇集了前辈数学家的问题，并填补了其若干不足。《丽罗娃提》共十三章。第1章给出了几个计算表；第2章讲述整数和分数运算，包括计算平方根和立方根，使用了十进制记数法；第3章介绍算术中的反演法、试位法等技巧；第5章给出某些算术级数求和法；第6—11章讲述几何学，主要是面积和体积的计算和可以化成一次方程的实际问题；第12章为不定方程；第13章涉及了组合学的内容。《丽罗娃提》及《根的计算》的数学成就为印度在世界数学史上挣得了一席之地。

张邱建算经　南北朝时期北魏张邱建所著。算经十书之一。传本《张邱建算经》三卷是依据南宋刻本辗转翻印的。卷中少最后几页，失传的算题不知多少，卷下缺少最前二页，估计少两三个题。现传本有九十二题，内容广泛切合实际，有关测量、纺织、交换、纳税、冶炼、土木工程、利息等方面的计算问题都有。《张邱建算经》中有几个等差级数问题，它对级数的研究是一个很大进步。《张邱建算经》有不少问题与《九章算术》盈不足章问题类型相同。张邱建分别提出直接解答的方法，其中几题则归结为“以盈不足术求之，亦得。”他重视算术问题的具体分析，因而提高了解题的技术，在数学发展过程中也是进步的。《张邱建算经》还研究了二次方程问题和不定方程问题。

直指算法统宗　元朝程大位著。全书十七卷。书中五百九十五个数学题中的大部分是从传本数学书中摘录的，但解题时必需的数字计算工作都在珠算盘里演算，和用筹算计算有所不同。《直指算法统宗》卷一、卷二的主要内容是数学名词与词汇的解释，大数、小数和度量衡单位，珠算口诀，并说明在珠算盘上的用法。卷三至卷十二为应用问题解法的汇编，各章以九章章名为标题，个别名称有所变更，如“盈不足”改为“盈朒”等。卷十三至卷十六为难题汇编。所谓“难题”的解法都很简单，只是题目用诗歌形式表达，其意比较隐晦罢了。卷十七为“奇法”，指不能归于前面几卷的各种算法。《直指算法统宗》的最后附录“算经源流”，著录了北宋元丰七年（1084年）以来的刻本数学书籍五十一种，但现有传本的仅十五种。程大位广取各家算法精华的同时，书中也接受了一些错误观点和部分错误公式。尽管如此，《直接算法统宗》仍是明末一部比较完备的应用算术书，它流传广泛、久长，在国内外影响之大，在中国数学史上是罕见的。

周髀算经　西汉或更早时期的天文历

算著作。原名《周髀》。唐朝李淳风等人选定数学课本时，将其列为“十部算经”的第一部，作为国子监学习和考试用书，并取名为《周髀算经》。《周髀算经》全书共分上下两卷，主要阐明当时一种盖天说（一种宇宙结构学说）和四分历法。书中有关数学的论述在卷上之一、之二，其余部分是天文和历法。《周髀算经》数学方面的成就主要表现在以下三个方面：（1）使用了相当繁复的分数算法和开平方法。书中关于等差数列的记载和圆周长求法也是很有价值的内容。（2）《周髀算经》中有关测绘的内容也很多。书中有荣方与陈子的一段问答，陈子提出了测量太阳距离的方法，后称“重差术”，是测量学的先声。（3）在现存的文献中，《周髀算经》是最早引用勾股定理的著作。书中记述了约在公元前1100年时周公与商高的一段对话，举出了一个“勾三股四弦五”的办法来构造直角三角形。唐、宋年间，《周髀算经》就一直受到重视，曾以多种版本出版。

试图处理圆锥与平面相交情况初稿　法国数学家德扎格（1591—1661）著。此书1639年在巴黎出版，由于不被理解，竟被忘却甚至遗失，直到1845年沙勒偶然发现此书的手抄本，方才引起人们的普遍重视。该书引入了无穷元素，导入了无穷远点、无穷远线，将直线看成具有无穷大半径的圆，而切线则是割线的极限。书中还讨论了极点、极线、透视、透射，从而奠定了射影几何的坚实基础。作者给出的后以他名字命名的德扎格定理是全部射影几何的基本定理。该书被列为近世纯粹几何初期发展的经典著作。

视学　清朝年希尧所著。《视学》是世界上第一部系统的画法几何著作，其内容丰富，水平很高，插图也很精致。此书较法国数学家蒙日（1746—1818）于1799年出版的《画法几何学》一书还要早七十年。《视学》中的图形分为两类，一类是直观图（立体图），一类是平面图。直观图在画法原理上又有两种，即轴测图和透视图。《视学》清楚地讲述了透视原理，并根据透视原理采用多种画法，如量点法、双量点法、截距法和仰望法，绘制了许多精美的透视立体图。《视学》中平面图及其画法也是书中极有价值的内容，虽尚有不足，但它和现代工程制图原理完全一致。

垛积比类　清朝李善兰著。共四卷。《垛积比类》是研究各种垛积的专著。其研究方法和内容都属于现代所谓组合数学的范围，是一部现代组合数学出现前的杰作。此书约四万五千字，图、表、法俱全，结构严谨，条理清楚。每一卷可分四部分：（1）“表”和“造表法”：全书共有15张垛积表，其中包括6张基本垛表，7张支垛表和2张系数表，每张表下有“造表法”。（2）“解”和“草”：具有定义、推导和演草的性质。（3）“有高（层）求积术”：全书的中心有各种求n项和公式124个，其中包括一批重要定理。（4）“有积求高（层）术”：这是第3部分的逆问题，主要是一些方程，有的高达10次，最大系数10!。此书所有定理结果无误，但只有归纳和推导，无严格

证明。“《垛积比类》卷一肯定并推广了朱世杰的三角垛求和公式，得三角垛 $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{P!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1) = \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$，① $(m-1)$ 乘支垛 $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)(mr+p-m) = \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(mn+p-m+1)$。②显然①是②的特例。《垛积比类》卷二讨论p为任何正整数，级数 $1+2^p+3^p+\cdots+n^p$ 的求和公式。卷三阐述三角垛 $\Sigma(f_p{}^r)^2$ 的求和公式，并得到了一个中外驰名的三角自乘垛求和公式。《垛积比类》卷四解决了三角变垛 $\Sigma r f_p{}^r$ 也即朱世杰的岚峰形垛的求和问题，还讨论了三角再变垛与三角三变垛的求和公式。

度量论　希腊数学家、测量学家、机械发明家海伦（约62年）著。该书原稿于1896年发现，共三卷。第一卷从矩形、三角形开始，讨论了平面图形和普通立体表面面积，给出了著名的三角形面积公式——海伦公式：$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。此处，$A$ 表三角形面积，a、b、c 表三角形三边长，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。为了求得任意四边形的面积，书中采取了将它们分割成长方形和三角形的方法。书中还考察了各种正多边形（边数 $n<12$），直接导出了大部分正多边形与外接圆半径的关系。对于抛物线所围面积的计算也给出了一个近似公式。第二卷讨论了立体图形，包括一些特殊锥、柱体体积的计算。第三卷讨论了平面和立体图形按给定比的分割，其中用到了求立方根的近似公式。书中不仅给出了大量的数值运算，涉及到无理数和分数，而且注意到结论的严密性，从理论上证明了许多公式。

测圆海镜　元朝李冶著。全书十二卷，列有一百七十题，基本上都是依据《识别杂记》列出天元式，以求勾股容圆问题。它为解决设定未知数及布列方程之困难迈出重要的一步。《测圆海镜》有如下方面的贡献：（1）书中用一个文字按其不同位置及系数以表示未知数的各次项，使得由文词代数能顺利地演变成符号代数；（2）书中十进位小数的表示法，与现今十进小数表示法只差一个小数点；（3）书中利用乘法消去分母，使分式化为整式，与现今分式方程解法一致；（4）利用乘方消去根号，与现今无理方程解法一致；（5）创立升位法或降位法解某些特殊方程；（6）对正负整指数幂的理解在某种意义上与现今理解一致；（7）在所列方程的次数上较前有明显增高；（8）所列方程突破了秦九韶“实常为负”的限制；（9）对于筹式的写法给四元术提供了有利条件；（10）书末出现了文词代数式的初步尝试。由于传统数学的局限性，加之限于容圆问题，《测圆海镜》也有诸多不足，但仍不失为我国古代一部数学名著和一部世界珍贵文献。

根的计算 印度数学家、天文学家婆什迦罗（1114—1185？）的另一部数学著作。《根的计算》主要讲述代数内容，共八章。第1章讲述正负数法则；第2、3章研究整系数一次和二次不定方程的解法；第4章讲一元或多元线性方程组；第5章研究二次方程，并给出毕达哥拉斯定理的两个证明；第6章给出了一些线性不定方程组的实例；第7、8章补充了二次不定方程的一些内容。《根的计算》及婆什迦罗的另一部著作《丽罗娃提》为世界数学作出了贡献。

夏侯阳算经 原书已失传无考。据考证其著述的年代可能在《张邱建算经》之前。算经十书之一。现传的《夏侯阳算经》三卷，据考是八世纪的一本实用算术书。现传本引用了《夏侯阳算经》的原文，约六百字，它概括地叙述了筹算乘除法则，分数法则，解释了“法除”、“步除”、“约除”、“开平方除”、“开立方除”五个名词的意义。原《夏侯阳算经》的其他内容现已无法查考了。据分析唐初立于学官的《夏侯阳算经》原本，不幸于北宋初失传。公元1084年（元丰七年）刻算经时，误取这部八世纪中的算术书作为了《夏侯阳算经》。

夏紫笙算书遗稿 清朝数学家夏鸾翔曾著《洞方求图解》二卷、《万象一原》九卷、《少广缒凿》一卷、《致曲术》一卷和《致曲图解》一卷。他去世后由邹伯奇汇编成《夏紫笙算书遗稿》。夏鸾翔是我国首先全面研究二次曲线理论的数学家。《致曲术》和《万象一原》两书都讲到二次曲线。《致曲图解》则是他对二次曲线综合研究成果。《致曲术》解决了不少椭圆积分问题，还解决了一些有关抛物线、对数曲线及各种螺线的计算问题。《万象一原》阐述各种曲线弧长、面积及其旋转面积和所包的体积的计算方法大致与《致曲术》所讨论相同。《致曲图解》分析了各种二次曲线“形虽万殊，理实一致”，他们“源”自圆锥，还把椭圆、抛物线、双曲线看作由圆变化来的。用这种观点对二次曲线进行了详细讨论。夏鸾翔认为各种二次曲线之间可以互相转化。他讨论了二次曲线的心、准线、轴、切线、法线等等，以及它们的某些基本性质，内容比较全面，但也有些说理不清、研究不透之处，因而《致曲图解》是一部瑕瑜互见的著作。

圆周论 阿拉伯数学家、天文学家卡西（？—1429）著。此书被认为是中世纪近似计算的优秀代表作。书中计算了圆内接和外切正 3×2^{28} (805，306，368）边形的周长，从而得到 π 的精确到17位准确数字的值，$\pi=3.14159265358979325$。这是阿拉伯数学中第一次引进了小数概念，也是除中国外世界上第一次使用小数运算的。《圆周论》中给出的圆周率 π 的近似值，打破了我国数学家祖冲之保持几乎一千年之久的圆周率世界记录。

圆锥曲线论 希腊数学家阿波罗尼奥斯（公元前262？—公元前190？）在总结了门奈赫莫斯、阿里斯泰奥斯、欧几里得、阿基米德等诸多数学家在这方面的成果，加上自己的杰出创造写成的。《圆锥曲线论》共分八卷。第

一卷讨论了圆锥曲线的形成，证明三种曲线都可由一对圆锥体截得，并引入了抛物线、双曲线、椭圆的名称，取代了过去的所谓直角圆锥曲线、钝角圆锥曲线和锐角圆锥曲线的叫法。第二卷阐述了双曲线渐近线的作法和性质，说明了如何求圆锥曲线的轴以及有心圆锥曲线的中心，并考察了圆锥曲线的切线问题。第三卷探讨了由弦、渐近线、切线等构成的三角形、矩形、正方形的相等、相似及椭圆和双曲线的焦点问题。第四卷讨论了极点和极线的性质，以及圆锥曲线的相交问题。第五卷详尽地探讨了困难的极大极小问题，研究的主题就是今天称为法线的有关内容。但书中还没有把法线看成是垂直于切线的直线，而是看成从曲线的内点或外点到曲线所能作的最长和最短的线。第六卷阐述了全等圆锥曲线、相似圆锥曲线和圆锥曲线弓形。第七卷讨论共轭直径问题。第八卷现已失传，估计可能是第七卷内容的继续。这部书在阿拉伯和西欧曾长期被视为经典之作，其地位堪与欧几里得《几何原本》在欧氏几何学中的地位相比。

笔算　明末清初梅文鼎的中期著作之一。这是我国第一部笔算数学书，自此笔算才真正在我国生根、开花、结果。《笔算》共五卷，所讲内容都比较浅显，有算术四则、分数、比例、小数和开平方、立方等，都是用笔算。书中内容有一部分取自《同文算指》，也可能有《欧罗巴西镜录》中的某些内容。梅文鼎改变了原来《同文算指》中乘除演算步骤，前者较《同文算指》略繁，后者则比较简捷。《笔算》的卷三为“异乘同除”，详述了四率比例及其应用。卷四“通分”，是小数及分数的四则运算方法。卷五“开方”，分别叙述开平方、开带从平方、开立方法。《笔算》还有两篇附录。其一《方田通法》，为化田地面积方步数为亩数的捷法；其二、《古算器考》，是一篇考证文章。文中说：“今有笔算，遂以珠盘为古。不知古用筹策，故曰“持筹”，其用珠盘起于元末明初，制度简妙，天下习用之而遂忘古法，故为之考”。

爱尔朗根纲领　德国数学家克莱因(1849—1925)1872年在德国纽伦堡以北的爱尔朗根大学任教前，按惯例向爱尔朗根大学的哲学教授会和评议会作专业就职演说。克莱因的这篇题为《近世几何研究的比较评述》的演说，详尽地阐述了“几何学”的定义，实际上是对当时的几何学作了整理分类，并且提出了研究几何学的新的有效途径。这个演说连同其提出的几何学研究大纲被人们称之为“爱尔朗根纲领。”《爱尔朗根纲领》将画法几何，非欧几何、射影几何、黎曼几何等新的几何学的发展作了总结，并用群的观点把几何学统一起来，给出各几何学相应的地位。这种方法，支配着以后许多年的几何研究，并第一次显示群论的非凡作用。以后人们在进一步发展克莱因分类时，发现并非所有的几何学都能纳入克莱因的分类方案之中，如代数几何与微分几何就不能置于其中。克莱因的上述观点不仅为几何学提供了许多可供研究的问题，这个观点已超出数

学之外，带到力学和一般物理学中去了。

益古演段 元朝李冶的另一部数学著作。共三卷，收入六十四道题，大都是各种平面形间的面积关系。解决问题的方法往往是通过“天元术”和“等积变换”（即“演段”）两种。

海岛算经 魏晋时期刘徽著《九章算术注》，其第十卷为《重差》。西汉时期主张盖天说的天文学派有一种测量太阳高、远的方法，当时的数学家称之为“重差术”。唐初选定十部算经时，将《重差》一卷单列，并改称为《海岛算经》，作为算经十书之一。传本《海岛算经》有九个例题，均为利用两次或多次测望所得的数据，来推算远处目的物的高、远、广、深的问题。刘徽将它们分为“重表、累矩、三望、四望”四类，其解法形式有三种，即重表法（立两个等高的杆），累矩法（用两个矩代替“表”），连索法（用绳和表）。《海岛算经》中的第一题使用重表法，第三题使用了累矩法，第四题使用了连索法，其余例题则均可利用上述基本方法所得的结果上转求其他目的的问题。

流数法和无穷级数 反映英国数学家、天文学家、物理学家牛顿(1643—1727）微积分研究成果的一部著作。牛顿对微积分的研究大致可分为三个阶段。第一阶段是静态无穷小量法，主要反映在他的论文《运用无穷多项方程的分析学》中。第二阶段是变量流动生成法，认为变量是由点、线或面的连续运动产生的。因此，他把变量叫做流，变量的变化率叫做流数数。由于概念的一般化和符号化，对微积分基本问题的表述更为一般和清楚了。上述一切内容主要反映在本书中。第三阶段是所谓最初比和最后比的方法，主要反映在《曲线求积术》这篇论文和《自然哲学的数学原理》这部著作中。最初比和最后比的引入不仅表明导数概念已被引出，而且还明确地把导数作为增量之比的极限思想。

球面学 希腊数学家、天文学家门纳劳斯（约100年左右）著。这部著作在三角学的发展中起了重要作用。该书共分三卷，主要论述球面三角学，内容包括球面三角形的基本概念和许多平面三角形定理在球面上推广的结果。第一卷，给出了球面三角形的定义，把它定义为球面上小于半圆的三个大圆弧所构成的图形，而且对球面三角形确立了许多相当于欧几里得对平面三角形所证明的许多命题。此外，还确定了一些在平面上不存在的命题。第二卷讲述了天文学中有兴趣的定理。第三卷给出了一个重要命题——门纳劳斯定理。它在平面上的叙述是：设X、Y、Z各是三角形ABC三条边BC、CA、AB或其延长线上的点，则它们共线的充要条件是$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$。将其推广到球面三角形，以球大圆代替直线，以大圆弧的正弦值代替相应的线段长，得出X、Y、Z三点共大圆弧的充要条件是$\frac{\sin XB}{\sin XC}\cdot\frac{\sin YC}{\sin YA}\cdot\frac{\sin ZA}{\sin ZB}=1$。大量的球面三角命题可以用取特殊三角形和特殊横截线的方法从此定理导出，它的逆命题也成立。

授时历　元世祖忽必烈统一全国后，任命王恂、郭守敬领导天文研究工作，于大都（今北京）建成一座规模宏大的天文台，进行天文观测。在实测基础上，由王恂、郭守敬、杨恭懿等人于1280年集体编写而成。在数学上《授时历》有不少创造性成就。《授时历》反复使用了沈括的“会圆术”，并配合使用了相似三角形各线段间的比例关系，从而在推算“赤道积度”、“赤道内外度”方面创立了一个新的方法。从数学意义上讲来，新的方法相当于开辟了通往球面三角形的途径。经过十——十三世纪而逐渐发展起来的高次方程的数值解法，以及逐渐积累起来关于高阶等差级数求和方面的知识也被运用到《授时历》中。《授时历》还用招差法来推算太阳逐日运行的速度以及它在黄道上的经度，用招差法来推算月球在近地点周内逐日运行的速度。《授时历》改进了黄赤交角，给出了相当于23°32′28″的精确结果；采用了365、2425日为一回归年等。

梦溪笔谈　北宋时期科学家沈括用笔记的形式写成的一部书。该书内容丰富，其中对数学也进行了精深的研究，提出了不少卓越的见解，被誉为“中国科学史的里程碑”。沈括认为所有物体都呈现一定的形状，有形状就有数量。物体的方圆端斜就是形状，能进行乘除运算的是数量。就是说，只有客观物质世界中存在空间形式和数量关系，人们才能在实践中接收到它们发出来的信息，通过思考，加工而认识它们，形成数学概念。说明他对数学已经有了比较正确的认识。进一步他还提出对于数学方法的使用不能生搬硬套，即“见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术”。《梦溪笔谈》中举出的“隙积术”是求二阶等差级数的和的特例，可以说是我国研究高阶等差级数（或数列）的开始，对后来影响很大。《梦溪笔谈》还首次研究了弓形的弦、矢和弧之间的关系，并且求出了计算弧长的近似公式，创立了“会圆术”。“会圆术”在天文学等方面有重要应用。进一步考虑“会圆术”还有更深刻的思想，它是刘徽极限思想的继续。《梦溪笔谈》在其中《棋局都数》的计算中，还使用了指数法则，即同底数的幂相乘，底数不变，指数相加。

梅氏丛书辑要　1761年梅瑴成对其祖父梅文鼎的众多著作进行选择，共选出二十三种六十一卷，编成《梅氏丛书辑要》。此书收数学著作十三种共四十卷，占全书的三分之二。这十三种以著作年代先后次序为：《方程论》六卷（1672年）、《筹算》二卷（1678年）、《平三角举要》五卷、《弧三角举要》五卷(1684年)、《勾股举隅》一卷、《几何通解》一卷、《几何补编》四卷、《少广拾遗》一卷（1692年）、《笔算》五卷（1693年）、《环中黍尺》五卷(1700年）、《堑堵测量》二卷、《方圆幂积说》一卷（1710年），《度算释例》二卷（1717年）。其中，《笔算》五卷，为我国第一部笔算著作。《筹算》二卷，介绍西洋算筹用法，并讨论了开平方、开带从平方、开立方、开带从立方的用筹方法。《方程论》六卷，梅文鼎目出新意，分类举例说

明一次方程组的建立，与互乘对减的原则，令“览者彻底澄清无纤毫之凝滞”。卷四“刊误”还指出了前人算书中错误的论点。《少广拾遗》一卷，依据二项定理系数表说明求高次幂正根的算法，从平方到十二乘方(十三次幂)各举一例用笔算演开方细草。《几何通解》一卷，依据勾股算术证明了《几何原本》卷二至卷六中很多命题。《几何补编》四卷，梅文鼎独立思考四等面体、八等面体、十二等面体、二十等面体的几何性质，并获得计算各体的内切球半径和体积的方法。《几何补编》的卷三还讨论了方灯体与圆灯体，卷四则讨论了“大圆容小圆法。《平面三角举要》和《弧三角举要》是我国最早的平面三角和球面三角著作，书中系统而全面地介绍了三角知识。《堑堵测量》和《环中黍尺》两书对球面三角公式作了补证。后一本书其内容尤为精采，梅文鼎创造性地利用投影原理，把球面三角问题转化为平面问题加以解决。

猜度术　瑞士数学家雅各布、伯努利（1654—1705）著。这本书在他死后的第八年出版。《猜度术》可称为概率论的第一本专著，是组合数学及概率论史的一件大事。书中伯努利获得了许多新结果，发展了不少新方法。例如，他利用无穷级数解决某些赌博中的概率问题；再如，现在一般教科书上所谓“直线上的随机游动问题”，就是由伯努利首创差分方程法彻底解决的。书中伯努利予见了概率的某些社会应用，并对逆概率形成了某些想法。《猜度术》还给出了“大数定律”的表述，这是雅各布·伯努利对概率论的重要贡献。此定理后称“伯努利定理”。它第一次试图在单一的概率值与众多现象的统计度量之间建立演绎关系，成为概率论通向更广泛的应用领域的桥梁。从此概率论也成为一门统一的数学理论。

阐明曲线的无穷小分析　法国数学家洛必达（1661—1704）著。这是世界上第一本系统的微分学教科书。书中由一组定义和公理出发，对变量、无穷小量、切线、微分等概念作了系统阐述。该书第九章还记载了约翰·伯努利两年前告诉洛必达的一个著名定理，即求一个分数当分子、分母都趋于零时的极限的法则，以后称之为洛必达法则，一直沿用至今。

婆罗摩修正体系　印度天文学家、数学家婆罗摩笈多(598—665以后)著。这是一部天文学著作，共21章。其中的第12章“算术讲义”、第18章“不定方程讲义”，讲的是数学。“算术讲义”一章，主要研究三角形、四边形、包括零和负数的算术运算规则、二次方程等。“不定方程讲义”一章，主要研究不定方程。婆罗摩笈多的著作大约在公元766年被带到巴格达，并被译成阿拉伯文的，它对当时阿拉伯的天文学、数学产生了一定影响。

续畴人传　《畴人传》1799年编成。因过去的数学家有所遗漏，当今的数学家去世，对其有“补遗”和“续补”的必要。罗士琳完成了这项工作。他于1840年写成了《续畴人传》六卷，附于原书四十六卷之后。“补遗”二卷12人，附见5人；“续补”四卷20人，附见7人。罗士琳的续传材料翔

实，并有自己的见解，比《畴人传》更富有时代精神。1886年，诸可宝又撰《畴人传三编》七卷。前二卷补从清初到公元1840年已故的畴人30名，附见22人。中四卷续记公元1840年后已故的畴人31名，附见27人。最后一卷记女性3人，附录外国人11名，附见5人。1898年黄锺骏又撰《畴人传四编》十一卷，以补阮元、罗士琳、诸可宝三书遗漏。事实上，《四编》所录“后续补遗”二百七十余人，或原无著作，或所著书早已失传，内容无从考查，因而无法写出中肯的评论。

缀术　南北朝时期祖冲之、祖暅著。算经十书之一。《缀术》原书已失传。虽无法确切知道其具体内容，但据以后的古书记载可知，它是在《九章算术》及刘徽注的基础上完成的数学杰作。《缀术》和《九章算术》等传统算书一样，是一部数学问题集。其问题解法比较深奥，唐朝的算学学生要化费四年的工夫去研究它。《缀术》的内容可能包括圆周率的精密计算、球体积的解决以及三次方程的解法等。

董立方遗书　清朝数学家董祐诚主要从事幂级数的研究，先后完成《割圆连比例图解》三卷，《椭圆求周术》、《斜弧三边求角补术》、《堆垛求积术》各一卷等数学著作。他去世后其兄董基诚将遗稿加以整理，刻成《董立方遗书》出版。董祐诚也是从一群成连比例的几何线段入手研究三角函数的级数展开式。他探求全弧通弦与分弧通弦的关系，同时找出全弧之矢与分弧之矢的关系，通过较为复杂的计算他找到了四个幂级数，他称之为“立法之原”。并推出了所谓“杜氏九术”。董祐诚在计算中已经有一种明显的微积分思想，尽管他所得到的结果同明安图一致，但其认识要比明安图深刻。

畴人传　清朝阮元主编，李锐、周治平参与编纂，1799年编成。共四十六卷。《畴人传》以人为纲，用传记体载写出各时期天文学家和数学家的生平事迹，及他们在科学研究中的成就。《畴人传》记录从黄帝时期到嘉庆四年已故的天文学家和数学家二百七十余人，其中有数学著作传世的不足50人。又附录明末以来传入的天文数学书中牵涉到的41名外国人。《畴人传》对于推动科学研究空气有积极的意义。但由于对科学知识的发展规律不能准确的认识，过分夸大了古人在天文、数学方面的成就。

割圆密率捷法　我国蒙古族杰出的科学家明安图三十年勤奋钻研写成了《割圆密率捷法》初稿，病危时嘱其学生陈际新定稿，后由陈际新及明安图之子明新于1774年整理成书。共四卷。《割圆密率捷法》是我国十八世纪优秀的数学著作之一，对我国的数学发展产生过积极影响。《割圆密率捷法》给出了九个幂级数，前三个是由杜德美传入中国的，明安图不仅证明了这三个，而且又发现并证明了六个，其名称分别为“弧背求通弦”、“弧背求矢”、“通弦求弧背”、“正弦求弧背”、“正矢求弧背”、“矢求弧背”。这些幂级数不仅在我国数学史上是崭新的东西，有的也是世界上的最早成果。上述幂级数的证

明，如果用微积分极易证明，但当时微积分未传入中国，明安图只得“自立一法，以观其异同。”他采用了两条途径，一是利用三角公式变换使计算简化；二是通过等分弧和割圆连比例法，把弦与弧联系起来，使曲、直互变。这后一种途径特别重要，足以说明明安图是我国变量数学的先驱。尽管他的思想晚于西方几十年，但他独树一帜，把我国已经落后的数学向前推进一步。

缉古算经　唐朝王孝通著。算经十书之一。隋朝统一中国后，展开了筑长城、开运河等大规模的工程建设，对于数学知识和计算技能有了更高的要求，《缉古算经》就在这种社会条件下产生。《缉古算经》共包括二十道题，大体可分四类：第一类天文问题，只有一题；第二类是土木工程中的数学问题，有六题；第三类是地窖和仓库的容积问题，有七题；第四类是勾股问题，有六题。每题都有答案和解题步骤，并有自注。本书是我国古代解数学三次方程现存的最古著作，它介绍了开带从立方法（求三次方程的正根）解决上述问题，先于世界各国对此问题的研究。因而，王孝通的三次方程研究是有世界意义的。《缉古算经》书前有一篇《上缉古算经表》，反映了王孝通的数学观点。他认为数学“重句聊用测海，寸木可以量天”，用处很大。他还把数学看作“其理幽而微，其形秘而约”的学问。空间形式和数量关系乃是一种“宇宙之至精”，从而把数量关系神秘化了。王孝通治学严谨，《缉古算经》很少发现错误。《缉古算径》写成以后，引起了当时人们的广泛重视，后此书又传到日本等亚洲国家。

解析函数论　法国数学家、力学家、天文学家拉格朗日(1736—1813)著。此书连同他的另一部书《函数计算讲义》,被誉为两大分析巨著。在拉格朗日时代，虽然微积分理论获得了广泛的应用，但其基础部分却由于缺乏严密性而陷入极大困难。一些知名数学家如莱布尼茨、欧拉、牛顿等为此所作的努力都不能令人满意。拉格朗日在《解析函数论》一书中为重建微积分的基础而作了尝试。他指出：“不用无穷小、或正在消失的量或极限与流数等概念，而归结为有限量的代数分析艺术。”他打算先用代数方法证明泰勒展开式，接着定义导数（微商）是$f(x+h)$的泰勒展开式中h的系数，然后建立起全部的分析学。拉格朗日认为这样可以克服极限理论的困难，可并没有成功，但他对函数的抽象处理可说是柯西、黎曼、外尔斯特拉斯等的函数论的起点。后一部著作《函数计算讲义》，原是为《解析函数论》所作的评注和补充，其中舍弃了一些旧的微分符号，而采用了一些如用f'表一阶函数微分，f''表二阶函数微分等新符号。

数论史　美国数学家迪克森（1874—1954）著。该书对数论史作了详尽地研究，包含了丰富的史料。《数论史》共分三卷。第一卷为可除性与素数性质；第二卷为丢番图分析；第三卷为二次与高次型。这是一部研究数论史必备的参考书。

数学史　法国数学家蒙蒂克拉(1725—1799)著。这是当时一部全面

阐述数学历史的专著。初版时为2卷本，后经40年修订充实，1799—1807年扩为4卷。可惜三、四卷未出齐，蒙蒂克拉就去世了，由他的童年好友拉朗德(1732—1807)完成。本书内容不仅包括古老分支和最新学科的成果，且有许多作者本人的见解和论述。他将数学分为纯粹抽象的部分和其它混合的部分，对一切能用数学方法进行处理的领域如力学、天文学、光学、音乐等都做了介绍。《数学史》实际上也是十八世纪以前的科学史，该书出版后的一百年中一直被奉为数学史及科学史的经典。

数书九章　南宋秦九韶于1247年完成的一部重要数学著作。全书共十八卷，八十一道应用数学题，按应用分为九大类，每类包括九道题。每一大类的题目和基本内容如下：一、大衍类，一次同余式问题；二、天时类，天文历法和气象中的数学问题；三、田域类，各种田亩的面积计算问题；四、测望类，几何测量问题；五、赋役类，各种赋税的计算问题；六、钱谷类，征购粮食和仓库等数学问题；七、营建类，土木建筑工程中的数学问题；八、军旅类，军营、阵形的布置和军需供应等数学问题；九、市物类，商业方面的交易和利息的计算问题。书中每题之后都有答案，答案后有“术”和“草”。“术”是原理和解题的详细步骤。“草”是算草，非常详细，几乎全部过程都有。《数书九章》中的许多问题是根据当时社会需要提出来的。比如当时南宋与北方民族之间战事不断，军旅类问题就是为了解决战争中的一些问题而提出的。《数书九章》中有许多比较复杂的问题。如九卷“赋役类”中的第一题“复邑修赋”，答案就有180个；十三卷“营建类”中的“计定筑城”一题，已知数据多达88条。《数书九章》还保存着其它一些非常有价值的科学史料。如“天时类”的“天池测雨”、“圆罂测雨”和“竹器验雪”等三题，就有量雨器、量雪器问题，这是有关量雨器最早的明确记载。再如“营建类”的“计作清台”题有一幅珍贵的“清台图”，是我国现存最古的天文台图。

数术记遗　《数术记遗》卷首题“汉徐岳撰，北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注”。但据著名数学史家钱宝琮考证，本书不是徐岳的原作，而是甄鸾的依托伪造而自己注释的书。书中主要内容是大数进位和记数法。《数术记遗》把古代“隶首造数”说进一步演变成所谓“隶首注术，乃有多种”，“黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉”。所谓“十等”是指亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载十个大数名称。所谓“三等”是指大数三种进位制。这些进位制都有循环的特性，由低一级进到高一级，只要变更一下特定的数名就可以通过循环达到进位的目的。《数术记遗》还有“积算”、“太乙”、“两仪”、“三才”、“五行”、“八卦”、“九宫”、“运筹”、“了知”、“成数”、“把头”、“龟算”、“珠算”和“计数”十四种算法。这些算法大都不见他书，虽有简单说明，但其内容仍难确定。其中“珠算”一词第一次在书中出现，据分析它与后世的珠算

有相似之处。

数学之钥　英国数学家奥特雷德(1575—1660)著。此书重视数学符号的运用，采取简乘法和简除法阐明了符号“＋”和“－”的两种用途之差别。书中还用了大量数学符号表示数量、幂次以及算术、代数的基本运算。如用“ㄈ”、“ㄈ”分别表示大于和小于，用“∽”表示差，用“∷”表示比例等。在“数学之钥”的后一版里，奥特雷德还用$\frac{\pi}{\delta}$表圆周率，将小数0.24写成0/24等。著名科学家牛顿曾给予此书很高的评价。此书在英国和欧洲大陆产生了很大影响。

数学汇编　希腊数学家帕波斯（约300年前后）著。这是一部研究希腊数学并附有现存定理和证明的历史批注、改进和增减的综合性文献。它搜集了希腊古代和亚历山大时期的著名学者的著述，也包括帕波斯自己的改进和创作。《数学汇编》共八卷，其中一、二两卷已失传。第三卷讲述比例、内接立体和倍立方等。第四卷研究螺线和其它高级平面曲线，如割圆曲线等。第五卷讲极大和等周形。这其中记载了前人关于定周问题的几个重要定理，帕波斯还增加了新的著名定理：“在周长相等的所有弓形中，半圆的面积最大”，“表面积相同的圆锥、圆柱、正多面体及球体中，球的体积最大”等。第五卷还给出了一个有趣且在后来被不断研究的问题，即证明了蜜蜂的六棱柱的巢是条件相同时容积最大，而用料最经济的结构。第六卷讨论了球。第七卷在数学史上特别有价值，内容讲分析及其在希腊的历史，其中载有不少重要命题。比如，篇首讨论了一个动点的轨迹，1637年笛卡尔提出的坐标方法，正是通过这个问题来表达的；再如后来成为射影几何中的基本定理也在此卷中；还有帕波斯定理（后也称其为古尔丁定理）以及圆锥曲线的一个重要性质等。第八卷则主要讨论力学问题。

数学论集　希腊数学家、天文学家托勒密（约100—约170）著。这本书集古代天文学之大成，故后来改名为《天文集》。书中包含了系统的三角学理论，是后来西方三角学的一个重要来源。《数学论集》共十三卷。第一卷给出了一些初级天文学资料，采用了60进制列出从0°到90°间隔半度的弦表——相当于从0°到90°间隔$\frac{1}{4}^{\circ}$的正弦函数表。并且引入著名的托勒密定理：圆内接四边形对角线的乘积等于两组对边乘积之和，扼要解释从托勒密定理推导弦表的方法。第2卷讲述与地球的球面性有关的现象。第3、4卷用本轮解释地心学说。第4卷中还有测量学中三点问题的解：确定一点，使得这一点与给定的三个点中每两点的连线所成之角分别为给定的角。第6卷讲述日、月蚀的理论。第7、8卷是1028个恒星的目录。其余9—13卷则是研究行星的。

数学原理　英国数学家罗素（1872—1970）与怀特海(1861—1947)合著。《数学原理》共三卷，分别于1901年、1912年和1913年出版。这部著作是二十世纪初数理逻辑最重要的成

就。其目的在于把整个数学详细地归结为逻辑，它在数理逻辑发展史上有着划时代的意义。书中包括了罗素与怀特海在数理逻辑和数学基础方面的主要研究成果。其中包括一个完全的命题演算和谓词演算系统，一个完全的关系逻辑和抽象的关系理论、摹状词理论和类型论。书中提出的各种问题以及它所使用的符号公式、推理法则，对后来的数理逻辑研究有深远的影响。

数学基础　二十世纪30年代法国一些数学家自发地成立了一个学术组织，名为布尔巴基（十九世纪一个法国将军的名字）。他们每年聚会多次，探讨数学发展动向，在广泛深入地研究现代数学本质的基础上，形成了自已独特的数学结构观点，受到国际数学界的瞩目,对现代数学发展影响极大。《数学基础》就是他们几十年来辛勤劳动、密切合作的产物。这套书从1939年至今已出版了近四十卷。布尔巴基的著作坚持严格的公理化原则，并使用新颖独特的名词术语。他们的理论体系以集合论为基础，后依次是代数学、一般拓扑学、实变函数论、拓扑向量空间和积分论等。此外还有李群和李代数、交换代数、微分流形等专题。这套书出版以后，被译成多种文字，对推动数学发展具有重要意义。除此而外，他们还撰写了几百篇文章，综述当代数学各个领域的重大成果。

数理精蕴　清康熙皇帝接受了陈厚耀“请定步算诸书以惠天下”的建议，并赐与梅瑴成举人头衔，会同陈厚耀、何国宗、明安图等同修算法。康熙六十年完成《历象考成》四十二卷，《律吕正义》五卷，《数理精蕴》五十三卷，合称《律历渊源》一百卷。《数理精蕴》是其中一部较好的大型初等数学百科全书，在中国数学史上它占有重要地位。《数理精蕴》上编五卷“立纲明体”，下编四十卷“分条致用”，表四种八卷。其主要内容是介绍自十七世纪以来传入我国的西方数学。书中也举有中国古代数学书中的应用问题，并依据新法给出解答。只在第一卷中叙述了“数理本源”和“周髀经解”两节，借以说明中国古代数学的本源和悠久历史。《数理精蕴》上编卷二、卷三、卷四为《几何原本》。卷五为《算法原本》。《数理精蕴》下编卷一至卷三十为实用算术。卷十、十一、二十四和卷三十到三十六为代数内容，主要讲垛积公式、线性方程组解法和高次方程解法。其中卷十一“带纵平方”和卷二十四“带纵较数立方”、“带纵和数立方”是二次方程和三次方程近似根求法，很有价值，其求解过程中已经用到和导数相同的结果。卷三十至卷三十六“借根方比例”,介绍当时传入中国的代数学知识。其中的卷三十四至卷三十六为借根方比例的应用问题解法。卷三十八介绍“对数比例”，给出了对数概念，以及“真数”和“假数”（即对数）之间的三种关系和两个性质，说明了三种造对数表的原理和方法。此外，还有三角表和三角对数表。《数理精蕴》的几何与三角内容除集中在上编的卷二到卷四外，下编的卷十二至卷二十九也都是有关初等几何与三角内容。其

中，卷十二、十三讲勾股定理及其各种应用。卷十四讲三角形及其性质。卷十五讲圆内接与外切正 2×2^n 和 3×2^n 边形，其正多边形周长和圆周率计算。卷十六讲“割圆八线”概念及“六宗三要”、“理分中末比”等。卷十七、十八讨论平面三角问题以及测量和平面三角的应用。卷十九至卷二十二讨论直线形与圆形的面积问题，以及各正多边形内切圆径与外接圆径的关系问题，其中包括椭圆面积的计算。卷二十三至卷二十九讨论立体几何问题。《数理精蕴》下编卷三十九、四十为比例规解。基本采自《崇祯历书》中罗雅谷《比例规解》一书。略不同的是后者详尽介绍了画日晷法与假数尺。假数尺即西方计算尺，这也是我国最早关于计算尺的记载。

算术　古希腊数学家丢番图（250—275前后）著。《算术》是世界最早的系统数学著作之一。共十三卷，现存仅前六卷。《算术》主要讲数的理论，大部分内容可归入代数范围，它包括189个问题的叙述及解法。本书中，丢番图第一次系统地提出代数符号，在西方数学史上也是第一次引入了“负数”概念。丢番图从具体问题出发，导出多种类型的不定方程，然后详尽地列举了它们的解法，建立了不定方程的理论。书中创造出高达六阶和多达十个未知数的不定方程和不定方程组，给出了二元一次不定方程的一般解，求得了所谓毕达哥拉斯方程 $a^2+b^2=c^2$ 全部解的表达式。在解不定方程中应用了很高的技巧，使用了消元法、降阶法、倒退法，甚至极限法等重要方法。丢番图是当时解代数方程的大师，他的墓志铭本身就是一个妙趣横生的一元一次方程：“过路人！这儿埋葬着丢番图。他的童年占一生的 $\frac{1}{6}$；过了 $\frac{1}{12}$ 以后他开始长胡须；再过 $\frac{1}{7}$ 以后结了婚，婚后5年得子。可惜儿子只活到父亲年龄的一半，丧子4年之后老人也度完了风烛残年。”容易得出丢番图活了84岁。由于《算术》中没有给出一般性的方法，加上放弃了对于数这个基本概念的探讨，致使此书对有关问题的研究未能进一步深入。尽管如此，《算术》一书仍对后来的阿拉伯数学、文艺复兴时期的意大利数学，乃至整个欧洲数学产生了巨大影响。

算盘书　意大利数学家斐波那契（约1170—1250）根据对阿拉伯与希腊有关资料编译的。被认为是中世纪欧洲人所写的最重要的数学著作。作为学校标准课本，长期使用达二百多年。《算盘书》共十五章。1—7章讲十进制的整数及分数的计算。8—11章主要讲各种适合商业计算的有关比例、利盈及算术级数和几何级数求和问题。12—13章为求一次方程的整数解问题。14章是求平方根与立方根的法则。15章是几何度量和代数问题。《算盘书》的最大作用之一是向欧洲介绍使用印度——阿拉伯数码的计算方法。《算盘书》中还载有一个有趣的问题：由一对兔子开始，其中每对大兔每月能生产一对小兔，而每对小兔生长两个月就成大兔，一年后可以繁殖成多少对兔子？这个问题导致

了著名的斐波那契级数：1，1，2，3，5，8，13，……。这个级数的特征是：$u_1 = u_2 = 1$，$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$（$n \geqslant 3$）。其通项为：$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。一个正整数数列，其通项却要用无理数$\sqrt{5}$表达。斐波那契级数有许多重要性质及应用，在十八世纪创立的循环级数理论中，斐波那契级数成了主要内容，至今仍有人在研究、探索。美国现有《斐波那契季刊》，专门刊登这方面的成果。

算术入门　古希腊数学家尼科马霍斯（公元100年左右）所著。这是数学史上第一本独立于几何学系统的算术书，也是第一本数学典籍。《算术入门》共分二卷。在论述了数学对哲学的重要性以后，它总结了早期毕达哥拉斯关于数论的论述，也提出了一些新的理论。如它定义了许多数；给出了类似于现代形式的九九表；还发现奇数组成的集合1，3，5，7，11，……有下列关系：$1 = 1^3$，$3+5 = 2^3$，$7+9+11 = 3^3$，……等。《算术入门》研究了整数与整数的比，并把各种比和比例加以分类和命名。《算术入门》讨论了关于奇偶性的划分，给出了定理：任何整数都等于其前后两数之和的一半，并给出了偶数的分类和奇数的分类。它还介绍了寻求质数的主要方法——厄拉多塞筛法，后称质数定理。《算术入门》的多数主题与《几何原本》有关数论的部分相同。但在此书中没有采用演绎结构，数代表对象的数量，而不是用线段来把它形象化。此书的论证水平远不如《几何原本》，但它的内容丰富，叙述清楚，因而在数学发展史上仍占有一定地位，在此后的一千年间一直是一本标准的课本。

算术之钥　阿拉伯数学家、天文学家卡西(?—1429）著。《算术之钥》内容丰富，逻辑严谨，是中世纪数学文献中较优秀的一部初等数学代表作。《算术之钥》共五卷38章。第一卷6章，主要叙述整数四则运算；第二卷12章，主要讲分数四则、开平方、开立方、开高次方；第三卷6章，讲60进制的整数、分数四则、开平方、开立方等；第四卷10章，讲各种面积计算；第五卷4章，讲解方程及一些代数问题。卡西是世界上除中国外第一个应用小数的人。《算术之钥》中还出现了一个二项式定理系数表。此表和中国贾宪的“开方作法本源图”一样，计算表中各数的方法也和贾宪的完全相同。书中还给出了计算n次方根的一个近似公式：$\sqrt[n]{A^n + a} \approx A + \frac{a}{(A+1)^n - A^n}$。

算术研究　德国数学家、物理学家、天文学家高斯(1777—1855)著。《算术研究》总结了高斯对数论研究的成果，奠定了近代数论的基础，不仅是数论方面的划时代著作，也可列为历史上最有代表性的数学著作之一。在它问世后的百多年时间里，这个领域中几乎所有的发现都能追溯到高斯在这部著作中所引出的思想。全书共分六个部分，第一部分专论同余式理论；第二部分研究一次同余式；第三

部分讨论了幂的剩余；第四部分介绍了二次同余式，阐述了二次剩余和二次非剩余，并给出了高斯称为“黄金律”的二次互反律；第五部分讨论了二元二次形理论；第六部分研究的是关于正多边形的作图问题。

算学启蒙 元朝朱世杰著。共三卷，分二十门，包括259题。书前有常用的数表和法则18项，叫作“总括”，为全书之纲。与朱世杰的另一部算书《四元玉鉴》相比，《算学启蒙》比较浅显，但两书互为表里，各有特点，同为我国古代的主要数学著作。《算学启蒙》卷前之“总括”，包括丰富的内容。有“释九数法”（九九口诀），有“九归除”，与后来的珠算口诀差不多，还有许多其它口诀、度量衡换算和进位制。其中的“明正负术”一项讲正负数加减法则，有“同名相乘为正，异名相乘为负”之句，是我国最早的记载。

算术、几何、比和比例集成 意大利数学家帕乔利(1445—1517)著。此书1494年印刷于威尼斯，为最早印刷的数学书之一。书中几乎罗列了当时所有的数学知识，其中包括了理论和实用算术、代数基础、在意大利通用的币值表、重量表、度量表、复式簿记法及欧几里得几何的概述等。材料主要来源于欧几里得、托勒密、博伊西斯、斐波那契等人的著作。它在数学上无多少独特的创见，但却是继斐波那契《算盘书》之后第一本内容全面的数学书。书中采用印度——阿拉伯数码，大量使用符号，对十六世纪欧洲数学发展有重要影响。

墨经 现有传本的《墨子》书五十三篇中有“经上”、“经说上”、“经下”、“经说下”四篇，合称《墨经》。这是中国春秋战国时代一部墨家学派的集体著作。它包括丰富的知识。对光学、力学、逻辑学和几何学等方面的问题都试图从理论上进行探讨。《墨经》试图运用形式逻辑方法定义一些几何概念，如“直，参也”。这是直线定义，“参”就是“三”，用三点共线定义直。再如“方，柱隅四匝也。”这是关于正方形或矩形的定义。尽管上述定义在说法上不太清楚，也没有形成逻辑系统，但仍是非常宝贵的。《墨经》还讨论过分割物体的问题，并承认有无穷大存在。书中写道：“莫不容尺，无穷也”。就是说有这样一种量，用任意长的线段去量它，它都能容纳得下，这显然是一种“无穷大”思想。

衡斋算学 清朝天文学家、数学家汪莱著。《衡斋算学》共有七册，分别写于不同年代。第一册写于1796年，论球面三角形，系统讨论了球面三角形有解的条件。第二册写于1798年，论勾股形，已知勾股相乘积与勾股和常有二解。同年又写第三册，论已知一弧的通弦求五分之一弧的通弦。第四册写于1801年，列举了24个二次方程和72个三次方程的例子，逐个讨论各有几个正根。在讨论中还发现三次方程的根与系数之间的关系：如果x_1、x_2、x_3是三次方程$ax^3-bx^2+cx-d=0$的三个正根，则$x_1+x_2+x_3=\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}$，

$x_1x_2x_3=\frac{d}{a}$。这和著名的韦达定理是一致的。不足的是，在讨论中a、b、c都限为正数。同年，汪莱又讨论了已知一弧的通弦求其三分之一弧的通弦，连同其它文章合为《衡斋算学》第六册。第七册写于1805年，这是汪莱进一步钻研方程论的结果。这里他研究了两个问题，一是阐明如果高次方程可以分解为几个一次方程，那么这几个一次方程的正根就是这高次方程的正根，并举了26个具体例子；二是讨论了三项式方程$x^n-px^m+q=0$（$n>m$都是正整数，p、q都是正数）有无正根的判定定理，这是一项很有意义的工作。

名　题

马尔法蒂问题　在一个已知三角形内画三个圆，每个圆与其他两个圆以及三角形的两边相切。这个著名的问题是意大利数学家马尔法蒂1803年提出并解答的。这个代数——几何解法在其他地方也可以找到，例如，在奥斯瓦尔特的著作中，斯坦纳于1826年提出的马尔法蒂问题的没有证明的纯几何解法也在那里作了叙述和证明。这里仅给出谢尔巴哈发表的十分简洁的解法：（1）作三个角α、β、γ，它们的正弦的平方等于已知三角形的各边（三角形周长的一半是单位长度）。（2）画三个角α、β、γ的总和的一半，$\sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$，及三个新角$\theta=\sigma-\alpha$、$\lambda=\sigma-\beta$、$\mu=\sigma-\gamma$。画出三个角$\theta$、$\lambda$、$\mu$的正弦平方，这些是三角形顶点到三个马尔法蒂圆的切线。画已知角ω的正弦的平方$m=\sin^2\omega$或画一个角ω，使其正弦的平方等于已知线段m的方法：画一个直径$HK=1$的半圆。在HK的K点上画一直线与HK成已知角ω，并从此直线（角的自由边）与半圆的交点L引一条垂直于HK的直线LM，则$HK=m=\sin^2\omega$。反之，假若m已知而求ω，在HK上作$HM=m$，从M点上作HK的垂线，延伸之交半圆于L，并作LK，则$\angle HKL=\omega$。证明：由直角三角形HML得$m=HM=HL\cdot\sin HLM=HL\sin\omega$，并且由直角三角形$HKL$得$HL=HK\cdot\sin\omega=\sin\omega$。所以$m=\sin^2\omega$。

马索洛尼圆规问题　证明任何可用圆规和直尺所作的图均可只用圆规作出。意大利的马索洛尼提出只用圆规（不用直尺）完成几何作图的问题，并在他1797年于帕维阿出版的著作中，以巧妙的方法解答了这个问题。用圆规和直尺作图时，每一个步骤都包含下面三个基本作图法中的一个：（1）找出两条直线的交点；（2）找出一条直线与一个圆的交点；（3）找出两个圆的交点。因此，只需证明单用圆规就可以完成（1）与（2）两种作图法。这里需要说明的是一条直线如果有两点是已知的，这条直线就被认为是确定了的，首先要解两个预备

题。预备题1：画出两个已知线段a和b的和或差，即作将已知线段$PQ=a$延长或缩短$QX=b$的线段，作法是：①以Q为圆心，b为半径画弧，在弧上任取一点H，以P点为圆心，以PH为半径画弧，与前弧交于点H'（实际上H'是H关于PQ的对称点），并令线段HH'为h。②画出梯形$KHH'K'$，其两腰KH和$K'H'$均等于b，其底KK'等于$2h$（K是以Q为圆心h为半径的弧和以H为圆心b为半径的弧的交点，K'是K关于直线PQ的对称点）。设梯形的对角线$KH'=K'H$为d，由于梯形是一个可以内接于一个圆的四边形，根据托勒密定理，可应用下面的方程$d^2=b^2+2h^2$。另一方面，从直角三角形$QK'X$，这里$K'X$为x，便得到$x^2=b^2+h^2$，从这两个等式得到$d^2=x^2+h^2$这样x是斜边为d的直角三角形中一直角边而另一直角边为h，假若求得在直线PQ上的以K为圆心以d和以K'为圆心以d为半径的弧的交点S，则$QS=x$。③画出以K为圆心以x为半径和以K'为圆心x为半径的弧的交点，这就是要求的点X。预备题2：求出与三条已知线段m、n、s成比例的第四条线段x，即作线段$x=\frac{n}{m}\cdot s$。以Z为圆心，分别以m和n为半径画两个同心圆M和N。在圆M中画弦$AB=S$，用圆规在圆N上从A和B点划出任意长度w，交点为H和K，则H和K间的距离便是所求线段x。解了这两个预备题后，再解两个主要问题：①只用圆规求出两条直线AB和CD（每条直线均有两点确定）的交点S；②只用圆规来确定一个已知圆和一条已知直线AB的交点S。解①：关于直线AB作C和D点的对称点C'和D'，那么，所求的交点S也在$C'D'$上。根据射线定理，得到$\frac{CS}{SD}=\frac{CC'}{DD'}$，也就是说，如果令线段$CS$、$CD$、$CC'$、$DD'$分别为$x$，$e$，$c$，$d$，则$\frac{x}{e-x}=\frac{c}{d}$或$x=\frac{c}{c+d}\cdot e$。先画$CH=c+d$（$H$为以$C'$为圆心$d$为半径的圆弧和以$D$为圆心$e$为半径的弧的交点），然后根据预备问题2画出线段$x$。最后，分别以$c$和$e'$为圆心$x$为半径画弧两弧的交点即为所求的交点$S$。解②设已知圆的圆心为$M$，半径为$r$，作点$M$关于直线$AB$的对称点$M'$，在圆上用圆规截取距$M'$为$r$的点，这点即为所求的已知直线与已知圆的交点，如果直线AB恰好通过M点，则根据预备题1将线段AM延长和缩短r，延长或缩短后线段的端点即所求的交点。

五家共井　今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠，丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠，戊六绠不足；如甲一绠，如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何？题中的“绠”，就是汲水用的绳子。原题的意思是“五家共用一口水井，井深比二条甲家绳长还多一条乙家绳长；比三条乙家绳长还多一条丙家绳长，比四条丙家绳长还多一条丁家绳长，比五条丁

家绳长还多一条戊家绳长，比六条戊家绳长还多一条甲家绳长。若每家都得到所差的一条绳长，则刚好能汲到井水，问井深及各家的汲水绳各长多少？”设甲、乙、丙、丁、戊各家的汲水绳长为x、y、z、t、u，井深为w，则根据题意得方程组

$$\begin{cases} 2x+y=w, & (1) \\ 3y+z=w, & (2) \\ 4z+t=w, & (3) \\ 5t+u=w, & (4) \\ 6u+x=w。 & (5) \end{cases}$$

解这个方程组得 $x=\frac{265}{721}w$，$y=\frac{191}{721}w$，$z=\frac{148}{721}w$，$t=\frac{129}{721}w$，$u=\frac{76}{721}w$。原题没有给出其他条件，因此它有无穷多组解，原书答案为$w=721$、$x=265$、$y=191$、$z=148$、$t=129$、$u=76$，这仅是其中的一组解。“五家共井”是世界数学史上最早的不定方程组。

贝韦克的七个7的问题　求下列除式

```
               **7**
****7*) **7*******
        ******
        *****7*
        *******
          *7****
          *7****
          *******
          ****7**
            ******
            ******
                 0
```

中用星号(*)标出的那些数位上的数字。英国数学家贝韦克于1906年发表了这个题目，该题的答案为

```
                      58781
125473) 7375428413
        627365
        1101778
        1003784
          979944
          878311
          1016331
          1003784
            125473
            125473
                 0
```

、

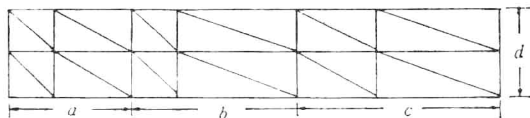
牛顿指数级数　将指数函数e^x变换成各项为x的幂的级数。这个问题的答案是$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$。它是由英国伟大的数学家和物理学家牛顿所发现的。他的包含正弦级数、余弦级数、反正弦级数、对数级数、二项级数以及指数级数的这篇著名论文写于1665年。

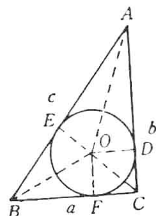
牛顿正弦及余弦级数　不用查表计算已知角的正弦及余弦三角函数。完成所要求运算的最简便的方法就是运用正弦及余弦级数：$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$；$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$。这两个级数最早见于牛顿的论文。

牛顿的草地与母牛问题　牛顿于1707年提出了如下一个有趣的问题：a头母牛将b块地上的牧草在c天内吃完

了；a'头母牛将b'块地上的牧草在c'天内吃完了；a''头母牛将b''块地上的牧草在c''天内吃完了，求出从a到c'' 9个数量之间的关系。假设所有草地提供的牧草数量相同，每块草地每日长草量保持不变，且每头母牛每天吃草量也相同。令每块地上最初的牧草量为M，每块地每日长草量为m，每头牛每天耗草量为Q。第一天晚上，b块地上吃剩牧草量为$bM+bm-aQ$；第二天晚上，b块地上吃剩牧草量为$bM+2bm-2aQ$；第三天晚上，b块地上吃剩牧草量为$bM+3bm-3aQ$；…；依次类推，第c天晚上，b块地上吃剩的牧草量应为$bM+cbm-caQ$。根据题意，在c天内b块地的牧草被吃光，那么这个数值必为0，由此得出$bM+cbm-caQ=0$，① 同理得出$b'M+c'b'm-c'a'Q=0$，② $b''M+c''b''m-c''a''Q=0$。③ 若将它们看做是以M，m，$-Q$为未知数，则根据“线性齐次方程组有非零解的充要条件是其系数行列式等于零”得到所求关系式为
$$\begin{vmatrix} b & bc & ca \\ b' & b'c' & c'a' \\ b'' & b''c'' & c''a'' \end{vmatrix} = 0,$$
即$b''cc'(ab'-ba')+c''b''(bc'a'-b'ca)=c''a''bb'(c'-c)$。

勾股容圆　今有勾八步，股十五步，问勾中容圆，径几何？这是《九章算术》勾股章第16题。其中勾、股都是指直角三角形的直角边，勾中容圆是指直角三角形的内切圆。原书给出了一个求此内切圆直径的一般公式$d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$，其中a、b、c分别表示直角三角形的两直角边和斜边，d是其内切圆的直径。关于这个公式，刘徽在注中用面积给出了证明。他的证法是：连结内切圆心O和三个



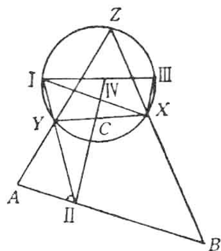


切点D、E、F及三个顶点A、B、C，把直角三角形ABC分割成六块。取同样的四组，拼成一个大矩形，其面积是$2ab$，长是$a+b+c$，宽是d，从而得$(a+b+c)d=2ab$，则$d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$。用这个公式可求得本题的答案；所求直径为六步。刘徽在注里还说勾股容圆的直径d也可以等于$a+b-c$或$\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。这种证明的方法具有中国的特色，主要应用了“出入相补”原理：一个平面图形的面积移置它处，面积不变。又若把图形分割成若干部分，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因为图形移置后

诸面积间的和、差有简单的相等关系，这个出入相补原理在中国古代的几何学中有着广泛的应用。

“世界末日”问题　在世界中心贝拿勒斯（佛教圣地，位于印度北部）的圣庙里，安放着一个黄铜板，板上插着三根宝石针，每根针高约1腕尺（1腕尺大约合50厘米），象韭菜叶那样粗细。梵天（印度教主神）在创造世界的时候，在其中一根针上从下到上串上了由大到小的六十四片金片，这就是所谓梵塔。不论白天黑夜，都有一个值班的僧侣按照梵天不渝的法则，把这些金片在三根针上移来移去：一次只能移一片，并且要求不管在哪根针上，小片永远在大片的上面。当所有六十四片都从梵天创造世界时放的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生都将同归于尽。这是印度一个古老的传说，喜爱数学的历史学家鲍尔把它记了下来。使我们感兴趣的，不是那荒诞的故事，而是其中的数学问题：把这座梵塔全部六十四片金片都移到另一根针上，始终保持上小下大的顺序需要移动多少次？不难发现，按上述规则移动金片的规律是：不管把哪一片移到另一根针上，移动的次数要比移动上面的一片增加一倍。第一片只需1次，第二片2次，第三片2^2次，第四片2^3次，…，第64片2^{63}次，共移动次数为$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=2^{64}-1=18446744073709551615$。假如僧侣们每一秒钟移动一片金片，日夜不停，约需58万亿年才能将六十四片金片全部移到另一根针上。

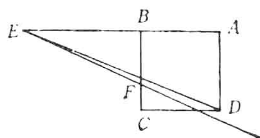
卡斯蒂朗问题　求作已知圆的一个内接三角形，使它的三边分别经过三个已知点。本题由瑞士数学家G·克拉默提出。1776年意大利数学家卡斯朗作出解答后，被命名为卡斯蒂朗问题。卡斯蒂朗原名萨尔维未尼，因其出生地为托斯卡尼的卡斯蒂利恩，因而改名为卡斯蒂朗。卡斯蒂朗问题的虽不容易领会却又简单的解法起源于意大利的基奥达诺。设已知圆为O，已知点为A、B、C，所求的三角形为X、Y、Z，并使YZ，ZX，XY分别过A、B、C三点。奥塔依埃诺在解题中利用了四个辅助点，这些点是：Ⅰ：过X点而平行于AB的弦的端点；Ⅱ：YI和AB两线的交点；Ⅲ：过



X而平行于ⅡC的弦的端点；Ⅳ：CⅢ和IⅡ两线的交点。作图包括下述五个步骤：（1）辅助点Ⅱ的作图法：$\angle A$ⅡI和$\angle XIY$是平行线的内错角，所以相等。$\angle XZY$和$\angle XIY$是同一弧上的圆周角，所以相等，由此$\angle XZY=\angle A$ⅡI。因而BZYⅡ是圆内接四边形，于是AⅡ$\cdot AB=AY\cdot AZ$，设已知圆过A点的切线长为m，则AⅡ$=\frac{m^2}{AB}$，故可作图得

点Ⅲ。（2）辅助点Ⅳ的作图法：$\angle YC$Ⅳ和$\angle YX$Ⅲ是平行线的同位角，所以相等。而$\angle YI$Ⅲ和$\angle YX$Ⅲ是圆内接四边形的对角，所以互补。这样$\angle YI$Ⅲ和$\angle YC$Ⅳ也互补，从而YCⅣI是一个圆的内接四边形，由此得，ⅡC·ⅡⅣ＝ⅡY·ⅡI，设已知圆过Ⅱ点的切线长为n，则ⅡⅣ＝$\frac{n^2}{\text{Ⅱ}C}$。故可作图得点Ⅳ。（3）确定$\angle IX$Ⅲ$=w$，由于$\angle IX$Ⅲ与$\angle A$ⅡⅣ的两边互相平行，所以相等，即$w=\angle A$ⅡⅣ。（4）作弦IⅢ，过点Ⅳ作一弦；使其所对立圆周角为w，这弦与圆的交点即点Ⅰ和Ⅲ。（5）作$\triangle XYZ$。过点Ⅲ且平行于ⅡⅣ的直线与圆的交点即为X。直线ⅠⅡ与圆的交点为Y，AY与圆的交点为Z，则$\triangle XYZ$即为所求。与这个解法相比，下述卡斯蒂朗问题的投影解法就非常简单：在圆上任选三点X_1、X_2、X_3，确定BX_1与圆的交点Z_1，然后确定AZ_1与圆的交点Y_1，最后确定CY_1与圆的交点X_1'，类似地作出X_2'、X_3'，根据斯坦纳定理，确定投影在圆上的二重元素X_r和X_s，其中X_1'、$X_2'X_3'$与X_1，X_2，X_3相对应。这样$\triangle X_rY_rZ_r$和$X_sY_sZ_s$均能满足卡斯蒂朗问题的条件。

四表望远　有木去人不知远近，立四表，相去各一丈，令左两表和所望参相直，从后右表望之，入前右表三寸，问木去人几何？这是《九章算术》勾股章第22题。是用相似三角形对应边成比例来进行测量的。“表”即“标杆”。图中A、B、C、D是四根标杆，排列成正方形或菱形，其边长



为1丈，“木”即“树”，图中用E表示，人在A处，A、B、E在同一条直线上，从D望E视线与BC交于F，CF长3寸，因为$\triangle CDF\backsim\triangle AED$，所以$\frac{CF}{AD}=\frac{CD}{AE}$，故$AE=\frac{AD\cdot CD}{CF}$。

原书解法是$(100\text{寸})^2\div 3\text{寸}=3333\frac{1}{3}$寸。答曰：三十三丈三尺三寸少半寸（古称$\frac{1}{3}$为“少半”）。与这个题类似，用相似三角形的原理进行测量的问题在《九章算术》中还有几例，如“井深几何”：今有井，径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸，问井深几何？

禾实几何　今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？在《九章算术》方程章里共有关于一次方程组的问题十八个，这是第1题：“上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗”译成现代汉语就是“三捆上等谷，二捆中等谷，一捆下等谷，共可打出米39斗”。如果设每一捆上等谷，中等谷，下等谷各能打出米x、y、z斗则根据题意

可列出方程组$\begin{cases}3x+2y+z=39, & ①\\ 2x+3y+z=34, & ②\\ x+2y+3z=26。 & ③\end{cases}$

《九章算术》中解这类方程的方法叫做“直除法”，用“直除法”解这个题的过程是：用①中x的系数3“遍乘”②，得$6x+9y+3z=102$。④“直除”④－①×2，$5y+z=24$。⑤“遍乘”③×3。$3x+6y+9z=78$。⑥“直除”⑥－①，$4y+8z=39$。⑦用⑤中y的系数5“遍乘”⑦，$20y+40z=195$⑧，“直除”⑧—⑤×4，$36z=99$。解得$z=2\frac{3}{4}$(斗)。用类似的“遍乘直除”法可求得$x=9\frac{1}{4}$(斗)，$y=4\frac{1}{4}$(斗)。由以上过程可以看出，这种“直除法”实际就是现代解一次方程组的加减消元法，但它比印度的波罗门笈多（约628年）的解法早五百多年，比法国别朱(1730—1783)的解法早一千五百多年。在两千多年前就掌握了如此系统化的联立一次方程组的解法，确是中国古代数学杰出的贡献。

出门望九堤 今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色，问各几何？这是一个等比数列的题目，所求各数均构成以9为首项，公比等于9的等比数列，其答案为堤9，木81，枝729,巢6561，禽59049，雏531441，毛4782969，色43046721。

地图着色问题 在地图上要把所有的地区按照海洋和陆地上的不同国属，用种种颜色加以区别，使相邻的两个地区有不同的颜色，至少需要几种不同颜色？最早提出并研究这个问题的是德国天文学家兼数学家墨比乌斯，他经过大量的试验，提出一个猜想：“无论是多么复杂的地图，只要用四种不同的颜色，就可以绘出合格的彩色地图。”墨比乌斯想用数学推理来证明这个“四色定理”，但经过毕生努力，也没有取得成功。1879年，德国数学肯伯声明自己已经证明了“四色定理”，并且发表了证明方法。1890年英国数学家胡海特指出了肯伯证明是错误的，但经过多年研究，他也没有给出“四色定理”的证明，但是他严格地证明了所谓“五色定理”，即“任何一张地图，用五种不同颜色就够了”。直到1976年，美国数学家阿沛尔、哈肯和摩利用大型电子计算机经过约1200小时的运算，证明了“四色定理”。证明中作了近100亿个逻辑判断，这么大量的运算，一个人即使一辈子连续不断地工作也是无法完成的，用电子计算机解决了一百多年来一直未能解决的纯理论问题，表明人与机器合作就有可能完成许多连著名数学家至今也束手无策的难题。

有女善织 今有女子不善织，日减功迟，初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫，问织几何？该题是《张邱建算经》上卷第23题。原书给出的解法是“并初、末日织尺数，半之，余以乘织讫日数，即得。答曰：二匹一丈”(1匹＝4丈)。该问题相当于已知等差数列的$a_1=5$，$a_n=1$，$n=30$，求S_n。而原书给出的解法即相当于

$S_{30}=\frac{5+1}{2}\cdot 30$。显然这与现代代数里求和公式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$是完全一致的。在另一题里，张邱建又给出了已知$a_1$、$n$和$S_n$求公差$d$的公式，原题是“今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月，日织九匹三丈。问日益几何？”此题相当于已知等差数列的$a_1=5$，$S_n=390$，$n=30$，求公差d。原书给出的解法是按公式$d=\left(\frac{2S_n}{n}-2a_1\right)\div(n-1)$计算，而这个公式可以从现在代数中等差数列的求和公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$里导出，原书给出的答案是$d=5\frac{15}{29}$（寸）。

百羊问题　甲赶群羊逐草茂，乙拽肥羊一只随其后，戏问甲及一百否？甲云所说无差谬，若得这般一群凑，再添半群小半群（小半即四分之一）得你一只来方凑，玄机奥妙谁猜透？这是明初数学家程大位所著《算法统宗》卷十三至十六收集的数学难题之一。这个题若用算术方法解之，确实不算容易，但若用列方程的方法解之，就实在算不上难题了。设甲原有羊x只，根据题意列方程，得$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$，解得$x=36$（只）。

百鸡问题　今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一，凡百钱买鸡百只，问鸡翁，母，雏各几何？这是《张邱建算经》中的一个不定方程问题。设鸡翁、鸡母、鸡雏分别为x、y、z只，根据题意得

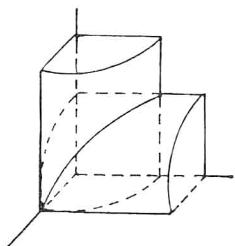
$$\begin{cases}x+y+z=100, & (1)\\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100。 & (2)\end{cases}$$

(2)×3－(1)得$14x+8y=200$，即$7x+4y=100$。（3）所以$y=25-\frac{7x}{4}$，x一定是4的倍数，设$x=4t$，则$y=25-7t$，$z=75+3t$。因为$x>0$，所以$4t>0$，$t>0$；又因为$y>0$，所以$25-7t>0$。$t<3\frac{4}{7}$。故$t=1$，2，3。所以原方程组的整数解为4，18，78；8，11，81；12，4，84。这样就得到了原书中给出的答案；鸡翁四，母十八，雏七十八；又答，鸡翁八，母十一，雏八十一；又答，鸡翁十二，母四，雏八十四。“百鸡问题”是中国古代数学史上杰出的成就之一。

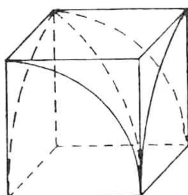
池中之葭　今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐，问水深葭长各几何。本题原载《九章算术》勾股章。设水深x尺，则葭长$(x+1)$尺，根据题得$x^2+5^2=(x+1)^2$。解得$x=12$，故水深12尺，葭长13尺。这个题在世界上影响很大，印度莲花问题和它性质完全相同，但解法不一样。在十五世纪中亚西亚数学家阿尔·卡西的《算术之钥》（1427年）中有一题：“一矛直立在水中，出水三尺，风吹矛没入水中，矛头恰在水面上，矛尾端在原位不动，矛头与原位相距五尺，求矛

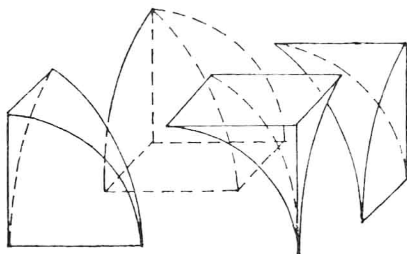
长。”在十六世纪英国算术中也有类似的题目：“一根芦苇生在圆池中央，出水3呎，池宽12呎，风吹芦苇，苇尖刚碰到池边水面，问池深多少？”从这些相似的题目中，不难看出中国古算题在世界上产生了多么巨大的影响。

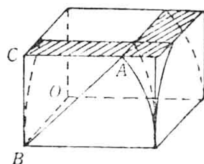
牟合方盖　求中轴线互相垂直相交的两个相同的圆柱体的公共部分的体积。题中圆柱体的公共部分的形状象把两个方口圆顶的伞对合在一起，故

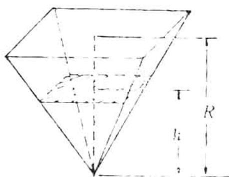


取名“牟合方盖”，图中画出的是其八分之一。刘徽在注《九章算术》时研究球的体积公式曾遇到求牟合方盖的体积的问题，指出$V_{球}=V_{牟合盖方}$，但他没有找到求牟合方盖体积的公式，刘徽坦率地说：“欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”寄希望于后世的聪明人。刘徽之后二百多年，南北朝时代的数学家祖暅（大数学家祖冲之之子）创立了巧妙的“开立圆术”解决了牟合方盖的求体积的问题。他的方法是：（1）以球的半径R为棱长作一个正方体，以一个顶点为心，R为半径，从纵横两面把正方体截开，如图，正方体被截成的四部分中最大的一部分就是牟合方盖的八分之一。









（2）将正方体用水平平面截之，底下一层如图所示，在直角三角形ABC中，$AB=R$，$BC=h$，$AC=a$，根据勾股定理得$a^2=R^2-h^2$。则图中阴影部分面积为$s=R^2-a^2=h^2$。（3）另作一底面边长和高都等于R

的正四棱锥，用平行于底面而距离顶点为h的平面截之，则截面（阴影部分）面积为h^2。（4）根据祖暅原理“夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等”。则这正四棱锥面积等于正方体去掉牟合方盖的八分之一剩余部分的体积，所以。$V_{牟合方盖} = 8\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{16}{3}R^3$。根据刘徽公式可得$V_{球} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$。祖暅利用“牟合方盖”的体积推得了球的体积。这是数学史上的一个巨大成就。

麦凯特尔对数级数 不用对数表，计算一个给定数的对数。该题可通过将对数展开为幂级数而得到解决。在荷尔斯太因数学家麦凯特尔的书中最先给出了如下的展开式$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$。但是此式仅当$x$为真分数时才成立，故它不适用于计算任意数的对数。为了求得符合这一要求的级数，我们用$-x$代换此式中的x，得$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$，将以上两式相减，得$\ln\frac{1+x}{1-X} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right]$。对于$x$的每一个正真分数或负真分数值$X = \frac{1+x}{1-x}$都为正数，故所得公式可以写成$\ln X = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right]$，其中$x = \frac{X-1}{X+1}$。对于每个正的$X$，这一新级数收敛，用两个任意正数的商$\frac{Z}{z}$代换这一级数中的$X$，得

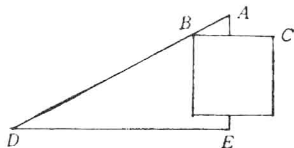
$$\begin{cases} \ln Z - \ln z = 2\left[Q + \frac{1}{3}Q^3 + \frac{1}{5}Q^5 + \cdots\right], \\ \text{其中 } Q = \frac{Z-z}{Z+z}。\end{cases}$$

此级数就是计算对数表用的对数级数。例如为了计算$\ln 2$，可令$z = 1$，$Z = 2$，得$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \cdots\right)$，为了计算$\ln 5$，可令$z = 125 = 5^3$，$Z = 128 = 2^7$，得$7\ln 2 - 3\ln 5 = 2\left(Q + \frac{1}{3}Q^3 + \frac{1}{5}Q^5 + \cdots\right)$，其中$Q = \frac{3}{253}$，为了计算$\ln 3$，假定$z = 80 = 5 \cdot 2^4$，$Z = 81 = 3^4$，因此

$\ln z=\ln 5+4\ln 2$，$\ln Z=4\ln 3$，得 $4\ln 3-\ln 5-4\ln 2=2\left(Q+\frac{1}{3}Q^3+\frac{1}{5}Q^5+\cdots\right)$，其中 $Q=\frac{1}{161}$。为了计算ln7，令 $z=2400=2^5\times 5^2\times 3$，$Z=2401=7^4$，得到 $4\ln 7-5\ln 2-2\ln 5=2\left(Q+\frac{1}{3}Q^3+\frac{1}{5}Q^5+\cdots\right)$，其中 $Q=\frac{1}{4801}$。括号内的级数收敛很快，亦即只要求少数几项就可以相当精确地求得级数的和。

折竹问题　今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？这是《九章算术》勾股章第13题，设残留的一段竹子高x尺，根据题意列方程得 $(10-x)^2=x^2+3^2$，解之，得 $x=4\frac{11}{20}$尺。即残留的一段竹子的高是$4\frac{11}{20}$尺。"折竹问题"后来也成为许多国家数学教科书中常见的典型例题，下面是几个例子：印度七世纪数学家婆罗笈多的著作中有："竹高十八尺，为风吹折，竹尖抵地，离根六尺，求两段之长。"印度另一数学家拜斯卡拉的叉集中有："小河岸上有一棵小杨树，树干在地上三单位处被风吹断，上段倒下的方向与水流方向垂直，树梢恰好落在河的对岸上，若河宽为4个单位的长，问树高多少？这个题目在十五世纪传入意大利，1491年在意大利佛罗棱斯出版的《算术》一书中有这样一题："一树高50呎，折断后树梢碰地，与树根相距30呎，问折断处去根多少呎？问还有多少呎没有被折去？"在近代的数学教科书里，这类题目就更多了。

邑方几何　今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木，问邑方几何？这是载于《九章算术》的一个关于一元二次方程的应用题。其中邑方就是方城的意思，木即树。原书是应用"开带从平方法"利用筹算来解的，其方法比较复杂，用现代方法解之如下，设方城的边长为x步，则根据题意得 $BC=\frac{x}{2}$步，$AC=20$步，$AE=(x+20+14)$步，$DE=1775$步。因为 $\triangle ABC\backsim$



$\triangle ADE$，所以$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$，即

$$\frac{20}{x+20+14}=\frac{\frac{x}{2}}{1775}$$，整理得 $x^2+34x-71000=0$，解得 $x_1=250$，$x_2=-284$（舍去），故邑方250步。

伯努利的求和问题　设p是正整数，求前n个自然数的p次幂之和$S=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$。这个问题最先在雅可布·伯努利的著作中给出了解答。下面的解法是建立在二项式定理的基础上的。根据二项式定理，有 $(r+x)^{p+1}=r^{p+1}+(p+1)r^px+\frac{p(p+1)}{2}r^{p-1}x^2+\cdots$ 及 $(r+x-1)^{p+1}=r^{p+1}+(p+1)r^p(x-1)+$

$\frac{p(p+1)}{2}r^{p-1}(x-1)^2+\cdots$。二式相减，得$(r+x)^{p+1}-(r-1+x)^{p+1}=(p+1)r^p+\frac{p(p+1)}{2}r^{p-1}[x^2-(x-1)^2]+\cdots$。令$(x-1)^2=x^2$，$(x-1)^3=x^3$，$(x-1)^4=x^4$，…，则$(p+1)r^p=(r+x)^{p+1}-(r-1+x)^{p+1}$。依次取$r=1,2,3,\cdots,n$代入上式，得$(p+1)\cdot 1^p=(1+x)^{p+1}-x^{p+1}$，$(p+1)\cdot 2^p=(2+x)^{p+1}-(1+x)^{p+1}$，$(p+1)\cdot 3^p=(3+x)^{p+1}-(2+x)^{p+1}$，…，$(p+1)\cdot n^p=(n+x)^{p+1}-(n-1+x)^p$。将上述各等式相加，得$(p+1)(1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p)=(n+x)^{p+1}-x^{p+1}$，即$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\frac{(n+x)^{p+1}-x^{p+1}}{p+1}$。二项式$(n+x)^{p+1}$的展开式中的$x$，$x^2$，$x^3$，…，是将它们看作未知数（而不是看做$x$的幂）时，下列方程组$(x-1)^2=x^2$，$(x-1)^3=x^3$，$(x-1)^4=x^4$，…的解：$x=\frac{1}{2}$，$x^2=\frac{1}{6}$，$x^3=0$，$x^4=-\frac{1}{30}$，…。以上这些数叫做伯努利数。当$n=1,2,3,4$时，依次得到

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+x)^2-x^2}{2}=\frac{n^2+2nx}{2}=\frac{n(n+1)}{2}。$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+x)^3-x^3}{3}=\frac{n^3+3n^2x+3nx^2}{3}=\frac{n^3+3n^2\cdot\frac{1}{2}+3n\cdot\frac{1}{6}}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{(n+x)^4-x^4}{4}=\frac{n^4+4n^3x+6n^2x^2+4nx^3}{4}=\frac{n^4+4n^3\cdot\frac{1}{2}+6n^2\cdot\frac{1}{6}+4n\cdot 0}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2。$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{(n+x)^5-x^5}{5}$$

$$=\frac{n^5+5n^4x+10n^3x^2+10n^2x^2+5nx^3}{5}$$

$$=\frac{n^5+5n^4\cdot\frac{1}{2}+10n^3\cdot\frac{1}{6}+10n^2\cdot 0-5n\cdot\frac{1}{30}}{5}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30}。$$

伯努利——欧拉关于装错信封的问题　求n个元素的排列，要求在排列中没有一个元素处于它应当占有的位置。雅可布·伯努利和约翰·伯努利的侄子尼可劳斯·伯努利首先提出的。后来，欧拉对此题发生兴趣，把它称之为“组合理论的一个妙题”，并独立地解决了这道难题。本题可形象地叙述为装错信封的问题：“某人写了n封信，并在n个信封上写下了相应的地址，把所有信笺装错信封的错误装法，共有多少种？”设信笺为a，b，c，…，n，对应的信封为A，B，C，…，N，所求的错误装法的种数记为a_n，先考虑把a装进B的情况，这时又有把b装进A和把b不装进A两种情况。对第一种情况显然包括a_{n-2}种错误的装法，对第二种情况，假如用b'，c'，d'，…，n'和B'，C'，D'，…，N'分别代替b，c，d，…，n和A，C，D，…N，于是推出第二种情况有a_{n-1}种错误的装法，那么把a装进B的所有错误装法共有$a_{n-1}+a_{n-2}$种。因为把“a装进C”，“a装进D”，…“a装进N”的每一种装法都有相同的错误装法的种数，则所有错误装法的总数为$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，即$a_n-na_{n-1}=-[a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}]$。当$n=3$，4，…时，得$a_3-3a_2=-(a_2-2a_1)$，$a_4-4a_3=-(a_3-3a_2)$，…，$a_n-na_{n-1}=-[a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}]$。将上述各等式两端分别相乘，得$a_n-na_{n-1}=(-1)^{n-2}(a_2-2a_1)$。由于$a_1=0$，$a_2=1$，$(-1)^{n-2}=(-1)^n$，所以$a_n-na_{n-1}=(-1)^n$，用$n!$去除这个等式的两端，得$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$。依次用2，3，4，…，$n$去代替这个等式中的$n$，得$\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=\frac{(-1)^2}{2!}$。$\frac{a_3}{3!}-\frac{a_2}{2!}=\frac{(-1)^3}{3!}$，$\frac{a_4}{4!}-\frac{a_3}{3!}=\frac{(-1)^4}{4!}$，…，$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$。将以上等式两端分别相加，且注意到$a_1=0$，得$\frac{a_n}{n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$，所以，$a_n=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$，而上式可改写为$a_n=n!\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)!}{n!}\right]=n!-Cn^1(n-1)!+Cn^2(n-2)!-Cn^3(n-3)!+Cn^4(n-4)!-\cdots+(-1)^nCn^n$。此式相当于在$(x-1)^n$的展开式中每一个幂$x^k$写成$k!$，那么所求的数便可以表示成更简单的形式，例如$a_4=(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=4!-4\times3!+6\times2!-4\times1!+1=9$。

汽车排队加油问题　有十辆各种类型的汽车到加油站加油，设加油站加满第i（$i=1，2，\cdots，10$）辆车的油需要Ti分钟，由于车辆类型不同，因此

所需的时间Ti也各不相同。(1)每次只对一辆汽车加油时，应该如何安排加油车辆的顺序，使它们花费的总时间(各车加油时间，等待时间应予计算)最少？这时间等于多少？(2)如果每次对两辆车同时加油，又应该如何安排10辆车的顺序，使之花费的时间最少？并求这时间。为了方便，不妨设各车加油所需时间的大小顺序为：$T_1<T_2<T_3<\cdots<T_{10}$。(1)当每次只有一辆车加油时，若按加油时间从小到大的顺序排列，则花费的总时间为$T=T_1+(T_1+T_2)+(T_1+T_2+T_3)+\cdots+(T_1+T_2+\cdots+T_{10})$。但若按任意一种顺序$i_1$，$i_2$，…，$i_{10}$($i_1$，$i_2$，…，$i_{10}$是1，2，…，10的一种排列)排列，则花费的总时间为$T^*=Ti_1+(Ti_1+Ti_2)+(Ti_1+Ti_2+Ti_3)+\cdots+(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{10})$。而$T_1+T_2+\cdots+T_{10}=Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{10}$，$T_1+T_2+\cdots+T_9\leqslant Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_9$，$T_1+T_2+\cdots+T_8\leqslant Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_8$，…，$T_1+T_2\leqslant Ti_1+Ti_2$，$T_1\leqslant Ti_1$。由此得$T\leqslant T^*$，即按加油时间由小到大的顺序排队时花费的总时间最少，这时间即T。(2)当有两个加油管同时给两辆车加油时，如果安排$5+l$辆车在第一管上加油，任意安排顺序i_1，i_2，…，i_{5+l}，则总的花费时间为$T_1=Ti_1+(Ti_1+Ti_2)+\cdots+(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l})$。另外的$5-l$辆车在第二管上加油，任意安排顺序为$j_1$，$j_2$，…，$j_{5-l}$，总的花费时间为$T_2=Tj_1+(Tj_1+Tj_2)+\cdots+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l})$。于是$T_1+T_2=Ti_1+(Ti_1+Ti_2)+\cdots+(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l})+Tj_1+(Tj_1+Tj_2)+\cdots+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l})$，两组从后到前依括号对应合并，$T_1+T_2=[(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l})+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l})]+[(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l-1})+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l-1})]+[(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l-2})+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l-2})]+\cdots$改成以$i_k$的序所写的通式：假如[ ]中前一个( )中的最后一项为Ti_k，后一个( )中的最后一项为$Ti_{k'}$，于是$k-k'=[5+l-(5-l)]=2l$，所以合并[ ]时最后一项为$[(Ti_1+Ti_2+\cdots+T_{2l+1})+Tj_1]$，而以后不再出现$Tj_k$，故$T_1+T_2=[(Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{5+l})+(Tj_1+Tj_2+\cdots+Tj_{5-l})]+\cdots+[(Ti_1+\cdots+Ti_{2l-1})+Tj_1]+[Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{2l}]+[Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{2l-1}]+\cdots+(Ti_1+Ti_2)+Ti_1$，必有$T_1+T_2>[Ti_1+\cdots+Ti_{5+l}]+\cdots+[Ti_1+Ti_2+\cdots+Ti_{(2l-1)}+Tj_1]+\cdots+[T_1+T_2]>[T_1+T_2+\cdots+T_{10}]+[T_1+T_2+\cdots+T_8]+[T_1+T_2+\cdots+T_6]+\cdots+[T_1+T_2]>5[T_1+T_2]+4[T_3+T_4]+3[T_5+T_6]+2[T_7+T_8]+[T_9+T_{10}]$。由此可见，每个加油的管子各分配5辆车，并按加油时间从小到大的顺序轮流分配到两加油管，即1管：T_1，T_3，T_5，T_7，T_9；2管：T_2，T_4，T_6，T_8，T_{10}时，所花的总时间最少，这时间即$5[T_1+T_2]+4[T_3+T_4]+3[T_5+T_6]+2[T_7+T_8]+[T_9+T_{10}]$。

阿基米德分牛问题 太阳神有一牛

群，由白、黑、花、棕四种颜色的公、母牛组成，在公牛中，白牛数多于棕牛数，多出之数相当于黑牛数的$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$；黑牛数多于棕牛数，多出之数相当于花牛数的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花牛数多于棕牛数，多出之数相当于白牛数的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。在母牛中，白牛数是全体黑牛数的$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$；黑牛数是全体花牛数的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花牛数是全体棕牛数的$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$，棕牛数是全体白牛数的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。问这牛群是怎样组成的。

根据题意可列出由七个八元一次方程组成的不定方程组，解得白色公牛数为10366482g，黑色公牛数为7460514g，花色公牛数为7358060g，棕色公牛数为4149387g，白色母牛数为7206360g，黑色母牛数为4893246g，花色母牛数为3515820g，棕色母牛数为5439213g，其中g为任意正整数。如上面提示的解法，目前来看，并不十分困难，然而在古代常常把一道难题叫做分牛问题或阿基米德问题，特别考虑到阿基米德其他的辉煌成就及他把这可分牛之题献给古代希腊后期亚历山大城的天文学家厄拉多塞尼这一事实，可以设想以上所述及的问题的方式并不代表阿基米德问题完整的和原始的形式。莱辛于1773年在沃尔芬比特尔图书馆发现一本希腊文手抄本，其中就有一篇关于该题“更完整”的叙述。该题由22组对偶句组成，以诗歌形式出现：“朋友，请准确无误地数一数太阳神的牛群，要数得十分仔细，如果你自认为还有几分聪明，多少头牛在西西里岛草地上吃过草，它们分为四群在那里来回踱步。各群颜色不同：第一群象牛乳那样洁白，第二群闪耀着深乌木般的光泽，第三群毛色棕黄，第四群满身斑斓。每群中公牛数总大大超过母牛。现在告诉你这些牛群间的比例：白牛数等于棕牛数再加上黑牛数的三分之一和二分之一。此外，黑牛数为花牛数的四分之一加五分之一，再加上全部棕牛。朋友，最后你必须记住，花牛数是白牛的六分之一加七分之一，再加上全部棕色母牛。但是母牛群中，比例却大不相同：白母牛等于黑色公、母牛全部的三分之一加四分之一。而黑母牛为全部花牛的四分之一加五分之一，这里要注意，每头花母牛和花母牛都要算进去。同样花母牛的头数是全部棕牛的五分之一加六分之一。最后，棕色母牛与全部白牛的六分之一加七分之一相等。朋友，如果你能确切告诉我，这些膘壮肌肥、毛色各殊的公牛母牛，一共多少聚集在那里？这样你才不愧为精通计数。但是你还算不上一个聪明人，除非用我给出的新数据来回答问题：当所有黑白公牛齐集在一起，就排出一个阵形，纵横相等；辽阔的西西里原野，布满大量的公牛，当棕色公牛与花色公牛在一起，便排成一个三角

形，一头公牛站在公牛顶端；棕色公牛无一头掉队，花色公牛也头头在场，这里没有一头牛和它们的毛色不同。如果你把这些条件一一牢记，胸有妙算，朋友，如果你能说出每群牛的组成和头数，那你就是胜利者，可昂首前进，因为你的声誉将在智慧的世界里永放光芒。”但是该题是否属于阿基米德，研究阿基米德的权威人士们有不同看法。

阿贝尔不可能性定理 高于四次的方程一般不可能有代数解法。意大利物理学家P·鲁非尼1798年在波洛尼亚出版的著作中首先阐述了这个有名的定理，但鲁非尼的证明是不完善的。1826年年轻的挪威数学家N·H·阿贝尔第一个给出了严谨的证明。

阿波洛尼斯相切问题 画一个与三个已知圆相切的圆。这个著名的问题是由欧几里德和阿基米德之后的古代最伟大的数学家珀加的阿波洛尼斯提出的。他的主要著作以惊人的广泛性扩展了那个时代圆锥曲线的狭隘知识。他在一篇论文中给出了上面相切问题的解法，但是不幸的是已经遗失。十六世纪法国最伟大的数学家韦达约于1600年试图收集已失散的阿波洛尼斯的论文，并解了这道相切的题，办法是通过单独地研究处理该题的十种特殊情况的每一种，并从前者推导出每一个后者。与它的解法成对照的是高斯、格戈尼、彼得森对这个普遍性问题的解法。其中格戈尼的作图法是：画出各已知圆的等幂心O与相似轴。Ⅰ Ⅱ Ⅲ$\equiv x$，确定与已知圆有关的x的极点1，2，3，并将它们与O点相连结，这些连结线与已知圆的交点就是已知圆与所求圆的切点。

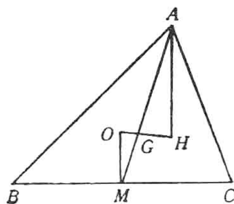
鸡兔同笼 今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何？这个题是《孙子算经》下卷中一些算术难题之一。原书的解法是：设头数是a，足数是b，则$\frac{1}{2}b-a$是兔数，$a-(\frac{1}{2}b-a)$是雉数。根据这组公式，容易得出原题的答案：兔12只，雉23只。

欧拉数 求函数$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$和$F(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$当$x$增大时的极限值。为了证明这两个极限值存在，首先证明当$x>0$时$f(x)$递增，而$F(x)$递减。在不等式$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$中，令其中的$m$个元素为$x$，而另外的$n-m$个元素为1，则$\frac{mx+(n-m)}{n}>\sqrt[n]{x^m}$，即$x^{\frac{m}{n}}<1+\frac{m}{n}(x-1)$。令$\frac{m}{n}=\varepsilon$，则$0<\varepsilon<1$，且$x^\varepsilon<1+\varepsilon(x-1)$。设$a>b>0$，则$0<\frac{b}{a}<1$。令$x=1+\frac{1}{b}$，$\varepsilon=\frac{b}{a}$，则$\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{a}}<1+\frac{b}{a}\left(1+\frac{1}{b}-1\right)$，由此得$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b<\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$，这说明$f(x)$是增函数，

再令 $x=1-\frac{1}{b+1}$，$\varepsilon=\frac{b+1}{a+1}$，

则 $\left(1-\frac{1}{b+1}\right)^{\frac{b+1}{a+1}}<1+\frac{b+1}{a+1}$ $\left(1-\frac{1}{b+1}-1\right)$，即 $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}}<$ $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}}$，由此得 $\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}>$ $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}$，这说明 $F(x)$ 是减函数，并且由于 $F(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $f(x)>f(x)$，故 $f(b)<f(a)<F(a)<F(b)$，所以 $f(x)$ 和 $F(x)$ 分别是有上界和有下界的函数，当 x 无限增大时 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的极限值都是存在的。设 $d=|F(x)-f(x)|=\frac{f(x)}{x}$，当 x 无限增大时，d 趋近于零，故 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的极限值相等。这个极限值最先由欧拉建议用字母 e 来表示，e 是一个无理数，叫做欧拉数。

欧拉直线　在所有三角形中，外接圆的圆心、重心、垂心在一条直线（这条直线叫做欧拉直线）上，并且垂心与重心的距离等于重心与外接圆圆心距离的二倍，这个定理是欧拉的一篇论文的成果之一。以下证明非常简明。在 $\triangle ABC$ 中，设 M 为 BC 边的中点，G 为重心，则它在中线 AM 上，且 $AG=2GM$。设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O，则 $OM\perp BC$。连接并延长 OG 到 H，使 $GH=2OG$，并连



结 AH，则 $\triangle MOG\backsim\triangle AHG$。故 $\angle OMG=\angle HAG$，从而 $AH//MO$，所以 $AH\perp BC$。同理可以证明 $BH\perp AC$，$CH\perp AB$，即 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

欧拉关于多边形分割的问题　1751年欧拉向哥德巴赫提出如下问题："可以有多少种方法用对角线把一个凸 n 边形分割成三角形？"在 n 很小时容易借助图形来解决这个问题，例如当 $n=3$，4，5，6时，可求得分割数依次为 $E_3=1$，$E_4=2$，$E_5=5$，$E_6=14$。但当边数增加时，这个方法便失效了。欧拉推导出一个计算分割方法种数 E_n 的公式

$$E_n=\frac{2\cdot6\cdot10\cdot\cdots\cdot(4n-10)}{(n-1)!}$$

欧拉自己说："我的归纳过程是相当费力的"。当欧拉得出最初的七种分割方法数：1，2，5，14，42，132，429，并告知了西格纳，西格纳于1758年建立了 E_n 的一个递推公式 $E_n=E_2E_{n-1}+E_3E_{n-2}+\cdots+E_{n-1}E_2$，这个递推公式的推导方法如下：分别用1，2，3，…，n 表示凸 n 边形的 n 个顶点，取 $n1$ 作为一个三角形的一边，它所对的顶点，根据不同的分割方法可落在2，3，4，…，$n-1$ 各顶点上，例如，若落在顶点 r

上，则$\triangle n1r$的一侧有一个r边形而另一侧有一个$n-r+1$边形，因为r边形有E_r种分割方法，而$n-r+1$边形有E_{n-r+1}种分割方法，因而就选定r作边$n1$所对的顶点而言，给定的n边形有$E_r \cdot E_{n-r+1}$种分割方法。由于r可依次取2，3，4，…，$n-1$的每一个值，于是便得$E_n=E_2E_{n-1}+E_3E_{n-2}+\cdots+E_{n-1}E_2$，其中$E_2$的值规定为1。如果按照罗德里格的思路研究欧拉的多边形分割的问题或西格纳的递推公式，并把本题和法国数学家凯特兰在1838年所解的一个问题联系起来推求欧拉公式便比较容易了。凯特兰的问题是"成对地计算n个不同因子的乘积，共有多少种方法？"所谓成对地计算一个乘积指始终只有两个因子在一起相乘，并把这样"成对"乘得的积用做继续计算中的一个因子。例如，$[(3\times5)\times4]\times7$和$(3\times5)\times(4\times7)$便是四个因子，3，5，4，7的$\theta$成对的乘积中的两个。如果用$R_n$表示$n$个给定的不同因子的成对乘积的个数，其中的每一个成对的乘积P都包含$n-1$个$A\cdot B$形式的乘式，若再加进第$n+1$个因子f，则可得到四个新的成对乘积：$(f\cdot A)\cdot B$，$(A\cdot f)\cdot B$，$A\cdot(f\cdot B)$。$A\cdot(B\cdot f)$由于这四种不同的排列能对P的$n-1$个成对乘积中的每一个产生影响，从而使我们得到$4(n-1)$个$(n+1)$个因子的成对的乘积，另外还可得到另外2个$(n+1)$个因子的成对的乘积$f\cdot P$和$P\cdot f$，故共得到$(4n-2)$个$(n+1)$个因子的成对的乘积，因而得到递推公式$R_{n+1}=(4n-2)R_n$，由此可得R_n的独立表达式如下：$R_n=(4n-6)R_{n-1}=(4n-6)\cdot(4n-10)R_{n-2}=\cdots=(4n-6)\cdot(4n-10)\cdots\cdot14\cdot10\cdot6\cdot2$。若$n$个因子顺序是预定的，用$C_n$表示这$n$个因子可以形成的成对的乘积的个数，若这$n$个因子按预定的顺序是$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$，…，$\varphi_n$，我们从这$C_n$个成对的乘积中取其具有(　)，(　)形式者，左边括号中含有r个元素φ_1，φ_2，…，φ_r，右边括号中含有$n-r$个元素φ_{r+1}，φ_{r+2}，…，φ_n，左边括号中的r个因子可形成C_r个成对的乘积，而右边括号中的$n-r$个因子可形成C_{n-r}个成对的乘积，因而共可得到$C_r\cdot C_{n-r}$种不同的成对的乘积。此外r可以取从1到$n-1$的每一个值，故$C_n=C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_1$，再由$n$个因子可有$n!$种不同的排列顺序，而这些顺序中的每一个都有$C_n$个成对的乘积，于是$R_n=C_n\cdot n!$或者$C_n=\frac{R_n}{n!}=\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14\cdot\cdots\cdot(4n-6)}{n!}$。以上是凯特兰问题的解答。用数学归纳法可以证明$E_n=C_{n-1}$。从而得到欧拉给出的公式$E_n=\frac{2\cdot6\cdot10\cdots(4n-10)}{(n-1)!}$。本世纪以来乌尔班又用另外的形式推导出了$E_n=\frac{4n-10}{n-1}E_{n-1}$，这是欧拉给出的公式的递推的形式。

柯克曼的女学生问题　某寄宿学校有十五名女生，她们经常每天三人一行地散步，问要怎样安排才能使每个女生同其他每一个女生在同一行中散步，并恰好每周一次？这个题由英国数学家柯克曼提出。在已发现的众多

解法中，西尔维斯特认为最佳解法是皮尔斯的“女学生难题的递推解法”：令符号 * 表示一位女孩，她天天都走在同一行的中间，把其他女孩分成两组，每组七人，用阿拉伯数字1至7或小写字母表示第一组；用罗马数字Ⅰ至Ⅶ或大写字母表示第二组。用例如$R=S$的等式表明字母R表示的罗马数字与字母S表示的阿拉伯数字具有相同数值。同时用数字0，1，2，3，4，5，6表示星期日，星期一，星期二、星期三，星期四，星期五、星期六。假设星期日按下列顺序排列

$$\begin{array}{ccc} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \\ d & * & D \\ E & F & G \end{array}$$

由此，每个数字加上$r=R$可得星期r（星期日不在内）的排列：

$$\begin{array}{ccc} a+r & \alpha+r & A+R \\ b+r & \beta+r & B+R \\ c+r & \gamma+r & C+R \\ d+r & * & D+R \\ E+R & F+R & G+R \end{array}$$

这里相加后超过7的每个数，象$C+r$或$D+R$，表示那个女孩子的编号为$C+r-7$或$D+R-7$，即比原数小7，随后把原数换为这个数字。如果下面三个条件得到满足，那末这样得到的排列就是该题的解答。①$\alpha-a$，$\beta-b$，$\gamma-c$这三个差分别是1，2，3；②$A-a$，$A-\alpha$，$B-b$，$B-\beta$，$C-c$，$C-\gamma$，$D-d$这七个差形成一个以7为模数的非同余数的完整余数列；③$F-E$，$G-F$，$G-E$这三个差分别是1，2，3，例如星期日的排列是

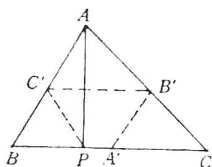
1　2　Ⅰ
3　5　Ⅵ
4　7　Ⅱ
6　*　Ⅲ
Ⅳ　Ⅴ　Ⅶ

按星期一到星期六的顺序，一星期每天的排列如下：

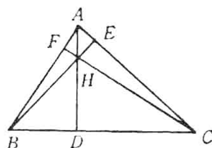
2 3 Ⅱ　3 4 Ⅲ　4 5 Ⅳ　5 6 Ⅴ
4 6 Ⅶ　5 7 Ⅰ　6 1 Ⅱ　7 2 Ⅲ
5 1 Ⅲ　6 2 Ⅳ　7 3 Ⅴ　1 4 Ⅵ
7 * Ⅳ　1 * Ⅴ　2 * Ⅵ　3 * Ⅶ
Ⅴ Ⅵ Ⅰ　Ⅵ Ⅶ Ⅱ　Ⅶ Ⅰ Ⅲ　Ⅰ Ⅱ Ⅳ

6 7 Ⅵ　7 1 Ⅶ
1 3 Ⅳ　2 4 Ⅴ
2 5 Ⅶ　3 6 Ⅰ
4 * Ⅰ　5 * Ⅱ
Ⅱ Ⅲ Ⅴ　Ⅲ Ⅳ Ⅵ

费尔巴哈圆　三角形中三边的三个中点，三个高的垂足，垂心到各顶点的线段的三个中点在一个圆上。这个圆早于1765年已为欧拉所知，但K·费尔巴哈于1822年再度发现该圆后，通常都称其为费尔巴哈圆。尽管它也通过其他许多有意义的点又通上述各点，但该圆仍以九点圆而著称。此题证明分为两步：首先证明经过各边中点的圆必经过三条高的垂足；再证明经过三条高的垂足的圆必经过垂心到各顶点线段的中点。设$\triangle ABC$的边BC、CA、AB的中点分别为A'、B'、C'，$AD\perp BC$，D为垂足，则易证$DA'B'C'$是等腰梯形，故必是一圆的内接四边形，所以D必在过三边中点A'、B'、C'的圆上。同理可证，另外两条高线的垂足必也在这个圆



上。设$\triangle ABC$的三条高分别为AD、BE、CF，垂心为H，则D、E、F也是$\triangle HBC$的三条高线的垂足，由上述证明这三点与$\triangle HBC$三边的中点在同一个圆上，这就证明了HB、HC的中点必在经过D、E、F的圆



上，同理可证HA的中点也在这个圆上。从而定理得证。由此定理还可得如下的推论：费尔巴哈圆的圆心在欧拉线OH的中点，其半径为三角形外接圆半径的一半。

费马的最短线问题 已知$\triangle ABC$，在它所在的平面上求一点P，使$PA+PB+PC$最小（P点称作最小点），这一个著名的问题是由法国数学家费马向伽里略的学生，意大利物理学家托里拆利提出的，据说托里拆利给出了这个问题的好几种解法，这个问题也有人称为斯坦纳的最短线问题，他对这个问题的提法与上述提法略有不同：一个平面上有不在一直线上的任意三点，A、B、C，在这个平面上求出第四点P，使得$PA+PB+PC$最小，解决这个问题可以分以下三步：首先用反证法证明最小点P不可能在$\triangle ABC$外，如果P点在$\triangle ABC$外，则它必在图1所示的六个区域之

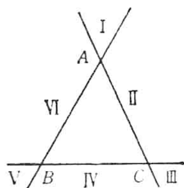


图 1

一中（或它们的公共边界上。若落在区域1中(如图2)，则A点在$\triangle PBC$

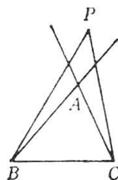


图 2

中，容易证明$AB+AC\leqslant PB+PC<PA+PB+PC$，即$A$点到三顶点距离之和小于$P$点到三顶点距离之和，故$P$点不是最小点。如果$P$点在区域Ⅱ中（如图3），设$PB$交$AC$于$P'$

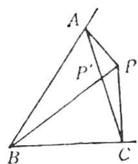


图 3

点，则$P'A+P'B+P'C=P'B+AC<PB+AC<PA+PB+PC$，即$P'$点到三个顶点的距离之和小于$P$点到三个顶点之和，故$P$点不是最小点。当$P$点在其余四个区域时，类似地可以证明$P$点不是最小点。其次，当$\triangle ABC$有一个角不小于120°时，这个角的顶点就是最小点。这可由图4看出：设P是$\triangle ABC$内或边上一

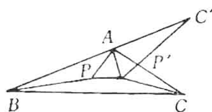


图 4

点，将$\triangle APC$旋转到$\triangle AP'C'$的位置，因为$\angle BAC\geqslant 120°$，所以$\angle PAP'=\angle P'AC'\leqslant 60°$，则$PA+PB+PC\geqslant PB+PP'+P'C>AB+AC$即$P$点到三顶点距离之和大于$A$点到三顶点之和。最后，当$\triangle ABC$三内角均小于120°时，则$P$点在三角形内，且对各边张角都是120°，设$P$是$\triangle ABC$内一点，将$\triangle APC$按逆时针方向旋转60°，到达$\triangle AP'C'$的位置，则$PA+PB+PC=BP+PP'+$

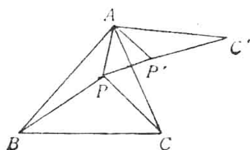


图 5

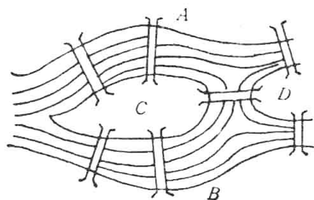
$P'C'$因为这时B、C'两点为定点，所以仅当B、P、P'、C'在同一条直线上时$PA+PB+PC$最小，这时$\angle APB=120°$，$\angle APC=\angle AP'C'=120°$，$\angle BPC=360°-(\angle APB+\angle APC)=120°$，即$P$点对三边张角均为120°。满足这样条件的点叫做费马点。

费马——高斯不可能性定理　证明两个立方数的和不可能为一立方数。这个问题就是要证明方程$x^3+y^3=z^3$不可能有不为零的整数解。这一定理实际上是著名的费马不可能性定理的一种特例。在费马的儿子于1670年编辑出版的关于丢番图算术的书中引用了费马如下的论述："将一个三次方分成两个三次方，将一个四次幂分成两个四次幂，总而言之除了平方外的一个幂分成两个指数相同的幂，都是不可能的。"费马补充道："我发现了这一定理的非常奇特的证明，但由于（书上的）页边狭窄，不能写出"。遗憾的是，费马漏掉了对这一"奇特证明"的揭示。费马以后的许多伟大的数学家，包括欧拉、勒让德，高斯、狄里克雷，库默，以及其他人企图得到这一定理的一般证明的尝试都失败了。费马不可能性定理更加著称于世。如今不可能性定理的证明仅适用于指数n的特殊值。如3到100，但即使这些证明也是非常复杂和困难的。

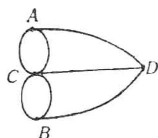
换油调漆　今有漆三得油四，油四和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆。问出漆、得油、和漆各几何？这是《九章算术》盈不足章的第15题。题意是：三份漆可以换四份油，而四份油可以调合五份漆。今有

漆三斗，用其中一部份去换油，恰够用来调和剩余的漆。问换油用去了多少漆？换得了多少油？调和了多少漆？《九章算术》上解这一类盈不足问题的方法叫做盈不足术，即先进行两次假设，并且知道这两次假设的结果，据此就可以推算出所需的答案。这种算法后经阿拉伯人传到西欧，称为“双假借法”。换油调漆的解法是：设取出漆9升，换得油12升，可调和漆15升。9升和15升相加仅有24升，比原有30升，不足6升。又假设取出漆12升，换得油16升，可调和漆20升，12升和20升相加得32升，比30升多余2升。用盈不足术计算，出漆升数应是$\frac{9\times 2+12\times 6}{6+2}=11\frac{1}{4}$升。由此可知“得油”15升，“和漆”$18\frac{3}{4}$升。盈不足术是中国古代数学中的一项创造，用它可以解决一些比较复杂的问题。

哥尼斯堡七桥问题 在十八世纪，东普鲁士有一个城市叫做哥尼斯堡，普雷格尔河流经城内，河中有两个小岛，小岛之间及小岛与河岸之间有七座桥相连（如图所示），问怎样才能一次走完这七座桥，每座桥只经过一次，不能重复，最后回到出发地点。

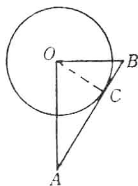


这个问题引起了大数学家欧拉的注意，他经过深入研究，证明了这是不可能的，并为此在圣彼得堡科学院的例会上作了一次饶有兴趣的学术报告。欧拉是把它抽象成一个一笔画问题而加以解决的：用A，B分别表示河两岸，用C、D表示两个小岛，用连接这四个点的七条线表示七座桥（如图），那么原来的问题就变成能



否一笔画出这个图形？所谓“一笔画”，就是从某一顶点出发，画一条线到第二个顶点，再画第二条线到第三个顶点，直到画出最后一条线到某个顶点为止，因此，除去起点和终点外，其余各点都有偶数条线与它相联（这样的点叫做偶点）。若起点和终点重合，则这一点也是偶点，否则起点和终点都是奇点（与奇数条线相联的点），欧拉把由有限条有两个相异端点的线组成的图形叫做网络，若网络中的任意两点都由这样一些线联结起来，这样的网络叫做连通的。欧拉指出：一个网络能够一笔画的充分必要条件是：它连通并且奇点个数等于0或2。人们为了纪念欧拉，把以上结论称为欧拉定理。在哥尼斯堡七桥图中，A、B、C、D四点都是奇点，所以它不能一笔画，即一个人不重复地走遍这七座桥是不可能的。

圆城求径 假令有圆城一所，不知周径。或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之，问径几何？这题是元代杰出数学家李冶所著《测圆海镜》卷七中的第2题。《测圆海镜》是第一部系统地论述中国古代建立数学方程的方法——天元术的著作。其中的170个问题都以测望圆城为题，研究一些已知直角三角形中各线段，进而求其内切圆，旁切圆的直径的问题。李冶对这个问题的解法，用现代数学符号表示为：设x为圆城半径（立天元一为半城径），则OA（股）$=x+135$，OB（勾）$=x+16$。$OA\cdot OB=(x+135)(x+16)=x^2+151x+2160$。$\because AB\cdot OC=OA\cdot OB$，$\therefore$ AB（弦）$=\dfrac{OA\cdot OB}{OC}=x+151+2160x^{-1}$。自乘之，得$AB^2=(弦)^2=x^2+302x+27121+652320x^{-1}+4665600x^{-2}$。①又 $(勾)^2=OB^2=x^2+32x+256$，$(股)^2=OA^2=x^2+270x+18225$，



则 $(弦)^2=(勾)^2+(股)^2=2x^2+302x+18481$。② ①—②得 $-x^2+8640+652320x^{-1}+4665600x^{-2}=0$，即 $-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$。
解之，得$x=120$，即圆城半径。

高斯的代数基本定理 每一个n次的方程$z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_n=0$具有$n$个根。该定理可以更确切地表示为：多项式$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_n$总是可以分成形式为$z-\alpha i$的$n$个线性因子。代数基本定理是一个有名的定理，首先于1746年由德·阿朗拜发表，但只作了部分的证明。一个严密的证明是1799年由21岁的高斯在他的博士论文中作出的。其后高斯又给出了这一定理的另外三种证明。高斯以后的其他作者，包括阿甘达、柯西、厄尔赫尔、维尔斯特拉斯、克罗莱克等也给出了该基本定理的证明。该定理的证明一般分为两步，第一步也是较难的一步，仅仅证明一个n次方程总是包含至少一个根；第二步证明该方程有n个根，且没有更多的根。

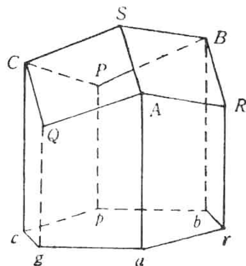
韩信点兵 今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？这是世界闻名的“孙子问题”，最早出现在我国《算经十书》之一的《孙子算经》中，据说我国汉代大将韩信，每当部队集合时，他只要求部下士兵依次按照1—3，1—5，1—7报数，每次报数后报告报数的余数，便可知部队集合的人数，因而此问题得名“韩信点兵”。明朝程大位在他所著的《算法统宗》里用诗歌给出了该问题的解法：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆月正半，除百零五便得知”。其意思是：把用3除所得余数乘以70，加上用5除所得余数乘以21，再加上用7除所得余数乘以15，结果如比105大，则减去105的倍数，即得所求之数。这一解法与著名数学家高斯的定

理是一致的，它被称为“中国剩余定理”或“孙子剩余定理”。

鲁卡斯的配偶夫妇问题 n对夫妇围圆桌而坐，其座次是两个妇人之间坐一个男子，且没有一个男子与自己的妻子相邻，问有多少种坐法？这个问题于1891年（大概是首次）出现于法国数学家鲁卡斯的书《数论》中，英国数学家贝尔对该题的评价是“解这个题决非易事“。法国人莱桑和莫赫，英国人泰勒都解过这个题，英国人麦克马洪则给出了基于现代观点的解法，把从1到$2n$张循环排列的椅子上依次编上号码，妇人们全都坐在偶数或奇数号码的椅子上，这两种情况中无论哪一种都可能有$n!$种不同的座次排列，因此仅妇人们就有$2n!$种不同的座次排列。设有A_n种方法在妇人们之间安排男子们入座。那么关键在于求A_n。而求A_n的方法是建立了如下的莱桑递推公式$(n-1)A_{n+1}=(n^2-1)A_n+(n+1)A_{n-1}+4\cdot(-1)^n$，且$A_3=1$，$A_4=2$。

蒙日问题 画一个圆，使它与三个已知圆正交（两圆过交点的两半径互相垂直）。法国数学家蒙日是画法几何的创始人。为了解这个题，要求与两个已知圆正交的所有圆的圆心的轨迹：设两个已知圆的圆心为K和K'，它们的半径为k和k'（假设$k<k'$），两圆的连心线$KK'=l$，令X和x分别表示与两个已知圆正交的圆的圆心和半径，设连心线$KX=d$，$K'X=d'$，则$d^2-k^2=d'^2-k'^2=x^2$，这时我们说两个已知圆在X点同幂。根据等幂轴定理，对两个已知圆具有同幂的点的轨迹是一条垂直于两个圆的连心线的直线。并被称之为两个圆的等幂轴。要作出两已知圆的等幂轴，分以下两种情况：（1）两圆相交时，经过两圆交点的直线就是它们的等幂轴。（2）两圆不相交时，作等幂轴的根据是蒙日定理：三个圆的三条等幂轴交于一点（三个圆的幂中心点），作与两圆都相交的圆，这个圆分别与两圆的两等幂轴交于一点，过这一点且与两已知圆的连心线垂直的直线即为所求的等幂轴。由此得与两已知圆正交的所有圆的圆心的轨迹是两已知圆的等幂轴，或者两圆相交时则是等幂轴在已知圆外的部分。现在蒙日问题的解变得很简单了，画出三个已知圆的幂中心点O，若O在三个圆的外面，圆心为O，半径为O到任一个已知圆的切线长的圆即为所求的圆（它与各已知圆皆正交。若O至少在一个已知圆中时，这个题便无解）。

雷阿乌姆尔的蜂巢问题 试采用由三个全等的菱形作成的顶盖来封闭一个正六棱柱，使所得的这一个立体有预定的容积，而其表面积为最小。如图设这个棱柱的横截面正六边形$arbpcq$边长为$2e$，于是较短的对角线$ac=$



$bc=ca=2d=2e\sqrt{3}$。同时也有 $AB=BC=CA=2d=2e\sqrt{3}$。设平面PQR及顶盖顶点S到平面ABC的距离为x，而菱形的短对角线（$SP=SQ=SR$）为$2y$。因为$SR=2y$在棱柱轴上的投影为$2x$，在平面PQR的投影为$2e$，我们得到方程$y^2=e^2+x^2$。如果P_1、Q_1、R_1是通过P_1Q_1R的棱柱的侧棱与平面ABC相交的点，则$AR_1BP_1CQ_1$是边长为$2e$的正六边形。首先，当选用上述屋顶似的顶盖来代替封闭平面$AR_1BP_1CQ_1$时，显然六棱柱的容积是不会改变的。这是因为在平面ABC一侧所增加的空间（棱锥$S—ABC$）与在其另一侧所减去的空间（三个棱锥$P—BCP_1$、$Q—CAQ_1$，$R—ABR_1$）是同样多的，只是表面面积随着结构的改变而改变：表面积减少了六边形$AP_1BQ_1CR_1$的面积的$6e^2\sqrt{3}$，以及六个直角三角形PP_1B，PP_1e，QQ_1C，QQ_1A，RR_1A，RR_1B的面积——共$6ex$，但同时表面增加了三个菱形$PBSC$，$QCSA$，$RASB$的总面积，即$6dy=6e\sqrt{3}y$，从而表面积节省了$6e^2\sqrt{3}+6ex-6e\sqrt{3}y$，或$6e^2\sqrt{3}-6e[y\sqrt{3}-x]$、现在的问题是为使式中的括号$u=y\sqrt{3}-x$取最值$x$应取何值，若令$v^2=x\sqrt{3}-y$，则$u^2-v^2=2(y^2-x^2)=2e^2$或$u^2=2e^2+v^2$。由此推出当$v=0$时，即当$y=x\sqrt{3}$时，$u$取最小值$e\sqrt{2}$，

由此得到$x=e\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=e\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

从而对角线$SR=2y=e\sqrt{6}$小于对角线$AB=2d=2e\sqrt{3}$。所以在S点毗邻的三个菱形的角都是钝角。如果我们以2φ表示菱形的锐角SAR，那么根据$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{d}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$与$\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$，就可推得$\operatorname{tg}2\varphi=2\sqrt{2}$，

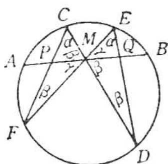
$\cos2\varphi=\dfrac{1}{3}$，$2\varphi=70°32'$，从而菱形的钝角为$109°28'$。以上计算的结果已被对蜂巢的实际测量（在观测误差范围内）所证实。特别有趣的是还可以进一步证明每两个相邻的面都构成$120°$的二面角。

锯木求径 今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯出，深一寸，锯道一尺，问径几何？这个题是《九章算术》勾股章的第9题。若设圆材的半径为x寸，根据题意得$x^2=(x-1)^2+5^2$，解之得$x=13$，即圆材直径为26寸。原书中完全是几何方法解得的。

隙积术 设一个长方台垛积的顶层宽（上广）为a个物体，长为b个，底层宽（下广）为c个，长为d个，高共有n层，求整个垛积所堆积的物体个数总和。这题由沈括提出，并给出解法，把沈括计算总数的方法写成公式，就是$S=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+(c-1)(d-1)+cd=\dfrac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\dfrac{n}{6}(c-a)$。至于沈括是用什么方法求得这一公式的，《梦溪笔谈》中没有详细说明，很可能是对不同长宽高的垛积进行了多次实验，用归纳的方法

得出的。因为这堆东西里面有虚隙，所以积这种算法为隙积术。这是一个二阶等差级数问题，自从沈括开辟了这一研究方向以后，南宋的杨辉和元代的朱世杰，又对高阶等差级数作了更深入的研究。

蝴蝶定理 过圆O的弦AB的中点M引任意两弦CD和EF，连CF和ED交弦AB于P、Q，求证$PM=MQ$。



此题因图形形状象蝴蝶而得名。据说该题是1815年一份通俗杂志“男士日记”上的征解题，而最早的证明是给出求多项式方程近似根的“霍纳法（中国叫做贾宪法）”的英国数学家于1815年给出的，后来又有过许多长短不一，难易不同的证法。下面的证法是根据1973年美国中学教师斯特温所给出的证法，再由我国中学教师张树生改进而得的：四对等角α，β，γ，δ如图所示，设$PM=x$，$MQ=y$，$AM=MB=a$，由正弦定理得

$$\frac{PM}{\sin\alpha}=\frac{CP}{\sin\delta},\quad \frac{QD}{\sin\delta}=\frac{MQ}{\sin\beta},$$

$$\frac{EQ}{\sin\gamma}=\frac{MQ}{\sin\alpha},\quad \frac{PM}{\sin\beta}=\frac{PF}{\sin\gamma}。$$

将以上四式左右两端分别相乘，并约分，得$EQ\cdot QD\cdot PM^2=CP\cdot PF\cdot MQ^2$，①由相交弦定理$CP\cdot PF=AP\cdot PB=(a-x)(a+x)=a^2-x^2$，$EQ\cdot QD=AQ\cdot QB=(a+y)(a-y)=a^2-y^2$代入①式得$(a^2-y^2)x^2=(a^2-x^2)y^2$，因$x$、$y$均大于零，得$x=y$，即$PM=MQ$。

德布封的针问题 在台面上画出一组间距为d的平行线，把长度为l（小于d）的一根针任意投掷在台面上，问针触及两平行线之一的概率如何？如果设所求的概率为W，则可求得$W=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{l}{d}$。这个引人注目的问题是由勒克莱克和第一个用几何形式表达概率问题的德布封提出的。沃尔夫于1850年在苏黎士得出了用所得公式计算π的原定目的。通过实验，用一根长36毫米的针，平行线间距为45毫米，投掷很多次(5000)后，他得到概率W近地为0.5064，并得到$\pi=\frac{2l}{dW}=3.1596$。英国人史密斯与福克斯重复了这一实验，分别投掷了3200次和1100次，求得π值为3.1553与3.1419。

德·梅齐里亚克的砝码问题 一位商人有一个40磅的砝码，由于跌落在地而碎成4块，后来，称得每块碎片的重量都是整磅数，而且可以用这4块来称从1至40磅之间的任意整数磅的重物。问这4块砝码碎片各重多少？本题来源于法国数学家德·梅齐里亚克，在1624年出版的他的名著中，解答了这个题目。解答本题的关键在于在天平的砝码盘上只放砝码，而在称量盘上放重物外还可附加砝码。假如有一系列砝码A，B，C，…，把它们适当地分放在两个盘上，就能称出从1到n的所有整数磅的重物，如果

有一块新砝码P，它的重量P超过原有砝码的重量总和n，超过量为原有砝码重量总和加1：$p-n=n+1$，即$p=2n+1$，那么，把砝码P加入砝码组A，B，C…之后就能称出从1至$p+n=3n+1$的所有整数磅的重物。由此可知第一块砝码的重量为1磅，用它只能称量1磅的重物。第二块砝磅的重量为$2\times1+1=3$磅，用这两块砝码可以称量1至4磅的重物。第三块砝码的重量为$2\times4+1=9$磅，用这三块砝码可以称量1至13磅的重物。第四块砝码的重量为$2\times13+1=27$磅，用这四块砝码可以称量1至40磅的重物。而这四块砝码的重量的总和恰好为40磅。英国数学家麦克马洪概括）德·梅齐里亚克的砝码问题，它确定了可用来称量从1至n磅重量的所有可能的整磅数砝码。

其　它

数学竞赛　最早可追溯到古希腊求解几何三大作图题（化圆为方、倍立方体、三等分角），追溯到我国战国时期齐威王与大将田忌赛马等活动。在欧洲，历史上也有不少关于数学竞赛的记载。十六世纪初意大利数学家多次举行解三次、四次方程的竞赛就是一例。其中最有名的记载是1535年2月22日塔尔塔利亚与菲俄在米兰大教堂举行的解三次方程的大赛，结果前者大获全胜。近代，最早举办中学生数学竞赛的是匈牙利。到五十年代，数学竞赛已在若干国家开展。据不完全统计，先后有罗马尼亚、保加利亚，波兰、捷克斯洛伐克、民主德国、苏联、南斯拉夫、荷兰、越南、蒙古、英国、芬兰、以色列、加拿大、希腊、联邦德国、澳大利亚、美国等。1959年国际数学奥林匹克竞赛（“IMO”）开始举办。一年一度，至今曾未间断。在我国著名数学家华罗庚、苏步青等的热心倡导和组织下，北京、上海、天津、武汉于1956年举行了第一届中学生数学竞赛。后来，一些省市也陆续举办过几次。“十年动乱”期间，此活动被迫中断十三年；全国性数学竞赛始于1978年，从1981年起每年举行一次。

国际数学奥林匹克　简称“IMO”。这是为中学生举行的国际竞赛。其目的：一是为发掘鼓励各国中学生的数学天才；二是为了促进各国师生的国际交往和加深友谊；三是为交流各国数学教学的经验和资料。由于它与体育比赛精神相似，故称数学奥林匹克。1956年罗马尼亚的罗曼教授发起成立国际数学奥林匹克，1959年在罗马尼亚举行了首届比赛。自此每年举行一次，参加国和人数逐年增加。国际数学奥林匹克竞赛规定：(1)每个国家和地区最多只能有六名学生参赛；（2）竞赛分两次进行，每次四个半小时，回答三个数学难题，两次共六题；(3)每题满分7分，42分为满分。竞赛的题目最初由参赛国家及地区提供，最多不超过六题，交主办国初步筛选，再

由各国领队组成“立试委员会”修改和挑选出的六题为竞赛题，先用英、法、德、俄四种文字定稿，再由各国领队译成本国文字付印。为了保密，各国领队在竞赛前不能与该国副领队及队员接触。竞赛开始前30分钟，学生可以用书面形式提出疑问，再由“立试委员会”讨论如何答复。竞赛后，各国领队对本国学生的试卷评分，并由主办国数学家组成“协调委员会”来协调各国评分标准。成绩评定后，由“立试委员会”制定金牌、银牌、铜牌的分数线。

我国参加国际数学奥林匹克竞赛情况简介 1985年7月我国首次派代表参加了在芬兰举行的第26届国际数学奥林匹克竞赛。参赛的队员是北京大学附中王锋和上海向明中学吴思皓。比赛结果吴思皓获三等奖，列参赛209名学生的第76名，王锋名列第127名。

1986年7月8日至7月14日第27届国际数学奥林匹克竞赛在波兰首都华沙举行。37个国家和地区派代表参加了比赛。我国参赛的队员共六人，领队是中国数学会副理事长王寿仁，副领队兼教练是中国数学会普及工作委员会副主任裘宗沪副研究员。中国队以177分的总成绩名列第四。其中，河南郑州实验中学方力民、上海大同中学张浩、天津南开中学李平立三人同获一等奖；西安85中荆秦(女)获二等奖；湖北黄冈中学林强获三等奖。

1987年7月5日至7月16日第28届国际数学奥林匹克竞赛在古巴首都哈瓦那举行。共44个国家和地区的237名中学生参加了比赛。我国参赛队员共六人，领队是中国数学会普及工作委员会主任梅向明教授，副领队仍然是中国数学会普及工作委员会副主任裘宗沪副研究员。中国代表队取得了总分200分的好成绩，参赛的六名队员全部获奖。其中，北京大学附中滕俊（女）、湖南湘阴一中刘雄同获金牌；上海向明中学潘子刚、湖南黄冈中学林强同获银牌；北京大学附中高峡、广东华南师范大学附中何建勋同获铜牌。

1988年7月9日至7月21日第29届国际数学奥林匹克竞赛在澳大利亚首都堪培拉举行。参赛国家和地区共49个，学生268人，我国参赛队员六名，领队是中国科技大学常庚哲教授，副领队兼教练是复旦大学舒五昌副教授。我国代表队以201分的总分与罗马尼亚并列第二，参赛的六名队员全部获奖。其中，四川彭县中学何宏宇以满分42分（与其他四人并列为第一名）、上海复旦大学附中陈晞以41分（与另外一人并列为第六名）各获金牌一块；另外，韦国恒、邹钢均以30分，王健梅、查宇涵均以29分各获银牌一块。

1989年7月13日至7月22日第30届国际数学奥林匹克竞赛在联邦德国不伦瑞克举行。50个国家和地区的291名学生参加了比赛。中国队以237分的总分名列第一，参赛的六名队员全部获奖。其中，四川重庆永川中学罗华章得42分，江西景德镇景光中学霍晓明、新疆石河子五中蒋步星、东北师范大学附中俞杨三人均得41分，四人都获金牌；四川成都九中唐若曦、中国人民大学附中颜华菲（女）各得37分和35分，均获银牌。

菲尔兹奖　最高国际数学奖，同诺贝尔奖一样享有盛名(诺贝尔奖中不设数学奖)。每四年在国际数学家代表大会开幕式上颁发一次，授予在数学领域作出卓越贡献的年龄在四十岁以下的青年数学家。菲尔兹（1863—1932）是加拿大数学家，不仅在代数函数研究中多有建树，而且具有远见卓识的科研组织能力。他作为1924年多伦多国际数学家大会的领导者，建设用会议剩余的经费设立国际数学奖，并在自己的遗嘱里捐赠了数量相当可观的资金。1932年在苏黎世举行的国际大会上，菲尔兹的建议被接受。1936年在奥斯陆举行了第一次授奖仪式，至今菲尔兹奖已颁发十一届，获奖者已达三十名。

菲尔奖获得者　1936年在奥斯陆举行了第一次授奖仪式，获奖者为阿尔福斯、道格拉斯。

1950年在坎布里奇举行第二次授奖仪式，获奖者为施瓦兹、塞尔伯格。

1954年在阿姆斯特丹举行第三次授奖仪式，获奖者为小平邦彦、塞尔。

1958年在爱丁堡举行第四次授奖仪式，获奖者为罗特、托姆。

1962年在斯德哥尔摩举行第五次授奖仪式，获奖者为赫尔曼德、米尔诺。

1966年在莫斯科举行第六次授奖仪式，获奖者为阿蒂亚、科恩、格罗唐迪克、斯梅尔。

1970年在尼斯举行第七次授奖仪式，获奖者为贝克、广中平佑、诺维科夫、汤姆森。

1974年在温哥华举行第八次授奖仪式，获奖者为芒福德、邦别里。

1978年在赫尔辛基举行第九次授奖仪式，获奖者为德利涅、费弗曼、马尔古里斯、奎伦。

1982年在华沙举行第十次授奖仪式，获奖者为高恩内、瑟斯顿、丘成桐。

1986年在美国加州举行第十一次授奖仪式，获奖者为当纳尔桑（英国）、法尔丁斯（西德）、富瑞得曼（美国）。

湖南科学技术出版社1984年已出版了由胡作立、赵斌编写的《菲尔兹奖获得者传》。传记收集了到1982年为止的27位获奖者的生平和工作，向人们展示了数学成功之路。

陈省身数学奖　我国第一次设立的数学奖。为了奖励我国数学工作者突出的学术成就，加速数学研究及其应用的发展，促进社会主义现代化建设，香港亿利达（Elite）工业发展集团有限公司于1985—1987三年间，每年捐助人民币壹万元，授予近五年内发表的最佳数学研究成果的作者。得奖人必须在国内从事数学教学或科学研究的数学工作者，以中青年为主。其学术论文应是公开发表后在国内外已有评论，公认为优秀的科研成果。中国数学会受托建立“陈省身数学奖”评选委员会，负责初审后请奖项目的评定工作。1985年3月26日中国数学会常务理事会四届四次会议通过了《“陈省身数学奖”奖励条例》，以及以中国数学会理事长吴文俊主任委员的七人评奖委员会名单，他们是：吴文俊、王元、谷超豪、程民德、胡

国定、冯康、段学复。由于准备时间仓促，1985年度奖与1986年度奖同时评选。在推荐单位或个人初审的基础上，评奖委员会进行认真评审，再由全体评奖委员用无记名投票方式决定得分最高的前两名，最后经陈省身教授审阅同意，于1987年2月评选揭晓：获1985年度奖的是中国科学院数学研究所研究员钟家庆（49岁）；获1986年度奖的是北京大学数学研究所教授张恭庆（51岁）。1987年5月6日，在陈省身教授执教五十周年之际，中国数学会在天津南开大学举行了“陈省身数学奖”首届颁奖仪式，由陈省身教授亲自颁奖。令人遗憾和痛心的是，第一位获奖人钟家庆教授于颁奖前二十四天猝然病故。另外，获1987年和1988年陈省身数学奖的分别为中国科学院系统所研究员李邦河(1942年7月生)和北京大学数学系教授兼南开数学研究所副所长姜伯驹。

钟家庆纪念基金 钟家庆是我国首届“陈省身数学奖”获得者，但未能参加颁奖仪式而猝然病故。生前他非常关心我国数学事业的发展，对赶超国际先进水平表现出极大的关注，并且常年奔波，努力指导研究生，使他们能够顺利成长。国内外数学家深为他“要把丝吐在祖国”，为推动中国数学教育鞠躬尽瘁，死而后已的精神所感动。为了纪念这位英年早逝的优秀数学家，他去世后，我国有关的专家和一些在美国的华裔数学家、钟家庆的亲属及生前友好共同发起一项“钟家庆纪念基金”的募集活动。募集的重点对象是大学、研究机构及企业单位，同时也欢迎个人捐助。“钟家庆纪念基金”执行委员会由中国科学院数学研究所所长杨乐教授、中国科技大学副校长龚升教授、北京大家数学研究所副所长张恭庆教授等组成。基金将分为两部分：一部分用于举办钟家庆纪念讲座，每年一次邀请国内外著名数学家，主要讲授钟家庆研究的两个方向，即多元复变函数论和微分几何；另一部分用于“钟家庆数学奖金”，每年一度颁奖，奖励我国取得创造性成果的数学学科的优秀研究生。

数学期刊发展概况、趋势和特点

一、国外数学期刊的发展概况

在数学期刊创刊之前，有关数学学术的文章只能刊登在综合性自然科学期刊或哲学汇刊上，而且此类文章数量较少。十九世纪20年代到十九世纪末是数学期刊的初创时期。1826年德国数学家克雷尔创办了世界上第一份数学杂志《纯粹与应用数学杂志》，又名《克雷尔杂志》。1836年法国数学家列维叶又创办了法文《纯粹与应用数学杂志》，即《列维叶杂志》。到十九世纪末全世界共有数学期刊36种，但主要分布在美、法、德、意、英等国。从1900年到1940年数学期刊稳步增长，由36种增加到87种。1940年以后数学期刊发展迅速，据1988年以前的统计，目前国外数学期刊总数已多达460多种，共有45个国家出版数学期刊。

二、我国数学期刊的发展概况

在“五四”新文化运动影响下，我国开始创办数学期刊。1930年初，北师大第一个创办了数学专业杂志《数学季刊》，1933年武汉大学又创

办了《中学算术月刊》。1935年中国数学会成立，第二年出版了《中国数学会学报》（1939年停刊）和《中国数学杂志》。新中国成立后，中国数学会复会，1951年11月《中国数学杂志》出版，1953年改名为《数学通报》。1951年3月《中国数学学报》复刊，1952年改名为《数学学报》。1955年5月中国数学会又出办了《数学进展》。从50年代初到"文化大革命"前，我国共出版中、高级数学期刊9种。"文革"后，我国的数学期刊发展迅速，据1988年以前的统计，我国共有数学期刊46种。另外，许多高校的学报也都散登数学论文。

三、数学期刊发展的趋势和特点

由于数学分支的增加，数学分支学科专业性期刊出现并激增；国际性的数学期刊猛增；各种类型的数学期刊，如各种消息性、情报性刊物，专业性通讯刊物，各种《研究报告》，电子计算机排版的期刊，各种会议报导性期刊争相出版；数学期刊日益商品化；一些著名的、古老的数学期刊仍具有强大的生命力；英语已成为国际数学期刊的主要语言。

国内中小学数学教学期刊简介　《数学通报》中国数学会、北京师范大学编辑，北京师范大学出版社出版。月刊。

《中学生数学》中国数学会普及工作委员会、北京市数学会、北京师范学院数学系编辑，测绘出版社出版。双月刊。

《中小学数学》《中小学数学》编委会编，地质出版社出版。月刊。

《数学教学》华东师范大学《数学教学》编辑部编辑，华东师范大学出版社出版。双月刊。

《上海中学数学》，原名《中学数学教学》上海师范大学数学系编辑出版。双月刊。

《中等数学》中国数学会普及工作委员会、天津市数学学会、天津师范大学数学系主办，《中等数学》杂志编辑部编辑出版。双月刊。

《中学数学杂志》山东省高师院校数学教育研究会、曲阜师范大学主办，《中学数学杂志》编委会编辑出版。双月刊。

《中学数学教学》安徽教育学院、安徽师范大学数学系、安徽省数学学会主办，《中学数学教学》编委会编辑出版。双月刊。

《中学数学》江苏省数学会、苏州大学数学系主办，《中学数学》编辑部编辑出版。月刊。

《中学数学文摘》江苏扬州师范学院数学系、扬州市数学学会主办，《中学数学文摘》编辑部编辑出版。月刊。从1990年起已停刊。

《教学月刊——中学理科版》《教学月刊》编辑部编辑，浙江教育学院出版。月刊。

《福建中学数学》福建省数学学会、福建师范大学数学系主办，《福建中学数学》编辑部编辑出版。双月刊。

《中学生数理化（高中版）》中国数学会、中国物理学会、中国化学会为顾问单位，《中学生数理化》编辑部编辑，河南教育社出版。月刊。

《中学生数理化（初中版）》中国数学会、中国物理学会、中国化学

会为顾问单位，《中学生数理化》编辑部编辑，河南教育社出版。月刊。

《数学教师》中国教育学会数学教学研究会为顾问单位，《数学教师》编辑部编辑出版。月刊。

《数学通讯》湖北省数学学会、武汉数学学会、华中师范大学合编，《数学通讯》编辑部编辑出版。月刊。

《中学数学》湖北大学、湖北省教育学会中学数学教学研究会合办，《中学数学》编辑部编辑出版。月刊。

《湖南数学通讯》《湖南数学通讯》编辑部编辑出版。双月刊。

《中学数学研究》华南师范大学数学系《中学数学研究》编辑部编辑出版。月刊。

《中学理科参考资料》广西教育学院主办，《中学理科参考资料》编辑部编辑，教学参考资料杂志社出版。月刊。

《中学数学教学参考》陕西师范大学《中学数学教学参考》编辑部编辑，《中学教学参考》杂志社出版。月刊。

《数学教学通讯》重庆市数学学会、西南师范大学数学系编辑，《数学教学通讯》编委会编辑出版。双月刊。

美国中学数学教学期刊简介　《美国数学月刊》1894年创刊。是美国创办较早的数学期刊之一。小刊名为“美国数学协会正式刊物”，由美国数学协会编辑出版，年出10期。主要刊登数学各分支的研究论文，论文中包括数学的历史、数学家传记、数学教育、数学教学研究等内容，除论文外，还有数学笔记、课堂札记、问题与解答等专栏。我国的数学教学期刊中，常载有译自该刊的文章，这是我国数学教育界常阅读的外刊之一。

《数学教育研究杂志》1970年创刊。由美国全国数学教师联合会编辑出版，年出5期。刊载从小学、中学到大学各级各类学校有关数学教育、数学教育方面的研究文章、研究报告，以及文献评论和简报等内容。

《数学史》1974年创刊。是国际哲学与历史科学联合会历史科学分会数学史委员会编辑的国际性刊物，由美国学术出版公司出版,季刊。该刊主要刊载数学史有关方面的研究论文和评论，内容包括数学家、数学史家的传记，编史，以及数学活动与其他文化和社会的相互作用等。稿件来自各国，多用英文，也间用德、法、俄文发表。

《数学杂志》1926年创刊。美国数学协会编辑出版，年出5期。主要刊载有关大学、中学数学教学方面的文章，兼登简讯和书评。

《数学教师》1908年创刊。是美国全国数学教师联合会编辑出版的机关刊物，月刊。主要刊载中学和大学的数学教学问题，以及数学研究进展等方面的文章，内容包括对若干专题的探讨，交流教学、教材编写的经验等。

《学院数学杂志》1970年创刊。原称《二年制学院数学杂志》，1985年后改称现名，由美国数学协会编辑出版，年出5期。主要刊载高等数学教学方面的研究论文，内容涉及基础

数学理论、几何学、组合学、统计学、工程数学，以及教育学等。

英国数学教学期刊简介 《数学杂志》1894年创刊。是英国最早刊载数学教学内容的杂志。由英国数学协会编辑出版和订购季刊。主要刊载初等、中等数学知识及其教学法方面的文章和简讯。

《数学世界》1968年创刊。由英国数学世界社编辑，英国应用概率研究会出版、订购，1年出3期。是供中学及大学的数学专业学生及一般读者阅读的中级数学刊物。主要刊载纯粹数学、应用数学、统计学、运筹学、计算机科学及生物数学等方面的文章，内容较通俗易懂。

《国际科学与技术中的数学教育杂志》1970年创刊。由英国泰勒和弗朗西斯出版公司出版、订购，双月刊。该刊从科技、工程的实际需要角度讨论数学教育问题，主要刊载这方面的研究文章、书评、经验介绍和会议报道，涉及到数学模型、计算机应用、新的教育辅助设备和技术等。

《结构研究杂志》1970年创刊。由国际数学学习研究组编辑，英国戈登和布里奇科学出版公司出版、订购，季刊。主要刊载研究数学概念与学习过程方面的理论，模型、语言、逻辑等复杂结构研究的文章。

《数学及其应用数学》1982年创刊。由英国数学及其应用学会编辑，英国牛津大学出版社出版、订购、季刊。主要刊载与中等和高等学校数学教学有关的数学问题、教学方法等方面的问题。

《微计算机数学》1985年创刊。由英国 Basil Blackwell 出版、订购，年出3期。主要刊载有关运用微计算机解数学问题，及微计算机在数学教学中的应用等方面的文章。

《学校数学》1971年创刊。英国数学协会编辑，英国朗曼集团出版公司出版、订购，年出5期。该刊是中小学数学教师的教学参考刊物，主要介绍数学教科书、数学教学法及数学知识、趣味数学和数学词汇等。

《数学教学》1956年创刊。由英国数学教师协会编辑出版、订购、季刊。主要刊载讨论英国中小学各年级数学教学问题，兼载数学教具和教学设备介绍以及书评等。

联邦德国数学期刊简介 《数学益智》1978年创刊。西德施普林格出版社出版、订购，季刊。属中级数学知识性刊物。主要刊载过去和现在引起人们兴趣的数学原理、见解、争论、人物、历史、趣题等方面的论述和资料，该刊文章均用英文发表。

《数学教程》1955年创刊，西德恩斯特·克勒特出版社出版、订购，双月刊。主要刊载研究与介绍数学及其方法等方面的问题，适合于中学数学教师及中学生阅读。

《数学实践》1959年创刊。西德奥利斯出版社与多伊纳出版公司出版、订购，月刊，该刊属数学教学通俗刊物，主要刊载理论数学与应用数学，以及有关数学教学方面的文章。

《数学教学法》1973年创刊。西德巴伐利亚教科书出版社出版，订购，季刊。属数学教学法和教学实践的专业杂志，主要刊载中学数学教学实践，以及有关的数学原理等方面的

文章。

《数学教学法文献》1978年创刊，双月刊。该刊主要摘录书刊等出版物发表的有关数学教学法方面的文献，并刊载数学教学方面的文章。

建国以来的中小学数学教学大纲简介

1952年8月在教育部组织的《中小学各科教学大纲起草委员会》中，由北京、上海、东北共12名代表组成的中学数学组，编订了我国解放后的第一个《中学数学教学大纲(草案)》。这个大纲的指导思想主要是学习苏联数学教育的经验，明确了数学教学目的、内容和要求。此大纲是1952年秋颁发全国各中学开始试用的。从此在全国范围内，全面使用编译的苏联中学数学教材。1954年10月教育部制订了我国解放后的第二个《中学数学教学大纲（修订草案）》，在说明中对思想教育任务作了修订，并对前一个大纲中数学教学的具体要求作了适当的补充。为配合大纲，人民教育出版社根据苏联十年制数学课本，编写了解放后我国第一套中学数学课本。1956年教育部又制订了解放以来的第三个《中学数学教学大纲(修订草案)》。在“说明”中对数学教学目的进行了修订，并在大纲中第一次明确提出了在数学教学中要发展学生的“逻辑思维和空间想象力”。1961年10月教育部制订了《全日制中小学教学大纲（草案）》，这是建国以来制订的第四个大纲。此大纲总结了多年来的数学教学经验，首次提出了“教学上应该注意的几点“：（1）突出重点、抓住关键、解决难点；（2）讲清概念、揭示规律；（3）加强学习和练习，注意因材施教；（4）恰当地联系实际，不能过分强调和勉强联系，以致削弱基础知识和基本技能。这个大纲把初一算术完全下放到小学，平面几何完全下放到初中，高中增加了平面解析几何和概率初步，在数学知识的水平上比过去的大纲都有提高。根据此大纲，人民教育出版社编写了十年制中小学数学教材和教学参考书。1963年5月教育部又制订了《全日制中学数学教学大纲（草案）》，这是建国以来的第五个数学教学大纲。此大纲首次在“教学目的和要求”中提出要培养学生的“三大能力”：“培养学生正确而且迅速的计算能力，逻辑推理能力和空间想象力”。教学计划规定了中小学数学为十二年制，人民教育出版社编写了十二年制中小学数学教材，一直使用到“文化大革命”前。1978年4月全国教育工作会议后，教育部制订了建国以来的第六个数学教学大纲，即《全日制十年制中学数学教学大纲（试行草案）》，并编写了新数学教材。新大纲根据数学教育现代化问题，提出了新的教学目的；在数学内容上，从精简传统数学内容，增加近代数学初步知识和渗透现代数学的基本思想这三个方面来加强中学数学基础知识，实现数学教学内容现代化；在数学教学进度上，把初中数学提高到讲完二次函数、二次不等式，并把高中数学提高到微积分的程度。从1980年开始，教育部讨论制订了《六年制重点中学数学教学大纲(草稿)》，这是建国以来的第七个数学教学大纲。1983年，为了从实际出发，大面积提高教

学质量，教育部在11月又颁发了高中数学两种要求的数学纲要。对二年制普通高中提出了“基本要求”，对三年制重点高中提出了“较高要求”。在教材方面，既有五年制普通中学的统编数学教材，还有六年制重点中学的数学教材。为了吸取国内外数学教材的长处，适应数学教育现代化的要求，各地已编出并正在实验的中学数学教材还有多种。

中学数学教学工具书简介 一、辞（词）典类

《代数学辞典(解题中心)》〔日〕长泽龟之助原著，薛德炯、吴载耀编译。上海科学技术出版社1959年10月第1版。

《算术辞典（解题中心）》〔日〕长泽龟之助原著，薛德炯、吴载耀编译。上海科学技术出版社1959年10月第1版。

《数学小词典》陈通鑫、刘嘉琨、王占元、方金秋编。测绘出版社1982年5月出版。

《数学小辞典》王文才、施桂芬编。科学技术文献出版社1983年2月第1版。

《数学解题辞典》《数学解题辞典》编委会编。上海辞书出版社1983年6月第1版。

《简明数学辞典》陈森林主编。湖北人民出版社1984年1月第1版。

《中学生数学辞典》戴春陶等编。内蒙古人民出版社1983年6月第1版。

《中学数学词典》娄桐城编著。知识出版社1984年12月第1版。

《中学实用数学辞典》乔荣凝、张鸿菊编。北京科学技术出版社1985年10月第1版。

《中学科技百科辞典》吴浩源主编。科学技术文献出版社重庆分社1985年12月出版。

《中学数学词典》《中学数学词典》编写组编。甘肃人民出版社1986年3月第1版。

《中学数学实用辞典》梁宗巨、王鸿钧主编。辽宁教育出版社1987年5月第1版。

《代数学辞典（问题解法上）》〔日〕世部贞市郎编，蒋声、沈宗华、庄亚栋、宫德林、佟金铭译。上海教育出版社1982年9月第1版。

《代数学辞典（问题解法下）》〔日〕世部贞市郎编，张明梁、周如钰、斯章梅译。上海教育出版社1982年12月第1版。

《几何学辞典（问题解法）》〔日〕世部贞市郎编，陈秉跃、高清仁、方福昌、舒玉兴、胡广春、陈传理、浅见召次世译。上海教育出版社1984年8月第1版。

《解析几何学辞典(问题解法)》〔日〕世部贞市郎编、关桐书、李开成、刘正一、董嘉礼、李开功、杨如茹译。上海教育出版社1985年11月第1版。

《三角学辞典（问题解法）》〔日〕世部贞市郎编，肖禾编译。上海教育出版社1983年11月第1版。

《中国中学数学教学辞典》郑启明主编，魏柏良、谢庭藩、赵振威副主编，浙江科学技术出版社出版。

二、手册类

《数学手册》《数学手册》编写组编。人民教育出版社1979年11月第

1版。

《大学数学手册》郭大钧主编。山东科学技术出版社1985年9月第1版。

《中学实用数学手册》曹彬、李万年编著。科学普及出版社1985年11月第1版。

《中学数学教师手册》《中学数学教师手册》编写组编。上海教育出版社1986年5月第1版。

《初等数学手册》周又之编著。新时代出版社1986年9月第1版。

《数学公式手册》H·J·巴茨著，陆启韶、黄立民译。科学出版社1987年4月第1版。

《数学基本公式手册》〔苏〕B·T·沃德涅夫等编，李文译。黑龙江科学技术出版社1984年10月第1版。

《数学手册》中国矿业学院数学教研室编。科学出版社1978年1月第1版。

中学数学教法改革、一般教学方法录象片简介 《中学数学教法改革,一般教学方法录象片》以及与之配套的文字教材，是由全国中学数学教法研究会组织有关人员研制和撰写的。由辽宁远距离（录像）出版社出版发行。其研制和撰写的指导思想是：立足于现代教学论的基本观点，用现代化的教学手段展示我国近年来中学数学教学改革出现的新教法，为高师院校数学专业教法课提供直观的教材，为在职中学数学教师学习新的教学方法创造条件，促进我国中学数学教学方法的发展和改革，现在已编辑成九盒录象带，其中每一种教法均由教法理论、实验教学和教法述评三个部分组成。九盒录象带的内容如下：（1）绪论：讲述我国中学数学教学方法的变革情况，传统教学论和现代教学论的基本观点，以及当前数学教学中应当注意的问题。（2）自学辅导法：创始人卢仲衡（中国科学院心理研究所），实验人巴淑芝等（内蒙赤峰中学）。（3）纲要信号法：移植人高家芳（吉林长春师院），实验人孟宪儒（长春市实验中学）。（4）启研法：创始人谢国生（广州市一中），实验人谢国生。（5）尝试指导、效果回授法：创始人顾冷沅（上海市青浦县教研室），实验人陆引麟（上海市青浦中学）。（6）引导发现法：创始人张佩珍等（上海师大附中），实验人侯秀贞（上海师大附中）。（7）研究性学习法：移植人胡炯涛（上海师大附中），实验人胡炯涛。（8）自学、议论、引导法：创始人李庾南（江苏省南通十二中），实验人李庾南。（9）自学、讨论、精讲、演练、总结法（五步法）：创始人隗福延（吉林辽源十二中）、刘兆明（吉林白城师专），实验人邓育红（沈阳军区白城干部子女中学）。与录象片配套的书，主要介绍我国中学数学教改实验中出现的各种教学方法、理论和实验教学的教案，并附有实验报告和有关论文。

国内部分中学数学实验教材简介

《平面几何实验教材》 华中师范大学附中高级教师刘世策编，华中师大出版社出版。该书总结了该校九年来几何教改的经验，并吸取国内各种教材之长处，用生动的语言、启导自学的方式和符合少年儿童学习心理的程

序，突出几何论证入门训练和几何解题的思维方法指导，内容丰富而有弹性，习题分挡次，适于各种层次的学生自学，而又便于教师备课，该书曾在省内外一百多个实验班试用过，反映良好。

《平面几何试验教材》　上海市杨浦区教育学院徐方瞿编写。教材将正确的、科学的思想方法作为教学的重要内容直接编进教材，如直觉思维、逻辑思维、辩证思维和创造性思维等，都结合有关的几何知识，作了充分的介绍和论述。教材着重剖析和介绍了“拿到一个问题后是怎样想的？“是怎样一步一步想出来的？”和“为什么会这样想？”这样三个问题。教材充分地介绍了几何问题的分析方法和思维方法的规律性，总结和提出了一种能揭示几何问题分析方法规律性的基本图形分析法的体系，从而充分地阐明了几何问题中的每一条辅助线是怎样想出来的这个问题。在几何问题中能令人信服地说清楚每一条辅助线的添加道理。教材的编写还充分地考虑了对学生进行思维训练的层次性要求，采用了介绍早，不求一次成功，长期训练、反复应用、逐步形成，直至领悟的原则。该教材已经过八年多的教学实践，全国已有23个省、市、自治区300多所学校参加了这项教改实验，反映很好。

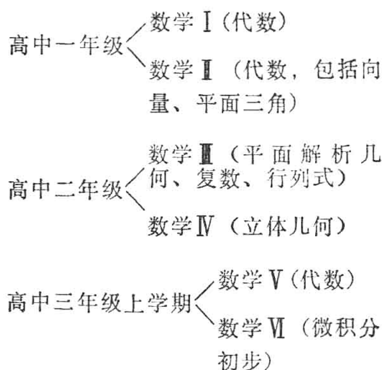
《中学数学实验教材》　这套教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位，参照美国加州大学伯克利分校项武义教授的设想从1978年11月开始编写的。其编写的指导思想是：“精简实用，反璞归真，顺理成章，深入浅出”。全套教材共分六册，第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数的基础上，明确提出运算律，并把数系扩充到有理数和实数。进而灵活运用运算律解一元一次、一元二次方程、多元一次方程组。然后进一步系统化，引进多项式运算，学习综合除法、辗转相除，到余式定理、因式定理，再学分式、根式、最后突出总结换元、配方、待定系数法等几个代数的通法。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形、圆、基本轨迹与作图、三角比与三角方程等基本内容。第三册是函数。代数与几何结合引入坐标，研究一次、二次多项式函数、三角函数、指数、对数、并系统学习一元一次、二次、高次不等式和解不等式。第四册是高中代数。把数系扩至复数，进一步加强多项式论、方程式论，讲线性代数初步，多项式的基础理论，余式定理，可除性质和史斗姆定理，最后学排列组合，二项式定理，概率初步。第五册是高中几何、先讲立体几何初步，后引进向量，用向量处理平面和立体几何问题，特别是平行、垂直、相似、共线、共点等问题。再引进坐标，处理直线、圆、圆锥曲线，坐标变换与二次曲线讨论，极坐标参数方程，最后用向量、坐标处理空间直线、平面与球。第六册是微积分初步。突出逼近法。讲实数完备性、函数、极限、连续、变率与微分、求和

与积分。《实验教材》从1979年秋开始实验，从首批的9个实验班422名学生，现已扩大到全国21个省(市)，规模较大。目前整套教材已进行了全面修订。另外，为使《中学数学实验教材》能在更多学校使用，准备在保持原有教材特色的前提下，适当降低难度，减少教学内容，编写一套普及本的中学实验教材。

《中学数学自学辅导教材》　这套教材是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡根据人民教育出版社课本内容，贯彻九条有效的学习心理学原则，并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种自学教材。全套书共包括代数四册、平面几何两册。每册有三个本子：一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，曾称“三本数学”（现在已把答案附在课本后面，增加了一个小测验本，即没有答案的练习本）。这套教材其程度与内容和全日制十年制统编教材基本一致，但富有学习心理学的特点，便于自学，并能激发学习者的兴趣和自信心。中学数学自学辅导教学是教材教法同时改革的，因此具有自己的教材编写原则和教学原则。九条教材编写原则是：（1）步子适当，从小步逐步过渡到大步；（2）当时知道结果；（3）铺垫原则；（4）从展开到压缩，从详尽到省略；（5）直接揭露本质特征；（6）尽量采取变式复习，避免机械性重复；（7）按步思维；（8）运算根据外化；（9）可逆性联想。七条教学原则是：（1）班集体与个别化相结合的原则；（2）教师指导、辅导下，学生自学为主的原则；（3）启（发）、(阅)读、练(习)、知（当时知道结果）、（小）结相结合的原则；（4）利用现代化教学手段加强直观性的原则；（5）尽量采用变式复习以加深理解与巩固的原则；（6）强动机、浓兴趣原则；（7）自检与他检相结合的原则。从1965年开始实验，经多次修订，现已在全国二十八个省、市、自治区的部分中学推广实验，在培养学生自学能力、形成自学习惯和自学能力迁移方面的效果显著。这项研究在1983年由中国科学院心理研究所组织专家进行鉴定，结果表明，中学数学自学辅导教材和自学辅导教学的学法和教法，不仅确能提高实验班学生学习数学的能力，而且也适用于青年自学和各种形式的成人教育。1985年这项实验研究获得中国科学院重大科技成果二等奖，并被列为全国教育科学“七·五”规划国家教委级重点科研项目。

《高中数学试验课本》　《高中数学试验课本》编写组编。这是一套主要供重点高级中学部分学生使用的、教学层次较高的教材。其编写的目的有二：其一，为了适应高中学生程度的差异。近几年虽然在现行统编高中数学课本之外还有一个反映《大纲》较高要求的甲种本，但这个甲种本仍使重点中学的部分学生感到吃不饱。因此，在现行统编教材的基础上应再编一套教学要求稍高一些的教材，使几套教材在教学要求的层次上配套，使不同程度的学生都有所得。其二，既可以将不少改革成果吸收到教材中，有利于教学质量的提高，又

可以具体地探索改革中提出的一些尚有争议的问题，以推动改革研究的深入。这套教材的内容主要在甲种本的基础上增加了简易逻辑和平面向量两项内容。在内容的编排上，教材突出了知识的整体性，加强了知识间的纵横联系，同时注意加强复习，逐步深化。其具体安排是：



高中三年级下学期数学Ⅵ，总复习教材。在教材的编写中，还十分重视将启发学生思维贯穿教材的始终。另外，教材中增加了两类习题，即思考题和研究题，以有利于形成学生研究和解决问题的能力。

《代数与初等函数》及《几何》　这是一套初中实验课本。由中央教育科学研究所数学改革实验小组根据中央教育科学研究所于1980年拟订的“中学数学实验教学大纲（初稿）”编写的，协助编写的有东北师大、山东省教研室、浙江教育学院、福建教育学院、湖南省教育科学研究所、湖北教育学院、安徽教育研究室等单位、实验这套教材的指导思想是：在加强基础知识教学的同时，突出发展学生智力，培养学生的基本能力；在减轻负担的条件下，适当提高数学程度；并在教学实验中，进一步探索数学教学的规律。全套课本《代数与初等函数》《几何》各六册。这套初中数学实验课本是从1981年秋季起在全国十几个省市进行实验的。

《初中代数实验教材》　这套代数实验教材是湖南省教育科学研究所等单位根据中央教育科学研究所于1980年拟订的“中学数学教学实验大纲(初稿)”编写的。共分六册。教材的体系与内容同现行的初中代数通用课本不同，在第一册代数式之后引进了“集合”概念。并用“集合”概念处理了以后各章的内容。在一元一次方程部分，增加了方程的讨论；在一次方程组之后增加了行列式的解法等内容。从1980年秋季起开始在长沙市几所中学进行试教。

《中学数学实验教材》　这套教材是北京师范大学数学系按照五、四、三学制组织人力编写的。这套数学实验教材编写的依据是：（1）适应初中学生毕业后，进入高一级学校继续学习、直接参加生产劳动以及当代对初中学生所应具备的文化水平的要求。（2）使学生切实学好初中学生应该与可能学到的数学基础知识，掌握其应用技能，并使探讨数学问题的能力得到充分的培养。（3）以现编教材为主要参考，并参照国内实验教材、国外最新教材进行编写。（4）以一般城镇中学生的知识水平为基点。（5）依据理论与实践相结合、具体与抽象相结合、严谨与量力相结

合、巩固与发展相结合的原则进行编写。从这套数学实验教材的纲目来看，使用本教材的初中毕业学生的数学水平略低于现行数学统编教材的高中一年级水平。从1982年秋季起，本教材在北京师范大学附属第二中学初一进行试教实验。

《初中数学实验教材》 上海复兴中学“初中数学实验教材编写组”编写。共分六册。教材的内容与体系基本上与人民教育出版社编写的初中数学统编教材类似，某些地方作了一些调整。在内容的处理上，如有理数的引进，应用题的编排顺序等则作了较大的变动；在练习的安排上也作了适当的调整，并充实了一些习题。从1981年秋季起，本套教材开始在上海市复兴中学等五所学校及全国各地学校约30个班进行实验。

《三角函数、解析几何、立体几何实验教材》 上海市复兴中学编写，本实验教材有以下特点：（1）力求让学生从已有的知识基础上（或生活经验基础上），经过启发、引导找出新的概念、公式、定理。（2）力求形成多通道联系，以简驭繁的知识结构。（3）力求使学生在学习数学的过程中，能滚雪球式地系统整理知识，且如螺旋形上升式提高能力。这套实验教材已进行了几轮实验，取得了较好的效果，受到师生们的欢迎。实验中也发现还有一些值得探索研究的地方有待充实改进。

《初中几何实验教材》 上海市育群中学编写。本教材的特点是：（1）用几何变换的观点组织教材，培养学生从运动变化的观点去观察图形、认识图形。利用轴对称、翻转变换解决作图、三角形与圆中的一系列问题；利用中心对称、旋转变换解决四边形与圆中的许多问题；抓住相似比解决相似形中的一些问题，在相似形一章中加入锐角三角比，它比放在代数中更顺理成章。（2）加强逻辑思维能力培养，强调逻辑性与可接受性的结合，说理充分但不繁琐。并促使学生习惯于看看、量量、画画，自己探索、类比、归纳、整理，从而得出一些规律。（3）注意了小学与初中几何知识的衔接并逐步深化，以合乎学生的认识规律。（4）配备了仅用观察、比较就能判断的识图题和简明、易答、多变的计算题。本教材已在部分学校实验了几轮。

《三角、解析几何实验教材》由陈振宣执笔编写。这两本实验教材有如下特点：（1）运用集合、映射、向量等概念、观点改造传统内容，删繁就简，化难为易，有一定独特的处理方法。（2）教材中尝试数学思维方法的渗透。如教材中在思路分析与规律小结上作了有益的探索。在解析几何中反复强调了坐标系这一映射工具，注意培养“遇数思形，见形想数”的思维方法，不断发展学生数形转化的能力。（3）在习题的处理上，除了一般问题之外，适当引入一些开放性的习题，让学生自由思维。本教材已在部分学校实验了几轮，初步证实教材的可行性。学生的思维能力有一定提高，从高考得分看，也普遍高于同类学校。

《高中数学部分实验教材》 这套教材是上海市徐汇区和虹口区的教

师进修学院教育科学研究室合编的。共分三册。第一册是坐标法；第二册是三角；第三册是解析几何。本教材编写的指导思想是运用向量等近代数学的概念、观点和方法改造传统教材，改进证明的推导过程，以达到精简、增加、渗透的目的；加强基本概念、基本观点、基本方法的教学；重视学科的逻辑结构，在培养能力和发展智力上下功夫；在教材改革上探索提高能力的途径；不增加学生负担，全面贯彻党的教育方针。这套教材首先引进了平面向量，并用其建立坐标系，后对整个三角和解析几何的内容作了处理。实验教材从1980年秋季起，开始在上海51中和59中进行试教。

小学实验课本一数学　《小学实验课本——数学》　这是中央教育学研究所从1980年经报告原教育部后编写、并在全国一些省市的许多学校开始实验的。为了更好地、切实地贯彻我国九年义务教育的精神，按照国家教委1988年11月颁发的九年制义务教育《小学数学教学大纲》（初审稿）的规定，为大面积地提高小学数学教学质量，中央教科所和武汉市教委共同组织，再次修订了这套教材（低年级插图都将彩印），并出配套的教学参考资料、《课外活动之友》和《假期作业》，适合城市和农村的一般学校使用。全套实验教材的修订原则如下：（1）它以《九年制义务教育小学数学大纲（初审稿）》为依据，在“大纲”内进一步改革各年级教材。在保留原实验教材的教学法体系特点的基础上，调整部分教学内容。（2）以辩证唯物主义思想为指导，注意从儿童的认知规律和改革教材知识结构的逻辑入手，遵循小学数学的教学规律，吸取国内外实践经验，教材力图做到科学性、思想性和启发性的统一；努力体现教与学的过程，以利于教和学；发挥数学系统性、逻辑性强的特点，使之以简驭繁，减轻学生负担。（3）改革教育思想和教学方法。（4）代数、几何初步知识的安排依据儿童的发展水平，注意与算术知识的联系，以利于促进三部分知识的掌握和提高。（5）教材注意从整体考虑，综合培养基础的数学能力。（6）注意贯彻实践性原则。这套实验教材在体系上还有如下特点：（1）重视数学概念和概念体系的教学。（2）正确处理算理、算律、算法和实际计算的关系。（3）教材重视概念、运算和应用题的紧密结合。（4）教材注意完善教学过程。（5）充分发挥练习题多方面的作用。修订后教材的教学参考资料、课外活动之友、假期作业等配合编写，同时发行。

小学“三算结合”教改实验　三算结合教改实验是针对传统教学中珠算单独设科，独立地进行教学提出来的，要求教师从小学一年级开始，把口算、笔算、珠算有机结合起来进行课堂教学，充分发挥算盘形象、具体、挡次清楚、珠动数出、儿童喜爱等教育功能与作用，使儿童手、脑并用，促进儿童思维的发展，达到打好基础，减轻负担，大面积提高小学数学教学质量的目的。三算结合教改实验起步很早，从五十年代开始，断断续续，几经中断。自1980年重新恢复实

验，近十年来实验发展迅速，从1980年的40多个班发展到1989年的11000多个班，50多万学生，是当前小学数学教改实验中规模较大，影响较广的单项实验。它不仅受到广大师生家长、特别是农村家长的欢迎，并且受到日本、美国朋友的赞扬，得到联合国教科文组织的资助。三算结合取得这样的效果，有如下原因：一是三算结合符合教学的规律，符合儿童的年龄特征和心理、生理的需要；二是三算结合符合我国国情，它不需要特殊的教学条件，适用于普通的学校、普通的教师和普通的学生；三是三算结合适应了农村教育为农村经济发展服务的需要；四是珠算在我国有悠久的历史，是传统的计算方法，有广泛的群众基础。在三算结合的教学过程中，现在较一致的看法是，口算是基础，只能加强，不能削弱；笔算是主体，是数学教学的中心任务，要在加强基础知识、发展儿童智力、培养能力等方面多下功夫；珠算要发挥对于笔算、口算（包括估算在内）的辅助和工具的作用，在重视算盘的教育功能的同时，也要尽量避免有些实验班过分地强调珠算的作用，不能喧宾夺主。在教学过程中要尽可能使三者各展其长，互补其短，有机地自然地结合在一起，协调一致地发挥出它们的合力作用，相互辅助，相互促进。十年来，虽然三算结合教学改革实验积累了不少经验，取得了很大发展，但是，作为一项正在进行的教学改革实验，还有许多问题有待于在今后的实践中不断探索、研究、解决。

■责任编辑／孙永大

■封面设计／刘永和

ISBN 7-5328-1073-9/Z·34

定价：13.00元

二视图
二面角
二次方根
二次方程
二次曲面
二次函数
二次根式
二次锥面
二阶导数
二项方程
二阶行列式
二项式系数
二项式定理
二面角相等
二元一次方程
二元二次方程
二元一次方程组
二元二次方程组
二次曲线的中心
二次曲线的主轴
二次曲线的直径
二次函数的图象
二次根式的性质
二面角的平分面
二面角的平面角
二项式系数的性质
二项展开式的通项
二元二次方程的曲线
二次根式的除法法则
二次根式的乘法法则
二阶导数的中值定理

三角形的高
三角函数表
三角函数线
三垂线定理
三角形的元素
三角形的中线
三角形的内心
三角形的外心
三角形的外角
三角形的垂心
三角形的重心
三角方程的解集
三角形的稳定性
三角函数的导数
三角形内角和定理
三角形的主要线段
三角形的角平分线
三角函数的余函数
三角函数值的符号
三面角的性质定理
三角方程的增根、失根
三垂线定理的逆定理
三角方程解集的等效性
三角形角平分线的性质
三面角全等的判定定理
三倍角的正弦、余弦公式
三角函数的和差化积公式
三角函数的定义域和值域
三角函数的积化和差公式
三元线性方程组的解的讨论
三角形的外角平分线的性质

四画

无理式
无理数
无穷数列
无限小数
无限集合
无界数列
无理方程
无心二次曲线
无限不循环小数
无穷递缩等比数列
无穷递缩等比数列各项的和
无穷数列和无穷数列的各项和
不名数
不等号
不等式
不大于号
不小于号
不定方程
不定积分
不足近似值
不可约多项式
不等边三角形
不等式的解集
不等式同解原理
不等式组的解集
不等式的基本性质
不定积分的几何意义
不定积分的运算法则
不尽相异元素的全排列
区间
车比雪夫不等式

比
比号
比例
比值
比率
比例尺
比例号
比例规
比例式
比例项
比较量
比例中项
比例内项
比例外项
比例系数
比例线段
比的化简
比的后项
比的性质
比的前项
比例的性质
比例分配问题
比的基本性质
比例的基本性质
互质数
互为余角
互为补角
互为倒数
互不相容和互不相容的事件组
互为反函数的函数图象间的关系
互不相容事件有一个发生的概率计算

切线
切线长定理
切割线定理
中位线
中位数
中心对称
中心投影
中间问题
中国数字
中心对称图形
贝努利不等式
内错角
长度
长方体
长除法
长度单位
长方体的三度
长方体对角线的性质
化分数为有限小数的方法
化有限小数为分数的方法
化纯循环小数为分数的方法
化混循环小数为分数的方法反比
反比例
反函数
反比定理
反对数表
反三角函数
反比例关系
反比例函数
反正切函数
反正弦函数

反余切函数
反余弦函数
反函数的导数
反三角函数的导数
反比例函数的图象
反三角函数间基本关系公式
反正切函数y=arc tg x的主要性质
反正弦函数y=arc sin x的主要性质
反余切函数y=arc ctg x的主要性质
反余弦函数y=arc cos x的主要性质
分子
分母
分式
分数
分节号
分数比
分比定理
分式方程
分步算式
分段函数
分数加法
分数的和
分数的积
分数单位
分数除法
分数乘法
分数减法
分母有理化
分组分解法
分部积分法
分解质因数

分数与除法
分数比例尺
分数应用题
分数的分类
分数的连乘
分数的性质
分布和分布列
分式恒等定理
分数化百分数
分数化连分数
分数四则运算
分数加法法则
分数除法法则
分数乘法法则
分数减法法则
分式的除法法则
分式的乘方法则
分式的乘法法则
分式的基本性质
分式的符号法则
分数的大小比较
分数的基本性质
分数乘法的速算
分数加法的速算法
分数指数幂的法则
分数乘法的运算律
分数减法的速算法
分数加法的运算定律
分数减法的运算性质
分数、小数四则混合运算
分数、小数加减混合运算

分数、小数乘除混合运算
分数能够化为有限小数的充要条件
公理
公切线
公因式
公约数
公倍式
公倍数
公式变形
公切线的长
公约数、公倍数问题
公分母和最小公分母
勾、股、弦
勾股定理
勾股数组
六十进位制
方根
方程
方程组
方程的根
方程的解
方程组的解
方程同解原理
方程组的初等变换
计量
计数
计算
计量单位
计数公理
计数单位
计算方法

计算数学
心脏线
尺规作图
尺规作图不能问题
双曲线
双纽线
双二次方程
双曲线的弦
双曲线的直径
双曲线的几何画法
双曲线的切线方程
双曲线的标准方程
双曲线x2/a2－y2/b2=1（a＞0,b＞0）的性质
双曲线x2/a2－y2/b2=1（a＞0,b＞0）的实轴和虚轴

五画

正比
正切
正弦
正割
正数
正比例
正方形
正方体
正投影
正棱台
正棱柱
正棱锥
正多边形
正多面体
正弦定理

正比例关系
正比例函数
正方体的体积
正多面体的中心
正棱台的性质
正棱锥的性质
正多边形的中心
正多边形的半径
正多面体的种类
正棱台的全面积
正比例函数的图象
正多边形的中心角
正多边形的边心距
正多面体的切棱球
正多面体的内切球
正多面体的外接球
正弦曲线和余弦曲线
正棱锥的侧面展开图
正多面体的表面积及体积
正切函数y=tgx和余切函数y=ctgx的主要性质
正弦函数y=sinx和余弦函数y=cosx的主要性质
去括号法则
古典概型
可约分数
左视图
平方
平角
平面
平方表
平方根
平行线

平均数
平方根表
平行公理
平行投影
平面图形
平方差公式
平行六面体
平行四边形
平面的斜线
平面的表示法
平行四边形的高
平面曲线的弧长
平面直角坐标系
平面的垂线性质
平面的基本性质
平行平面的公垂线
平行四边形的底边
平行线等分线段定理
平面内两点间的距离
平面和平面平行的性质
平面和平面垂直的性质
平行线分线段成比例定理
平行于棱锥底面的截面的性质
平面和平面平行的判定定理
平面和平面垂直的判定定理
凸多边形
凸多面体
凸多面角
凸多面角的性质定理
凹多边形
归一问题

四则运算
四叶玫瑰线
四舍五入法
代数
代数式
代数和
代数数
代数几何
代数方程
代数运算
代数式的值
代数余子式
外错角
包含除
主视图
主分数线
立方
立方表
立方根
立方根表
立体几何
立方和公式
立方差公式
半径
半平面
半立方双曲线
半立方抛物线
半开半闭区间
半角的三角函数公式
必要条件
必然事件和不可能事件

记数法
出生率
出苗率
出粉率
加号
加法
加数
加法原理
加权平均数
加法交换律
加法运算律
加法结合律
加法的验算方法
加法简单应用题
边边边定理
边角边定理
发芽率
对数
对应边
对应角
对顶角
对称点
对称轴
对数表
对应顶点
对称中心
对数方程
对数函数
对称多项式
对数恒等式
对数运算的法则

有理数加法法则
有理数除法法则
有理数乘法法则
有理数减法法则
有向线段的绝对值
有向线段的加法定理
有余数除法的整除性
有理数大小比较法则
百分比
百分号
百分法
百分率
百分数
百分数化小数
百分数化分数
百分数应用题
成数
成活率
成反比例的量
成正比例的量
成反比例量的性质
成正比例量的性质
轨迹的基本属性
毕业率
毕达格拉斯数
毕达格拉斯定理
同心圆
同名数
同位角
同类项
同次根式

同类根式
同旁内角
同旁外角
同解方程
同向不等式
同解不等式
同解方程组
同类二次根式
同底数幂的除法法则
同底数幂的乘法法则
同分母的分式加减法法则
同角三角函数的基本关系式
因式
因数
年龄问题
曲线
曲线的方程
曲线的切线
曲线的割线
曲线的对称性
曲线方程的讨论
曲线的参数方程
曲线在一点的法线
曲线的极坐标方程
曲线在平面内的射影
曲线在坐标轴上的截距
曲线的普通方程化成参数方程
曲线y=f（x）在点xo处的切线和切线斜率
曲线y=f（x）在点xo处的法线和法线方程
任意角的三角函数
自变量

自然数
自然对数
自然数列
自变量x的改变量△x与函数y=f（x）的改变量△y
向量
向量的模
行列式
行列式的元素
行列式的性质
行列式按一行（一列）的展开
全集
全排列
全等三角形
全概率公式
合数
合格率
合比定理
合比性质
合分比定理
众数
负数
负整指数
名数
多边形
多项式
多面体
多面角
多项式的元
多项式的次
多项式的项

多面体的棱
多面角的面
多面角的棱
多边形的内角
多边形的外角
多边形的周长
多面体的顶点
多面体的截面
多面角的对称
多面角的顶点
多面角的面角
多边形的内切圆
多边形的内角和
多边形的对角线
多边形的外角和
多面体的对角线
多面角的二面角
多项式的平方公式
多项式乘法法则
多项式恒等于零定理
多项式除以单项式法则
齐次方程
齐次多项式
齐次线性方程组
交集
交代式
充分条件
充要条件
闭区间
并集
关系符号

关于$\sin x$及$\cos x$的齐次方程
导数概念
导数公式表
导数与导函数
异名数
异次根式
异面直线
异向不等式
异面直线的性质
异面直线所成的角
异分母的分式加减法法则
阶乘
约分
约数
约等子
约等号
约分的方法

七画

形如$a\sin a+b\cos a$的化积公式
进率
进位制
运算
运算符号
运算顺序符号
抛物线
抛物线的弦
抛物线的轴
抛物线的焦弦
抛物线的几何画法
抛物线的切线方程
抛物线的标准方程

抛物线拱形的画法
抛物线y2=2px（p＞0）的性质
拟柱体
拟柱体的体积
拟柱体的中截面
严格递减数列
严格递增数列
克莱姆法则
极坐标系
极坐标方程的对称性
极坐标和直角坐标的关系
杨辉三角
求平均数问题
求倒数的方法
求曲线方程的步骤
求最值应用问题的一般方法
更比定理
两两互质
两圆内切
两圆内含
两圆外切
两圆外离
两圆相交
两圆相离
两个重要对数
两条曲线的交角
两条曲线的交点
两条直线的夹角
两多项式恒等定理
两条平行线间的距离
两条异面直线的距离

两条异面直线互相垂直
两条异面直线的公垂线
两个平行平面之间的距离
两个平面平行的判定定理
两条直线平行的充要条件
两条直线位置关系的讨论
两条直线垂直的充要条件
两个量成反比例的充要条件
两角和与差的三角函数公式
两种量成正比例的充要条件
两个不重合的平面的位置关系
否命题
连比
连加
连除
连乘
连减
连分数
连乘积
连比的求法
连分数的部分商
连续函数的局部保号性质
利息
利息率
利用平移化简二次曲线方程
利用转轴消去二元二次方程中的xy项
体积
体积单位
低位
位似形
位置值

近似积
近似值
近似商
近似数
近似计算
近似数的截取法
近似数的加减计算
近似数的乘除计算
余切
余弦
余割
余子式
余弦定理
坐标法
坐标轴
坐标平面
坐标变换
坐标轴的平移公式
坐标轴的旋转公式
含有绝对值的不等式的性质
邻补角
角
角平分线
角边角公理
角角边定理
角度制与弧度制之间的换算关系
条件等式
应用题
应用题的分类
应用题的结构
应用题的基本要求

应用换元法计算定积分
应用积分表计算不定积分
应用数列极限的定义证明数列的极限方法
序数
判定定理
判定极限存在的两个定理和两个重要极限
完全平方公式
完全立方公式
证明
证明不等式的比较法
证明不等式的分析法
证明不等式的综合法
补集
初等函数
初等函数的连续性
阿拉伯数字
阿基米德螺线
阿拉伯数字记数法
纯小数
纯虚数
纯循环小数

八画

环形排列
拉格朗日中值定理
取对数求导法
直角
直径
直线
直线系
直棱柱
直二面角

直三面角
直角三角形
直角坐标系
直线坐标系
直线的法线
直线的斜率
直接积分法
直线的倾斜角
直线和平面平行
直线和平面垂直
直线和平面相交
直线的参数方程
直线和平面的交角
直线和平面的距离
直线的一般式方程
直线的两点式方程
直线的极坐标方程
直线的法线式方程
直线的点斜式方程
直线的斜截式方程
直线的截距式方程
直线l1到直线l2的角
直线和圆的位置关系
直棱柱的侧面展开图
直线在坐标轴上的截距
直线和平面平行的判定
直线和平面平行的性质
直线和平面垂直的判定
直线和平面垂直的性质
直线两点式的极坐标方程
直线法线式的极坐标方程

直线点法式的极坐标方程
直线一般式方程化为法线式方程的方法
事件的合成关系
事件的兼并关系
事件的独立关系和包含关系
奇数
奇函数
欧拉公式
欧几里得几何
转置行列式
轮换对称式
非十进复名数
非欧几里得几何
典型复合应用题
罗马数字
罗尔中值定理
罗马数字记数法
垂足
垂线
垂线段
垂径定理
和
和倍问题
和差问题
和、差的整除性
质式
质数
质因数
质数的判定方法
命题
命题的四种形式

周角
周期
周期函数
变量
底数
废品率
放大比例尺
单比
单比例
单位圆
单名数
单项式
单调数列
单元素集合
单叶双曲面
单项式乘法法则
单叶双曲面的截痕
单项式除以单项式法则
单项式与多项式相乘法则
性质定理
定理
定积分的概念
空集
空间两直线的位置关系
空间直线平行的传递性
空间中对应边平行的两角的关系
实数
实系数一元n次方程虚根成对定理
试商法
视图
弧度制

弧与弧相连接
弦
弦切角
弦心距
弦切角定理
函数
函数值
函数图象
函数关系
函数的极限
函数的值域
函数的微分
函数的左极限
函数的右极限
函数的有界性
函数的表示法
函数的奇偶性
函数的单调性
函数的定义域
函数的增减性
函数极值的判定
函数的单边极限
函数的基本性质
函数增减性的判定
函数的凸向和拐点
函数极限的运算法则
函数的极值和极值点
函数的和、差、积、商的导数
函数的最大值与最小值
函数f（x）在点xo处连续的定义
函数的可导性与连续性的关系

函数极限的基本类型和它们各自的特点

函数f（x）在点x=xo处极限存在的充分必要条件

参数方程

参数方程曲线的画法

线段

线段图

线性方程

线性方程组

线段比例尺

线段的中点

线段的中垂线

线段的内分点

线段的正射影

线段的外分点

线性方程组的系数矩阵

线性方程组的增广矩阵

线性方程组的常数项矩阵

组合

组合数

组合数的性质

组合数计算公式

经过一点和平面垂直的直线

经过一点和直线垂直的平面

经过两圆交点的圆系方程

经过两条直线交点的直线系方程

九画

括号

指数

指数方程

指数函数

指数函数的导数
指数函数的图象和性质
按反比例分配问题
按正比例分配问题
带小数
带分数
带分数化假分数
标准量
柯西不等式
相反数
相反复数
相对误差
相似系数
相遇问题
相互内位似
相互外位似
相对误差界
相似三角形
相似多边形
相交弦定理
相关联的量
相等的向量
相互独立事件同时发生的概率计算
研究？（x）应注意的问题
面积
面积单位
轴对称图形
点集
点的轨迹
点的坐标
点到平面的距离

点到直线的距离
点在平面内的射影
点到平面垂线的性质
映射
钝角
钝角三角形
矩阵
矩形
矩阵的元素
矩阵的行的初等变换
选排列
科学记数法
重根
重复排列
复比
复数
复比例
复名数
复数系
复合函数
复种指数
复数平面
复数的模
复合应用题
复数的开方
复数的相等
复数的除法
复数的乘方
复数的乘法
复数的辐角
复数的绝对值

复合函数的导数
复杂分数应用题
复数加法的性质
复数乘法的性质
复数的几何表示
复数的三角形式
复数的代数形式
复数的指数形式
复数的模的性质
复数的加法与减法
复数开方的几何意义
复数除法的几何意义
复数乘法的几何意义
复数加减法的几何意义
复合应用题的一般解题思路
复数的代数形式与三角形式的互化公式
追及问题
叙述式式题
独立重复试验
差
差异量
差倍问题
逆运算
逆命题
逆映射
逆否命题
总体
总体方差
总体平均数
恒等
恒等号

样本标准差
根号
根式的基本性质
原函数
较复杂分数应用题
圆
圆台
圆束
圆系
圆周
圆弧
圆柱
圆锥
圆簇
圆内角
圆心角
圆外角
圆周角
圆周率
圆面积
圆锥曲线
圆台的体积
圆台的性质
圆柱的体积
圆柱的性质
圆柱的截面
圆的切线长
圆的对称性
圆的渐开线
圆锥曲线系
圆锥的体积

圆锥的顶角
圆锥的性质
圆内接四边形
圆台的中截面
圆台的全面积
圆台的侧面积
圆柱的全面积
圆柱的侧面积
圆的切线方程
圆的标准方程
圆锥的全面积
圆锥的侧面积
圆的一般式方程
圆的外切多边形
圆的极坐标方程
圆锥曲线的直径
圆台的侧面展开图
圆柱的内接正棱柱
圆柱的侧面展开图
圆的渐伸线的作图
圆锥的侧面展开图
圆锥曲线的统一定义
圆的渐开线的参数方程
圆锥曲线的极坐标方程
圆锥曲线的直角坐标方程
圆锥曲线的切线和法线的性质
圆柱、圆锥、圆台的侧面积统一公式
乘方
乘号
乘法
乘数

乘法表
乘法原理
乘法交换律
乘法运算律
乘法结合律
乘法的验算方法
乘法简单应用题
乘法对加法的分配律
积
积的整除性
积的乘方法则
值域
倒数
俯视图
倍数
射线
射影定理
射影长定理
高位
高阶等差数列
准确商
准确数
离散型随机变量和非离散型随机变量
效率
部分积
部分商
部分分式
递减数列
递增数列
容积
容量

球的截面性质
球的外切圆锥面
球带的面积公式
球冠的面积公式
球面上两点间的距离
排列
排列数
排序不等式
排列数计算公式
基数
基本轨迹
基本作图
基本积分公式
基本事件和复杂事件
菱形
黄金分割
梯形
梯形的底
梯形的高
辅助线
虚数
虚数单位i的幂的周期性
常量
常数
常数列
常用对数
常用对数的首数
常用对数的尾数
累计频率
第一级运算
第二级运算

第三级运算
第四比例项
偶数
偶函数
假分数
假命题
假分数化整数
假分数化带分数
斜足
斜线
斜率
斜线段
斜棱柱
斜三角形
斜线长定理
象象限
限角
减号
减法
减数
减法的运算性质
减法的验算方法
减法简单应用题
商
旋转体
旋转面
旋轮线
旋转体的体积
旋转体的侧面积
旋轮线的参数方程
添括号法则

棱锥的全面积
棱锥的侧面积
棣莫佛定理
椭圆
椭圆规
椭圆的弦
椭圆的直径
椭圆的面积
椭圆的切线方程
椭圆的主要直径
椭圆的参数方程
椭圆的标准方程
椭圆周长近似计算公式
椭圆x2/a2+y2/b2=1（a＞b＞0）的性质
椭圆x2/a2+y2/b2=1（a＞b＞0）的长轴和短轴
确定平面的条件
最简比
最简分式
最简分数
最简根式
最大公约数
最小公倍数
最小正周期
最低公倍式
最高公因式
最简二次根式
最大公约数的求法
最大公约数的性质
最小公倍数的求法
最小公倍数的性质
最简单的三角方程

最简单的三角方程的解集
最大公约数与最小公倍数的关系
量
锐角
锐角三角形
短除法
等号
等圆
等分除
等比中项
等比定理
等比数列
等边圆柱
等边圆锥
等价命题
等速螺线
等差中项
等差数列
等量代换
等边三角形
等式的性质
等轴双曲线
等腰三角形
等比数列的公比
等差数列的公差
等腰直角三角形
等轴双曲线的性质
等比数列的通项公式
等可能性事件的概率
等差数列的通项公式
等速螺线的极坐标方程

频率的稳定性
频率分布直方图
置换问题
简单连分数
简单应用题
简化二次方程
简单分数应用题
微积分
微积分研究的对象和特点
微积分基本公式—牛顿，莱布尼兹公式
解比例
解方程
解三角形
解不等式
解方程组
解析几何
解三角方程
解应用题的一般步骤
数
数列
数位
数字
数学
数轴
数集
数字值
数列的项
数的分布
数的分级
数目恒等式
数位顺序表

数列极限定义
数列的通项公式
数列极限的运算法则
数列前n项和的公式
数轴上两点间的距离
数列极限定义的几何意义
数列｛an｝和数列｛bn｝的和数列、差数列、积数列和商数列
数列极限运算法则
十四画
截距
辗转相除法
算术
算式
算盘
算术平方根
算术平均数
算术平均值与几何平均值不等式
精确度
缩小
缩小比例尺
十五画
增根
增长率
增加了
增加到
增加几倍
十六画
整式
整除
整数

无理代换法
不完全归纳法
互斥法
中介法
中心投影法
中间变量法
中国剩余定理
内插法
牛顿法
长除法
化归方法
反证法
反例法
反演法
反向归纳法
反演变换法
公理方法
公理化方法
分类
分析法
分步法
分割法
分数法
分解方法
分组分解法
分解组合法
分段讨论法
分析综合法
分子有理化法
分母有理化法
分离系数除法

孙子定理
孙子剩余定理
七画
形式化方法
形式逻辑方法
进一法
运筹学方法
均值
均值法
均方根平均
极限法
极端化方法
克莱姆法则
两头凑法
折纸法
投影变换法
求差比较法
求差相消法
求商相消法
串值归纳法
体积法
伸缩变换法
位置法
位似作图法
位似变换法
近似数的截取方法
坐标法
狄利克雷原则
间接证法
判别式法
完全归纳法

穷举法
证明
初等几何变换法
局部变动法

八画

枚举归纳法
松弛法
构造法
构造图形法
构造命题法
取样方法
直接证法
直接推演法
顶点平移法
抽样方法
抽屉原则（原理）
抽象分析法
拉格朗日插值方法
欧几里得算法
非负数法
非逻辑方法
图示法
图形法
图象法
图解法
图论方法
图形变换法
物理模拟法
迭式法
放缩法
变角法

内涵
内省法
内部语言
内涵定义
内隐语言
内涵与外延的反比关系
气质
气质学说
反应
反驳
反射
反射学
反向思维
反应时间
反馈系统
反应潜伏期
分部概念
公理
文饰作用
计算机
认知
认知科学
认知结构
认知结构论
心理
心情
心境
心理学
心理发展
心理过程
心理状态

同一概念
回忆
年龄特征
迁移
优越感
优选思维
仿效
自卑感
自制力
自由联想
自居作用
自我意识
自我感觉
行为
行为主义
全方位思维
会聚思维
企图
创造力
创造想象
创造性思维
多血质
多元思维
多向思维
交叉关系
交叉概念
充分条件
充要条件
问题解决
并列关系
并列概念

刺激
态度
非言语行为
非智力因素
非意义识记
肯定判断
肯定概念
具体化
具体存在
具体形象
具体符号
具体概念
具体形象思维
典型属种定义
罗素悖论
知觉
命题
命题的四种形式
单向思维
单独概念
注意
注意广度
注意分配
注意转移
性格
学习
学习论
学习心理
学习目的
学习曲线
学习迁移

相似论
相对关系
相对概念
点状思维
尝试和错误说
思维
思想
思路
思维学
思维工具
思维内容
思维方式
思维方法
思维对象
思维机制
思维机理
思维过程
思维形式
思维进程
思维运动
思维材料
思维呆滞
思维状态
思维层次
思维空间
思维规律
思维怪圈
思维定势
思维品质
思维科学
思维活动

思维结构
思维素质
思维速度
思维监控
思维效率
思维惯性
思维超前
思维滞后
思维惰性
思维境界
思维模式
思维器官
思维互补说
思维稚化术
思维的伸缩性
适应
种差
种属性
种概念
科学思维
重视
复习
复合判断
复合命题
顺向思维
保持
信号
信息
信息论
胆汁质
美感

感知
感觉
感知取景
感知限度
感觉记忆
辐合思维
辐射思维
暗示
错觉
简单判断
简单命题
新三论
意会
意志
意识
意志型
意识域
意义识记
数学化
数学公式
数学存在
数学名称
数学论证
数学观念
数学求解
数学判断
数学规定
数学命题
数学定义
数学思维
数学语言

自学辅导教导法
自学辅导教学实验的教学原则
行为目标
全面发展
合作教育学
合理的课堂教学结构
众数
创造性教学
多解选择题
次级资料
次数分布
次认知技能
次数分布表
次数分布图
闭卷考试
问题教学
问题教学法
问题情境测验
“ 问题是数学的心脏 ”
并列结合学习
安慰剂效应
讲授法
论述题
论文答辩
论文式考试
设计教学法
导生制
阶梯式教学法
观摩教学
约翰 · 亨利效应

七画

知识的应用
知识的学习
知识的理解
知识结构单元教学法
使学生理解学习过程的原则
使所有学生包括后进生都得到一般发展的原则
命题的一般原则
备课
单元备课
单元测验
注入式教学
波利亚教学三原则
学习动机
学习兴趣
学习评价
学生评价
学年考试
学校评价
学能考试
学期（年）备课
学生学习过程最优化
学生获得概念的解释
定性评价法
定量评价法
实验法
实物直观
实质教育说
试卷
参数
练习
练习法

教案
教学论
教师“十诫”
教师评价
教育评价
教育实习
教育实验
教育测量
教学大纲
教学内容
教学水平
教学手段
教学风格
教学方法
教学计划
教学目的
教学目标
教学机智
教学过程
教学关键
教学设计
教学系统
教学评价
教学规律
教学质量
教学单元
教学相长
教学要求
教学重点
教学信息
教学语言

教学速度
教学原则
教学效果
教学难点
教学难度
教学控制
教学策略
教师中心论
教学与发展
教案的运用
教师主导作用
教师自编考试
教育目标分类
教育实验效应
教育实验效度
教学目标分析
教学原则体系
教育评价的方法
教育评价的要素
教育测量的要素
教育测量的特点
教学方法的选择
教学生学会“ 反思 ”
教学生学会学习
教学过程本质论
教学过程最优化
教为主导学为主体
教学手段历史沿革
教学方法分类系统
教学方法的最优化
教育评价的基本程序

数学法则教学
数学学科特点
数学定理教学
数学复式教学
数学班级教学
数学课的结构
数学能力结构
数学教材编排
数学概念教学
数学意义学习
数据的上下限
数学教学指导书
数学思想方法教学
数学教学中的反例
数学教学中的猜想
数学教学过程实质
数学教学板书设计
数学教学组织形式
数学解题策略原则
数学运算技能的形成
数学学习的认识过程
数学教育中的正迁移
数学公式的理解与运用
数学问题解决中的审题
数学问题解决中的检验
数学问题解决中的联想
数学问题解决中的模仿
数学论证中的虚假论据
数学论证中的偷换论题
数学论证中的偷换概念
数学论证中的循环论证

数学教学中的比较方法
数学教育中的“ 问题解决 ”
数学教育中的思维定势
数学教育中的类比方法
数学教育中的“ 潜在假设 ”
数学教学中的审美教育
数学教学过程基本矛盾
数学教学过程基本要素
数学教学的已知与新知
数学教学的具体与抽象
数学教学法的学科性质
数学教学思考方法训练
数学概念的形成与掌握
数学解题教学中的提示
数学知识发生过程的教学
数学教育中的划分与分类
数学教育中的整体性原则
数学教学中的巩固性原则
数学教学中的启发性原则
数学教学中的直观性原则
数学教学过程的基本阶段
数学问题解决中的课题类化
数学学业成绩的检查与评定
数学教学中的因材施教原则
数学教学中的爱国主义教育
数学教学中的循序渐进原则
数学教学是数学活动的教学
数学概念教学中的循环定义
数学教育中的非智力心理因素
数学教学中的反馈调节性原则
数学教学中理论联系实际的原则

卡门
卡诺
卡瓦列里
卡尔达诺
卢伊
卢津
史密斯
史蒂斯楚斯
丘成桐
外尔
外尔斯特拉斯
冯·诺伊曼
兰道
兰登
兰伯特
兰茨贝格
汉克尔
尼科马霍斯
尼科米迪斯
弗拉克
弗雷格
弗雷歇
弗伦克尔
弗里德里希斯
加德纳
皮尔逊
皮尔斯
皮亚诺

六画

邦贝利
邦别里

吉布斯
吉拉尔
托姆
托勒密
托里切利
芒福德
亚里士多德
亚尼谢夫斯基
亚利山德罗夫
芝诺
西格尔
西尔威斯特
达布
达文波特
达朗贝尔
列维——齐维塔
迈尔
毕达格拉斯
当儒瓦
年希尧
朱世杰
丢番图
华林
华罗庚
华衡芳
会田安明
刘洪
刘益
刘焯
刘徽
刘维尔

李锐
李之藻
李淳风
李善兰
杨乐
杨辉
吴敬
吴文俊
里奇
里斯
迪克森
迪厄多内
利马窦
利斯廷
利普希茨
利亚普诺夫
邹伯奇
何承天
伯奈斯
伯克霍夫
伯恩斯坦
伽罗瓦
希思
希尔伯特
希波克拉底
狄利克雷
亨泽尔
库尔诺
库默尔
库拉托夫斯基
辛钦

拉梅
拉盖尔
拉克鲁瓦
拉格朗日
拉普拉斯
拉夫连季耶夫
若尔当
范因
范德瓦尔登
林尼克
林家翘
林德曼
奈望林纳
欧拉
欧几里得
欧多克索斯
尚农
尚克斯
旺德蒙德
明安图
罗门
罗尔
罗素
罗特
罗贝瓦尔
罗巴切夫斯基
帕朗
帕斯卡
帕普斯
凯莱
凯拉吉

凯特勒
图灵
彼得罗夫斯基
庞加莱
庞斯列
庞特里亚金
法尼亚诺
波尔约
波伊亚
波莱尔
波斯特
波尔茨曼
波尔查诺
波格列洛夫

九画

项名达
赵爽
赵友钦
茹科夫斯基
胡世华
柯西
柯伦
柏拉图
威尔逊
威格纳
奎伦
哈尔
哈代
哈密顿
哈里奥特
科恩

莫尔斯
莫佩蒂
莫德尔
格林
格尔丰德
格拉斯曼
格罗斯曼
格涅坚科
格雷戈里
格罗唐迪克
哥尔丹
哥德尔
哥德巴赫
贾宪
夏侯阳
夏斯莱
夏鸾翔
夏道行
顾观光
钱宝琮
侯振挺
殷长生
徐有壬
徐光启
爱尔特希
高斯
高木贞治
郭守敬
海伦
海涅
诺特

维诺格拉多夫

十二画

琼斯

塔尔塔利亚

博叙

博苏克

斯图姆

斯特灵

斯梅尔

斯蒂文

斯豪滕

斯托伊洛夫

斯米尔洛夫

蒂伊

棣莫弗

惠更斯

惠特克

雅可比

雅各布森

雅各布 · 伯努利

斐波那契

程大位

策梅罗

傅立叶

焦循

奥托

奥卡涅

奥雷姆

奥特雷德

奥马 · 海亚姆

鲁宾逊

联邦德国数学期刊简介
建国以来的中小学数学教学大纲简介
中学数学教学工具书简介
中学数学教法改革、一般教学方法录像片简介
国内部分中学数学实验教材简介
小学实验课本—数学
小学“ 三算结合 ”教改实验